CAPÍTULO 1

NÚMEROS REAIS, FUNÇÕES E GRÁFICOS

EXERCÍCIOS 1.1 Números Reais e Desigualdades

1. $5x + 2 > x - 6$; $x > -2$; $(-2, +\infty)$

3. $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} \leq 0$; $x \leq \frac{3}{4}$; $(-\infty, \frac{3}{4}]$

5. $13 \geq 2x - 3 \geq 5$; $8 \leq 2x \leq 16$; $4 \leq x \leq 8$; $[4, 8]$

7. $2 > -3 - 3x \geq -7$; $-4 \leq -3x < 5$; $-\frac{5}{3} < x \leq \frac{4}{3}$; $(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}]$

9. $\frac{4}{x} - 3 > \frac{2}{x} - 7$; $\frac{2}{x} > -4$; $\frac{1}{x} > -2$

Caso 1: $x > 0$; então $x > -\frac{1}{2}$. Assim, $x > 0$ e $x > -\frac{1}{2}$. Portanto, $x > 0$.

Caso 2: $x < 0$; então $x < -\frac{1}{2}$. Assim, $x < 0$ e $x < -\frac{1}{2}$. Portanto, $x < -\frac{1}{2}$.

Logo, o conjunto-solução é $(\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, +\infty)$

11. $\frac{1}{x+1} < \frac{2}{3x-1}$. Então, $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{3x-1} < 0$; portanto, $\frac{3x - 1 - 2(x+1)}{(x+1)(3x-1)} < 0$; isto é, $\frac{x-3}{(x+1)(3x-1)} < 0$.

Caso 1: $x - 3 < 0$, $x + 1 < 0$ e $3x - 1 < 0$. Então, $x < 3$, $x < -1$ e $x < \frac{1}{3}$. Portanto, $x < -1$.

Caso 2: $x - 3 < 0$, $x + 1 > 0$ e $3x - 1 > 0$. Então, $x < 3$, $x > 1$ e $x > \frac{1}{3}$. Portanto, $\frac{1}{3} < x < 3$.

Caso 3: $x - 3 > 0$, $x + 1 < 0$ e $3x - 1 > 0$. Então, $x > 3$, $x < -1$ e $x > \frac{1}{3}$. Não existem tais valores de x.

Caso 4: $x - 3 > 0$, $x + 1 > 0$ e $3x - 1 < 0$. Então, $x > 3$, $x > -1$ e $x < \frac{1}{3}$. Não existem tais valores de x.

Logo, $x < -1$ ou $\frac{1}{3} < x < 3$. O conjunto-solução é $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{3}, 3)$.

13. $x^2 > 4$; $|x| > 2$; $x > 2$ ou $x < -2$. Portanto, o conjunto-solução é $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

15. $(x - 3)(x + 5) > 0$.

Caso 1: $x - 3 > 0$ e $x + 5 > 0$. Então, $x > 3$ e $x > -5$; portanto, $x > 3$.

Caso 2: $x - 3 < 0$ e $x + 5 < 0$. Então, $x < 3$ e $x < -5$; portanto, $x < -5$. Logo, o conjunto-solução é $(-\infty, -5) \cup (3, +\infty)$.

17. $1 - x - 2x^2 \geq 0$; $(1 + x)(1 - 2x) \geq 0$.

Caso 1: $1 + x \geq 0$ e $1 - 2x \geq 0$. Então, $x \geq -1$ e $x \leq \frac{1}{2}$; portanto, $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Caso 2: $1 + x \leq 0$ e $1 - 2x \leq 0$. Então, $x \leq 1$ e $x \geq \frac{1}{2}$. Não existem tais valores de x.

Portanto, o conjunto-solução é $[-1, \frac{1}{2}]$.

19. $4x^2 + 9x < 9$; $(4x - 3)(x + 3) < 0$.

Caso 1: $4x - 3 > 0$ e $x + 3 < 0$. Então, $x > \frac{3}{4}$ e $x < -3$. Não existem tais valores de x.

Caso 2: $4x - 3 < 0$ e $x + 3 > 0$. Então, $x < \frac{3}{4}$ e $x > -3$; portanto, $-3 < x < \frac{3}{4}$. Assim, o conjunto-solução é $(-3, \frac{3}{4})$.

21. $\dfrac{1}{3x - 7} \geq \dfrac{4}{3 - 2x}$ implica $\dfrac{31 - 14x}{(3x - 7)(3 - 2x)} \geq 0$.

Caso 1: $3x - 7 < 0$ e $3 - 2x < 0$. Então, $x < \frac{7}{3}$ e $x > \frac{3}{2}$; portanto, $\frac{3}{2} < x < \frac{7}{3}$. $31 - 4x \geq 0$ implica $x \leq \frac{31}{14}$. Logo, $\frac{3}{2} < x \leq \frac{31}{14}$.

Caso 2: $3x - 7 > 0$ e $3 - 2x > 0$. Então, $x > \frac{7}{3}$ e $x < \frac{3}{2}$. Não existem tais valores de x.

Caso 3: $3x - 7 > 0$ e $3 - 2x < 0$. Então, $x > \frac{7}{3}$ e $x > \frac{3}{2}$; portanto, $x > \frac{7}{3}$. $31 - 4x \leq 0$ implica $x \geq \frac{31}{14}$. Logo, $x > \frac{7}{3}$.

Caso 4: $3x - 7 < 0$ e $3 - 2x > 0$. Então, $x < \frac{3}{2}$. Mas $31 - 14x \leq 0$ implica $x \geq \frac{31}{14}$. Não existem tais valores de x.

O conjunto-solução é a união dos Casos 1 e 3: $\left(\frac{3}{2}, \frac{31}{14}\right] \cup \left(\frac{7}{3}, +\infty\right)$.

23. $|4x + 3| = 7$. Então, $4x + 3 = 7$ ou $-(4x + 3) = 7$; assim, $x = 1$ ou $x = -\frac{5}{2}$. Logo, o conjunto-solução é $\left\{1, -\frac{5}{2}\right\}$.

25. $|5x - 3| = |3x + 5|$. Então, $5x - 3 = 3x + 5$ ou $-(5x - 3) = 3x + 5$. Assim, $x = 4$ ou $x = -\frac{1}{4}$. Logo, o conjunto-solução é $(-\frac{1}{4}, 4)$.

27. $|7x| = 4 - x$.

Caso 1: $x \geq 0$; $7x = 4 - x$; $x = \frac{1}{2}$ *Caso 2*: $x < 0$; $-7x = 4 - x$; $x = -\frac{2}{3}$

Logo, o conjunto-solução é $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$.

29. $\left|\dfrac{x + 2}{x - 2}\right| = 5$ implica $\dfrac{x + 2}{x - 2} = 5$ ou $\dfrac{x + 2}{x - 2} = -5$. Resolvendo $\dfrac{x + 2}{x - 2} = 5$, obtemos $x = 3$. Resolvendo $\dfrac{x + 2}{x - 2} = -5$, obtemos $x = \frac{4}{3}$. Logo, o conjunto-solução é $\left\{\frac{4}{3}, 3\right\}$.

31. $\sqrt{8x - 5}$ é um número real se e somente se $8x - 5 \geq 0$; $x \geq \frac{5}{8}$. O conjunto-solução é $\left[\frac{5}{8}, +\infty\right)$.

33. $\sqrt{x^2 - 3x - 10} = \sqrt{(x - 5)(x + 2)}$; é um número real se e somente se $(x - 5)(x + 2) \geq 0$.

Caso 1: $x - 5 \geq 0$ e $x + 2 \geq 0$. Então, $x \geq 5$ e $x \geq -2$; assim, $x \geq 5$.

Caso 2: $x - 5 \leq 0$ e $x + 2 \leq 0$. Então, $x \leq 5$ e $x \leq -2$; assim, $x \leq -2$.

Logo, o conjunto-solução é $(-\infty, -2] \cup [5, +\infty)$.

35. $\sqrt{x^2 - 5x + 4} = \sqrt{(x - 4)(x - 1)}$; é um número real se e somente se $(x - 4)(x - 1) \geq 0$.

Caso 1: $x - 4 \geq 0$ e $x - 1 \geq 0$. Então, $x \geq 4$ e $x \geq 0$; assim, $x \geq 4$.

Caso 2: $x - 4 \leq 0$ e $x - 1 \leq 0$. Então, $x \leq 4$ e $x \leq 0$; logo, $x \leq 0$.

Logo, o conjunto-solução é $(-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$ ou, equivalentemente, todo x que não esteja em (1, 4

37. $|x + 4| < 7$; $-7 < x + 4 < 7$; $-11 < x < 3$. Logo, o conjunto-solução é $(-11, 3)$.

39. $|3x - 4| \leq 2$; $-2 \leq 3x - 4 \leq 2$; $\frac{2}{3} \leq x \leq 2$. Logo, o conjunto-solução é $[\frac{2}{3}, 2]$.

41. $|5 - x| > 7$. Temos $5 - x > 7$ ou $5 - x < -7$; isto é, $x < -2$ ou $x > 12$. Logo, o conjunto-solução é $(-\infty, -2) \cup (12, +\infty)$.

43. $|7 - 4x| \leq 9$; $-9 \leq 7 - 4x \leq 9$; $-\frac{1}{2} \leq x \leq 4$. Logo, o conjunto-solução é $[-\frac{1}{2}, 4]$.

45. $|2x - 5| > 3$. Temos $2x - 5 > 3$ ou $2x - 5 < -3$; isto é, $x > 4$ ou $x < 1$. Logo, o conjunto-solução é $(-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$.

47. $|3x| > |6 - 3x|$ é equivalente a $(3x)^2 > (6 - 3x)^2$, isto é, $9x^2 > 36 - 36x + 9x^2$ ou $x > 1$. Logo, o conjunto-solução é $(1, +\infty)$.

49. $|9 - 2x| \geq |4x|$

Caso 1: $x \leq 0$. Então, $9 - 2x \geq -4x$; $2x \geq -9$; $x \geq -\frac{9}{2}$.

Caso 2: $0 < x \leq \frac{9}{2}$. Então, $9 - 2x \geq 4x$; $9 \geq 6x$; $x \leq \frac{3}{2}$.

Caso 3: $x > \frac{9}{2}$. Então, $-(9 - 2x) \geq 4x$; $-9 \geq 2x$; $x \leq -\frac{9}{2}$. Não existem tais valores de x.

Logo, o conjunto-solução é $[-\frac{9}{2}, 0] \cup [0, \frac{3}{2}] = [-\frac{9}{2}, \frac{3}{2}]$.

51. $\left|\frac{x + 2}{2x - 3}\right| < 4$ implica $|x + 2| < 4|2x - 3|$.

Caso 1: $x \leq -2$. Então, $-(x + 2) < 4(2x - 3)$; $-x - 2 < -8x + 12$; $7x < 14$; $x < 2$

Caso 2: $-2 < x \leq \frac{3}{2}$. Então, $x + 2 < -4(2x - 3)$; $x + 2 < -8x + 12$; $9x < 10$; $x < \frac{10}{9}$

Caso 3: $x > \frac{3}{2}$. Então, $x + 2 < 4(2x - 3)$; $x + 2 < 8x - 12$; $14 < 7x$; $x > 2$.

Logo, o conjunto-solução é $(-\infty, -2] \cup \left(2, \frac{10}{9}\right) \cup (2, +\infty) = \left(-\infty, \frac{10}{9}\right) \cup (2, +\infty)$.

53. $\frac{x-a}{x+a} > 0$ é equivalente a $\frac{(x-a)(x+a)}{(x+a)^2} > 0$ que é equivalente a $(x-a)(x+a) > 0$, isto é, $x^2 > a^2$ ou $|x| > |a|$.

55. $\frac{x-2}{x-4} > \frac{x+2}{x}$ é equivalente a $\frac{x-2}{x-4} - \frac{x+2}{x} > 0$, que por sua vez é equivalente a $\frac{x(x-2)-(x+2)(x-4)}{x(x-4)} > 0$ que é equivalente a $\frac{8}{x(x-4)} > 0$, que está satisfeita sempre que $x(x-4) > 0$. Resolvendo, temos $x < 0$ ou $x > 4$ que podemos escrever como $|x-2| > 2$.

57. Teorema 1.1.5: Se $a > b$ e $b > c$, então $a > c$.

Prova: $a > b$ implica $a - b > 0$ (1) (Definição 1.1.1)

$b > c$ implica $b - c > 0$ (2) (Definição 1.1.1)

De (1) e (2), por adição: $a - b + b - c > 0$; $a - c > 0$ (Teorema 1.1.4i)

Logo, $a > c$. (Definição 1.1.1)

59. Teorema 1.1.6(ii): Se $a > b$ e se c for qualquer número positivo então $ac > bc$.

Prova: $a > b$ implica $a - b > 0$ (Definição 1.1.1)

Como $c > 0$, $(a-b)c > 0$; $ac - bc > 0$ (Teorema 1.1.4ii)

Logo, $ac > bc$ (Definição 1.1.1)

Teorema 1.1.6(iii): Se $a > b$ e se c for qualquer número negativo então $ac < bc$.

Prova: $a > b$ implica $a - b > 0$ (Definição 1.1.1)

Como $-c > 0$, $(a-b)(-c) > 0$; $bc - ac > 0$ (Teorema 1.1.4ii)

Logo, $ac < bc$ (Definição 1.1.1)

61. Teorema 1.1.11: $|x| > a$ se e somente se $x > a$ ou $x < -a$, onde $a > 0$.

Parte 1: Se $x > a$ ou $x < -a$, então $|x| > a$.

Prova: *Caso 1:* $x \geq 0$. Assim, $|x| = x$. Como $x > a$, então $|x| > a$.

Caso 2: $x < 0$. Assim, $|x| = -x$. Como $x < -a$. então, do Teorema 1.1.7, $-x > a$. Logo, $|x| > a$.

Parte 2: Se $|x| > a$, então $x > a$ ou $x < -a$.

Prova: *Caso 1:* $x \geq 0$. Assim, $|x| = x$. Como $|x| > a$, então $x > a$.

Caso 2: $x < 0$. Assim, $|x| = -x$. Como $|x| > a$, então $-x > a$ ou, do Teorema 1.1.7, $x < -a$.

EXERCÍCIOS 1.2 Retas e Coordenadas

Nesta secção m_{AB} denota a inclinação do segmento **AB**, e M_{AB} denota seu ponto médio.

Nos Exercícios de 1 a 5, se $P = (a, b)$ então $Q = (a, -b)$, $R = (-a, b)$, $S = (-a, -b)$ e $T = (b, a)$.

1. $P(1, -2)$ (a) $Q(1, 2)$ (b) $R(-1, -2)$ (c) $S(-1, 2)$ (d) $T(-2, 1)$

3. $P(2, 2)$ (a) $Q(2, -2)$ (b) $R(-2, 2)$ (c) $S(-2, -2)$ (d) não se aplica

5. $P(-1, -3)$ (a) $Q(-1, 3)$ (b) $R(1, -3)$ (c) $S(1, 3)$ (d) $T(-3, -1)$

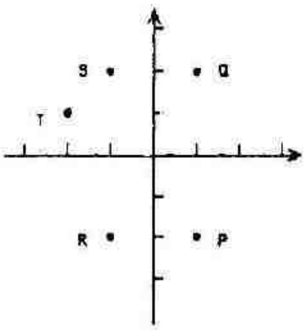


FIGURA 1.2-1

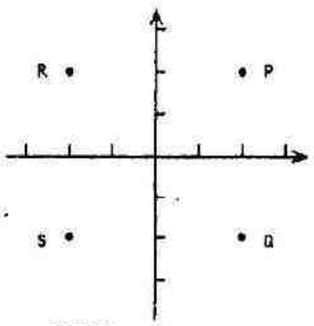


FIGURA 1.2-3

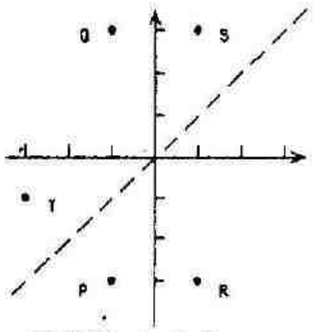


FIGURA 1.2-5

7. $A(-7, 2)$, $B(3, -4)$, $C(1, 4)$. $|\overline{AC}| = \sqrt{(4-2)^2 + (1+7)^2} = \sqrt{68}$; $|\overline{BC}| = \sqrt{(4+4)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{68}$

Como $|\overline{AC}| = |\overline{BC}|$, o triângulo é isósceles.

9. $A(2, 3)$, $B(3, -3)$, $C(-1, -1)$. O ponto médio do lado AB é $M_{AB} = \left(\frac{2+3}{2}, \frac{3-3}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$.

Seja $|\overline{M_{AB}C}|$ o comprimento da mediana, traçada a partir do vértice C. Então, pela fórmula da distância $|\overline{M_{AB}C}| = \sqrt{[\frac{5}{2} - (-1)]^2 + [0 - (-1)]^2} = \frac{1}{2}\sqrt{53}$. Do mesmo modo,

$$M_{BC} = \left(\frac{3-1}{2}, \frac{-3-1}{2}\right) = (1, -2), \quad |\overline{M_{BC}A}| = \sqrt{(1-2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{26}$$

$$M_{CA} = \left(\frac{2-1}{2}, \frac{3-1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad |\overline{M_{CA}B}| = \sqrt{(\tfrac{1}{2} - 3)^2 + (1+3)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{89}$$

11. $A(3, -6)$, $B(8, -2)$, $C(-1, -1)$. $|\overline{AB}| = \sqrt{(3-8)^2 + (-6+2)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$;

$|\overline{AC}| = \sqrt{(3+1)^2 + (-6+1)^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$; $|\overline{BC}| = \sqrt{(8+1)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{81+1} = \sqrt{82}$.

Logo, $|\overline{AB}|^2 + |\overline{AC}|^2 = |\overline{BC}|^2$. Assim, o triângulo é um triângulo retângulo.

Se a área do triângulo for K unidades quadradas, então, $K = \frac{1}{2}|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{41} \cdot \sqrt{41} = \frac{41}{2}$.

13. A(6, -13), B(-2, 2), C(13, 10), D(21, -5). Os lados do quadrilátero ABCD têm comprimentos iguais.

$|\overline{AB}| = \sqrt{(6+2)^2 + (-13-2)^2} = \sqrt{64+25} = \sqrt{289}$; $|\overline{AD}| = \sqrt{(6-21)^2 + (-13+5)^2} = \sqrt{225+64} = \sqrt{289}$

$|\overline{BC}| = \sqrt{(-2-13)^2 + (2-10)^2} = \sqrt{225+64} = \sqrt{289}$; $|\overline{DC}| = \sqrt{(21-13)^2 + (-5-10)^2} = \sqrt{64+225} = \sqrt{289}$

Uma diagonal do quadrilátero ABCD é BD e $|\overline{BD}| = \sqrt{(-2-21)^2 + (2+5)^2} = \sqrt{529+49} = \sqrt{578}$.

Como $|\overline{AB}|^2 + |\overline{AD}|^2 = |\overline{BD}|^2$, há um ângulo reto no vértice A. O quadrilátero ABCD tem lados com o mesmo comprimento e dois lados adjacentes, perpendiculares um ao outro. Assim, é um quadrado.

15. Seja A = (6, -2) e M = (-1, 5). Ache B = (x, y) de tal modo que o segmento de reta de A a B tenha M como ponto médio. Então, $\frac{6+x}{2} = -1$ e $\frac{-2+y}{2} = 5$; isto é, $x = -8$ e $y = 12$. Assim, B = (-8, 12).

17. Da Geometria, três pontos A, B, C estão numa reta se $|\overline{AB}| + |\overline{BC}| = |\overline{AC}|$. Seja A = (-3, 2), B = (1, -2), C = (9, -10). Mostraremos que esses pontos satisfazem a proposição acima.

Aplicando a fórmula da distância, temos $|\overline{AB}| = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$, $|\overline{BC}| = \sqrt{64+64} = 8\sqrt{2}$, e $|\overline{AC}| = \sqrt{144+144} = 12\sqrt{2}$. Assim, $|\overline{AB}| + |\overline{BC}| = 4\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 12\sqrt{2} = |\overline{AC}|$.

19. Seja A = (-4, 3), B = (0, 0), C = (x, y). Então, $|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{AC}|$, $|\overline{AB}| = 5$.

$|\overline{BC}|^2 = |\overline{AC}|^2$ dá $x^2 + y^2 = (x+4)^2 + (y-3)^2 = (x^2 + 8x + 16) + (y^2 - 6y + 9)$; $6y - 8x = 25$.

Substituindo $y = \frac{1}{6}(25 + 8x)$ na equação originada a partir de $|\overline{AB}|^2 = |\overline{BC}|^2$, temos

$25 = x^2 + \left(\frac{25+8x}{6}\right)^2 = \frac{36x^2 + (625 + 400x + 64x^2)}{36}$; $100x^2 + 400x - 275 = 0$; $x = -2 \pm \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Substituindo x na equação $y = \frac{1}{6}(25 + 8x)$ achamos $y = \frac{3}{2} \pm 2\sqrt{3}$.

Assim, há dois vértices possíveis: $\left(-2 + \frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2} + 2\sqrt{3}\right)$ e $\left(-2 - \frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2} - 2\sqrt{3}\right)$.

21. A(2, -3), B(-4, 3). $m_{AB} = \frac{3-(-3)}{-4-2} = \frac{6}{-6} = -1$

23. $A\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, $B\left(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3}\right)$. $m_{AB} = \dfrac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}{-\frac{5}{6} - \frac{1}{3}} = \frac{4-3}{-5-2} = -\frac{1}{7}$

25. $m = 4$, P = (2, -3). Usamos a forma ponto-inclinação: $y + 3 = 4(x - 2)$; $4x - y = 11$.

27. $m = -2$, P = (-3, 5). Usamos a forma ponto-inclinação: $y - 5 = -2(x + 3)$; $2x + y = -1$.

29. A(4, 6), B(0, -7). $m_{AB} = \frac{-7-6}{0-4} = \frac{13}{4}$. Usamos a forma ponto-inclinação: $y - 6 = \frac{13}{4}(x - 4)$; $13x - 4y = 28$.

31. Dividindo $y = mx + b$ por b obtemos a forma inclinação-intercepto $\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 1$, onde $A = -\frac{b}{m}$ e $B = \frac{1}{m}$.

O intercepto x é -3, logo $-3/A + 0 = 0$; $A = -3$. O intercepto y é 4 logo, $0 + 4/B = 1$; $B = 4$.

Assim, $x/(-3) + y/4 = 1$; $4x - 3y + 12 = 0$.

33. A reta dada tem a equação $2x - y - 2 = 0$, isto é, $y = 2x - 2$. A inclinação da reta dada é 2. Então, a inclinação da reta perpendicular é $-\frac{1}{2}$. Uma equação da reta que passa por $(-2, 3)$ e com a inclinação de $-\frac{1}{2}$ é $y - 3 = -\frac{1}{2}(x + 2)$ ou equivalentemente, $x + 2y = 4$.

35. Uma equação da reta paralela ao eixo x é da forma $y = b$. Como a reta passa por $(1, -7)$, sua equação é $y = -7$.

37. $P = (-2, -5)$, $m = \sqrt{3}$. Usamos a forma ponto-inclinação: $y - (-5) = \sqrt{3} - [x - (-2)]$ ou, equivalentemente, $\sqrt{3}\,x - y + (2\sqrt{3} - 5) = 0$.

39. (a) $x + 3y = 7$ ou $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$. Assim, a inclinação é $-\frac{1}{3}$.

(b) $2y + 9 = 0$ ou $y = -\frac{9}{2}$ é uma equação de uma reta paralela ao eixo x; sua inclinação é 0.

41. (a) Seja $A = (2,3)$, $B = (-4,-7)$ e $C = (5,8)$, $m_{AB} = \frac{-7-3}{-4-2} = \frac{5}{3}$ e $m_{AC} = \frac{8-3}{5-2} = \frac{5}{3}$.

A reta que passa por A e B e por A e C tem a mesma inclinação e o ponto comum A. Portanto, A, B, e C são colineares.

(b) Seja $A = (2,-1)$, $B = (1,1)$ e $C = (3,4)$. $m_{AB} = \frac{1+1}{1-2} = -2$ e $m_{AC} = \frac{4+1}{3-2} = 5$.

Como $m_{AB} \neq m_{AC}$, os pontos A, B e C não são colineares.

43. Uma equação (a) do eixo x é $y = 0$. (b) do eixo y é $x = 0$. (c) dos eixos x ou y é $xy = 0$.

45. As retas $3x + 5y + 7 = 0$; $y = -\frac{3}{5}x - \frac{7}{5}$ e $6x + 10y - 5 = 0$; $y = -\frac{3}{5}x + \frac{1}{2}$ têm a mesma inclinação $-\frac{3}{5}$. Portanto, são paralelas.

47. $2y - 3x = 4$ é equivalente a $y = \frac{3}{2}x + 2$.

(a) A reta perpendicular a ℓ tem inclinação de $-\frac{2}{3}$; sua equação é $y + 3 = -\frac{2}{3}(x - 1)$ ou, equivalentemente, $y = -\frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$.

(b) O ponto sobre ℓ que está mais próximo de P é o ponto onde ℓ intercepta a reta em (a). Assim, $\frac{3}{2}x + 2 = -\frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$; $(\frac{3}{2} + \frac{2}{3})x = -\frac{7}{3} - 2$. Então, $x = -\frac{13}{3} \cdot \frac{6}{13} = -2$, $y = \frac{3}{2}(-2) + 2 = -1$.

Logo, a menor distância é $\sqrt{[1 - (-2)]^2 + [-3 - (-1)]^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$.

49. Seja $A = (-4, -1)$, $B = (3, \frac{8}{3})$, $C = (8, -4)$, e $D = (2, -9)$. $m_{AD} = \frac{-9+1}{2+4} = -\frac{4}{3}$. $m_{BC} = \frac{-4 - \frac{8}{3}}{8 - 3} = -\frac{4}{3}$. Assim, AD é paralela a BC. Então, o quadrilátero é um trapezóide.

51. A(−5, 3), B(6, 8). Um ponto é $M = M_{AB} = \left(\frac{-5+6}{2}, \frac{3+8}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$. Os outros dois são

$N = M_{AM} = \left(\frac{1}{2}\left(-5+\frac{1}{2}\right), \frac{1}{2}\left(3+\frac{11}{2}\right)\right) = \left(-\frac{9}{4}, \frac{17}{4}\right)$ e $P = M_{MB} = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+6\right), \frac{1}{2}\left(\frac{11}{2}+8\right)\right) = \left(\frac{13}{4}, \frac{27}{4}\right)$.

53. Se $Ax + By + C = 0$, então $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Logo, (a) inclinação $= -\frac{A}{B}$; (b) intercepto $y = -\frac{C}{B}$; (c) intercepto $x = \frac{C}{B}\left(-\frac{B}{A}\right) = -\frac{C}{A}$; (d) a inclinação da reta perpendicular a e é $\frac{B}{A}$.

Portanto, sua equação é $y - 0 = \frac{B}{A}(x - 0)$; isto é $Bx - Ay = 0$.

55. A(3, −2), B(3, 4), C(−1, 1). Veja a Fig. 1.2.55. Seja $D = M_{AB} = \left(\frac{3+3}{2}, \frac{-2+4}{2}\right) = (3, 1)$. Seja

$E = M_{BC} = \left(\frac{3-1}{2}, \frac{4+1}{2}\right) = \left(1, \frac{5}{2}\right)$. Seja $F = M_{AC} = \left(\frac{3-1}{2}, \frac{-2+1}{2}\right) = \left(1, -\frac{1}{2}\right)$.

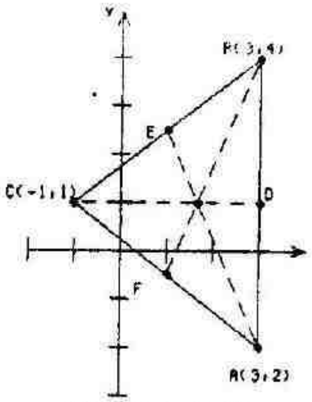


FIGURA 1.2.55

Equação de CD: $y = 1$ (1)

Equação de FB: $y - 4 = \frac{4 + \frac{1}{2}}{3 - 1}(x - 3)$ isto é, $9x - 4y = 11$ (2)

Equação de AE: $y + 2 = \frac{9/2}{1 - 3}(x - 3)$ isto é, $9x + 4y = 19$ (3)

Determinamos o ponto de intersecção das retas FB e AE resolvendo as equações (2) e (3) simultaneamente.

(2) + (3): $18x = 30$; $x = 5/3$ e (3) − (2): $8y = 8$; $y = 1$.

Logo, as retas FB e AE se interceptam no ponto $(5/3, 1)$.

Como este ponto está na reta CD, concluímos que as três medianas se encontram em um ponto.

Assim, as medianas do triângulo $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$ se encontram em um ponto

$\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)$.

57. Teorema. Se A e B não são nulos, então o gráfico de $Ax + By + C = 0$ é uma reta.

Prova: (i) Se $b \neq 0$ então $By = -Ax - C$; $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, uma reta da inclinação $-\frac{A}{B}$ e o intercepto y $-\frac{C}{B}$.

(ii) Se $B = 0$, então $A \neq 0$ e $Ax = -C$; $x = -\frac{C}{A}$, uma reta vertical.

59. Todas as retas têm equações da forma $2x + 3y - 5 + k(3x + 5y - 8) = 0$ (i), isto é, $(2 + 3k)x + (3 + 5k)y - 5 - 8k = 0$ (ii).

(a) Substituindo $(1, 3)$ por (x, y) em (i), temos $6 + 10k = 0$; $k = -\frac{3}{5}$; então, a reta tem a equação $x - 1 = 0$.

(b) Se a reta for paralela ao eixo x, de (ii) $2 + 3k = 0$; assim, $k = -\frac{2}{3}$ e a reta tem a equação $y - 1 = 0$.

(c) Se a reta tem inclinação -2, de(ii) $-\frac{2 + 3k}{3 + 5k} = -2$; assim, $k = -\frac{4}{9}$ e a reta tem a equação $2x + y - 3 = 0$.

61. Escolha eixos coordenados de modo que a origem esteja no vértice do retângulo e os eixos x e y estejam ao longo dos lados do retângulo. Veja a Fig. 1.2.61. Sejam os outros três vértices $A = (a, 0)$, $B = (0, b)$ e $C = (a, b)$. Se $E(x, y)$ for qualquer ponto, desejamos mostrar que

$$|\overline{EO}|^2 + |\overline{EC}|^2 = |\overline{EB}|^2 + |\overline{EA}|^2 \quad (1)$$

Como $|\overline{EO}|^2 + |\overline{EC}|^2 = x^2 + y^2 + (x - a)^2 + (y - b)^2$ e

$|\overline{EB}|^2 + |\overline{EA}|^2 = x^2 + (y - b)^2 + (x - a)^2 + y^2$ então (1) é verdadeira.

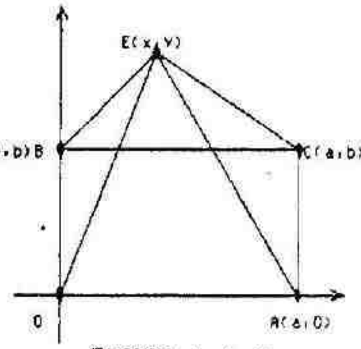


FIGURA 1.2.61

63. Sejam os vértices do quadrilátero $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ e $D = (d_1, d_2)$, cujos lados opostos AB e CD têm pontos médios M_{AB} e M_{CD}. Então,

$M_{AB} = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$ e $M_{CD} = \left(\frac{c_1 + d_1}{2}, \frac{c_2 + d_2}{2}\right)$. O ponto médio da reta M_{AB} e M_{CD} é $M = \left(\frac{a_1 + b_1 + c_1 + d_1}{4}, \frac{a_2 + b_2 + c_2 + d_2}{4}\right)$. É claro que se iniciarmos com os lados opostos AC e BD ou com as diagonais AD e BC, obteremos o mesmo ponto M.

65. Veja a Fig. 1.2.65.

Dado OABC é um paralelograma com as diagonais OC e AB. Prove que OC e AB se interceptam.

Prova: $M_{OC} = \left(\frac{a + d}{2}, \frac{b}{2}\right)$ e $M_{AB} = \left(\frac{a + d}{2}, \frac{b}{2}\right)$. Então, os pontos médios de OC e AB são os mesmos. Logo, OC e AB dividem-se ao meio.

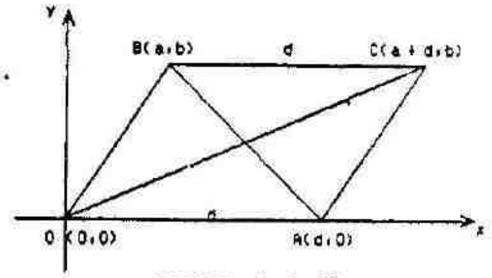


FIGURA 1.2.65

EXERCÍCIOS 1.3 Circunferências e Gráficos de Equações

1. $C(4,-3)$, $r = 5$. $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$; $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$

3. $C(5,-12)$, $r = 3$. $(x+5)^2 + (y+12)^2 = 9$; $x^2 + y^2 + 10x + 24y + 160 = 0$

5. O centro está em (1,2). Se r for o raio, então $r = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{3}$.

Portanto, uma equação da circunferência é

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 13$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 8 = 0$$

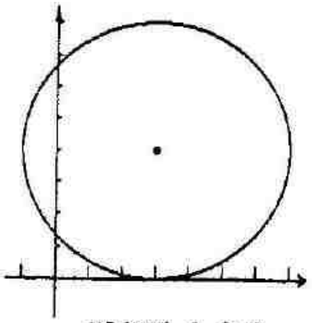


FIGURA 1.3-7

7.
$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$$

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 8y + 16) = -9 + 9 + 16$$

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$$

Assim, o centro está em (3,4), e r=4.

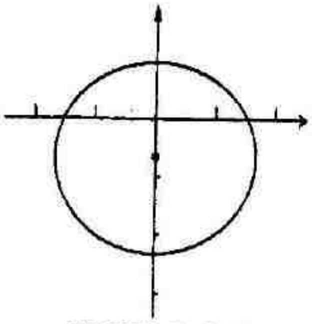


FIGURA 1.3-9

9.
$$3x^2 + 3y^2 + 4y - 7 = 0$$

$$x^2 + \left(y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}\right) = \frac{7}{3} + \frac{4}{9}$$

$$x^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$$

Assim, o centro está em $\left(0, -\frac{2}{3}\right)$ e $r = \frac{5}{3}$.

11.
$$x^2 + y^2 - 2x + 10y + 19 = 0$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 10y + 25) = -19 + 1 + 5$$

$$(x-1)^2 + (y+5)^2 = 7$$

O gráfico é uma circunferência.

13.
$$x^2 + y^2 - 10x + 6y + 36 = 0$$

$$(x^2 - 10x + 25) + (y^2 + 6y + 9) = -36 + 25 + 9$$

$$(x-5)^2 + (y+3)^2 = -2$$

O gráfico é o conjunto vazio.

15. $36x^2 + 36y^2 - 48x + 36y - 119 = 0$

$$36\left(x^2 - \frac{4}{3}x\right) + 36(y^2 + y) = 119$$

$$\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) + \left(y^2 + y + \frac{1}{4}\right) = \frac{119}{36} + \frac{4}{9} + \frac{1}{4}$$

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{136}{36}$$

O gráfico é uma circunferência.

Esboços dos gráficos dos Exercicios de 17 a 43 aparecem nas Figuras 1.3.17 a 1.3.43.

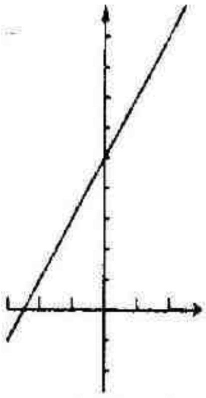


FIGURA 1.3.17

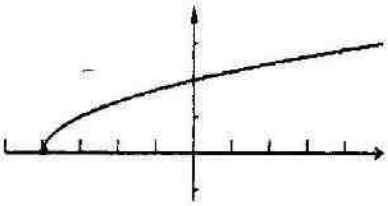


FIGURA 1.3.19

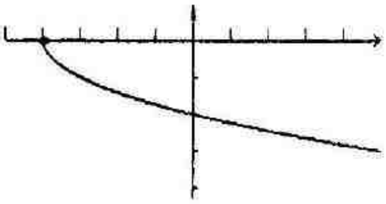


FIGURA 1.3.21

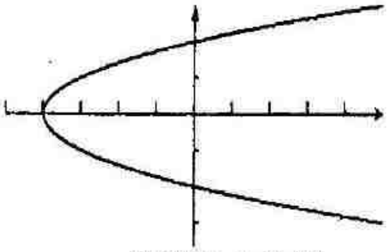


FIGURA 1.3.23

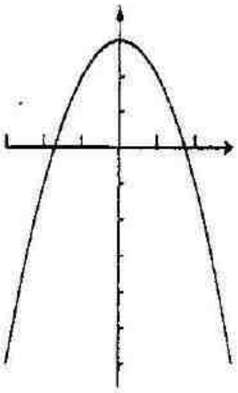


FIGURA 1.3.25

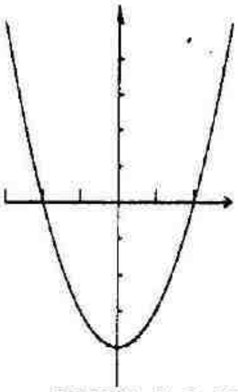


FIGURA 1.3.27

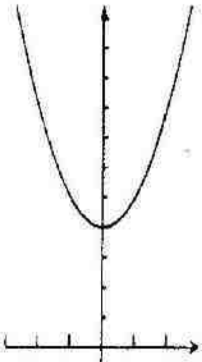


FIGURA 1.3.29

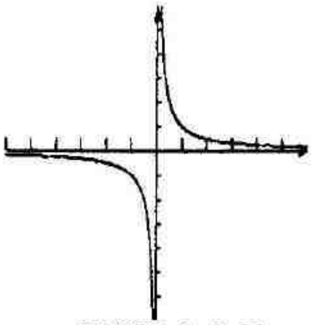


FIGURA 1.3.31

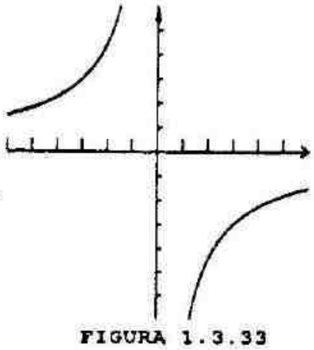


FIGURA 1.3.33

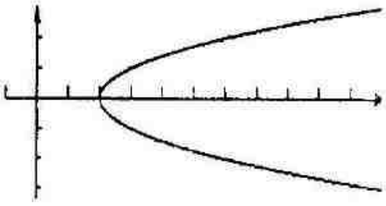


FIGURA 1.3.35

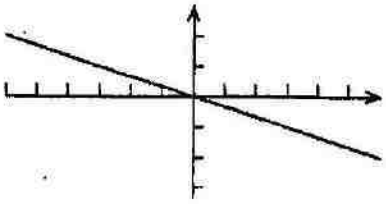


FIGURA 1.3.37 (a)

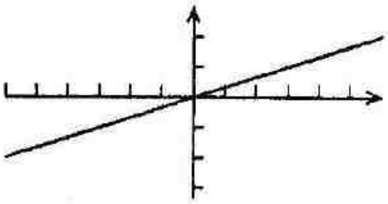


FIGURA 1.3.37 (b)

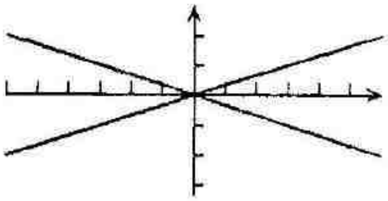


FIGURA 1.3.37 (c)

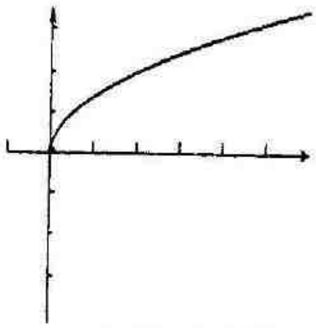


FIGURA 1.3-39(a)

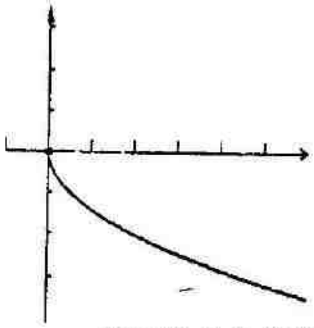


FIGURA 1.3-39(b)

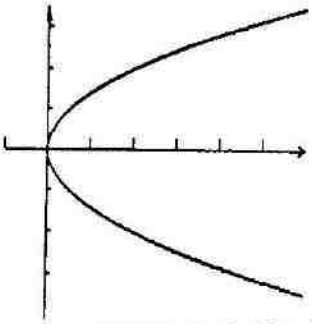


FIGURA 1.3-39(c)

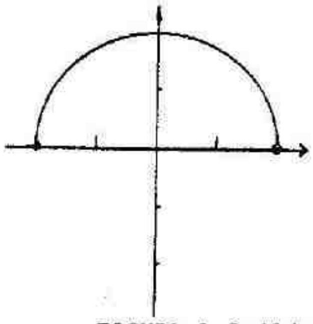


FIGURA 1.3-41(a)

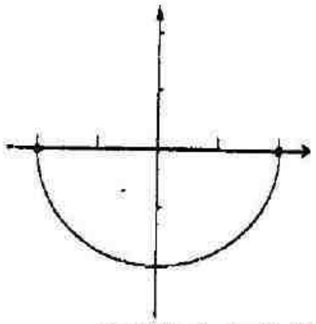


FIGURA 1.3-41(b)

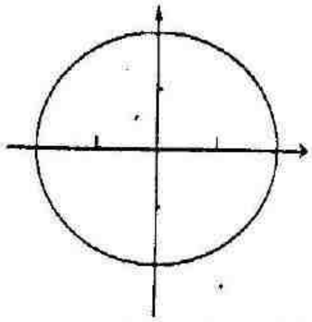


FIGURA 1.3-41(c)

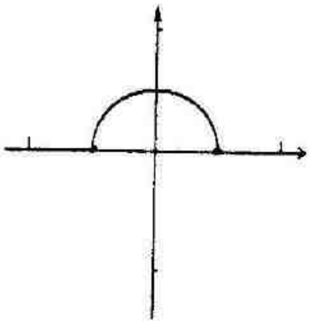


FIGURA 1.3-43(a)

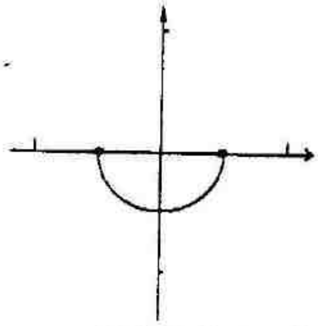


FIGURA 1.3-43(b)

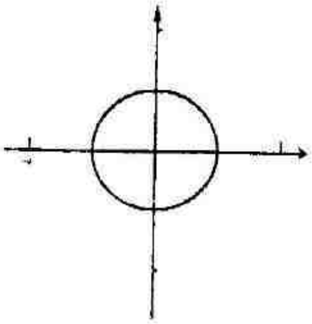


FIGURA 1.3-43(c)

45. Seja $C(-3,-5)$ o centro da circunferência. Seja $P(s,t)$ o ponto de intersecção entre a reta tangente e a circunferência dadas. Desejamos encontrar o raio da circunferência, o qual é $r = |\overline{PC}|$, logo $r^2 = |\overline{PC}|^2 = (s + 3)^2 + (r + 5)^2$. Como P está sobre a reta tangente, as coordenadas de P satisfazem a equação da reta tangente. Portanto,

$$12s + 5t = 4 \qquad (1)$$

Como a reta PC é perpendicular à reta tangente, a inclinação de PC é a recíproca negativa da reta tangente. A inclinação da reta tangente é $-\frac{12}{5}$. Portanto, a inclinação de PC é $\frac{5}{12}$, isto é,

$$\frac{t + 5}{s + 3} = \frac{5}{12} \qquad (2)$$

Há dois procedimentos.

Método 1: Coloque a equação (2) na forma $5s - 2t = 45$ e resolva simultaneamente com a equação (1) para obter $s = \frac{21}{13}$ e $t = -\frac{40}{13}$. Portanto,

$$r^2 = |\overline{PC}|^2 = \left(\frac{21}{13} + 3\right)^2 + \left(-\frac{40}{13} + 5\right)^2 = \left(\frac{60}{13}\right)^2 + \left(\frac{25}{13}\right)^2 = \frac{3600}{169} + \frac{625}{169} = \frac{4225}{169} = 25$$

Assim, a circunferência tem centro em $(-3, -5)$ e $r^2 = 25$. Uma equação da circunferência é, portanto, $(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 25$ ou, equivalentemente, $x^2 + y^2 + 6x + 10y + 9 = 0$.

Método 2: Da equação (1) temos $12(s + 3) + 5(t + 5) = 4 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 5$, isto é,

$$12(s + 3) + 5(t + 5) = 65 \qquad (3)$$

Da equação (2) obtemos

$$5(s + 3) - 12(t + 5) = 0 \qquad (4)$$

Elevando ao quadrado as equações (3) e (4) e somando-as, os produtos opostos cancelam-se e obtemos $169(s + 3)^2 + 169(t + 5)^2 = 65^2$

Logo, $r^2 = (s + 3)^2 + (t + 5)^2 = 65^2/169 = 25$. Uma equação da circunferência é, portanto, $(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 25$ ou, equivalentemente, $x^2 + y^2 + 6x + 10y + 9 = 0$.

47. Seja (h, k) o centro da circunferência. $(-1, 1)$ e $(3, 5)$ são pontos sobre a circunferência. Temos $(3 - h)^2 + (5 - k)^2 = r^2$ e $(-1 - h)^2 + (1 - k)^2 = r^2$. Além disso, a reta que passa por $(-1, 1)$ e (h, k) é perpendicular à reta dada $3x + y - 2 = 0$; portanto sua inclinação é $\frac{1}{3}$ e sua equação é $y - 1 = \frac{1}{3}(x + 1)$. As coordenadas do ponto (h, k) satisfazem essa equação e, portanto, $h = 3k - 4$. Substituindo por h, $(7 - 3k)^2 + (5 - k)^2 = (3 - 3k)^2 + (1 - k)^2$; $(49 - 42k + 9k^2) + (25 - 10k + k^2) = (9 - 18k + 9k^2) + (1 - 2k + k^2)$; $32k = 64$; $k = 2$. Assim, $h = 2$ e $r^2 = 10$. Uma equação da circunferência é, então, $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 10$.

49. Completando os quadrados para encontrar o centro da circunferência $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ temos $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$. O centro da circunferência está em $(2, -3)$. A reta que passa por $(5, 1)$ e $(2, -3)$ é perpendicular à tangente em $(5, 1)$. Essa reta tem inclinação $\frac{-1 - 3}{2 - 5} = \frac{4}{3}$. A inclinação da reta tangente é $-\frac{3}{4}$; ela tem a equação $y - 1 = -\frac{3}{4}(x - 5)$.

51. (a) Como o gráfico é simétrico em relação ao eixo x, então, pelo Teorema 1.3.6(i), a equação do gráfico permanecerá inalterada se y for substituído por -y.

(b) Como o gráfico é simétrico em relação ao eixo y, então, pelo Teorema 1.3.6(ii), a equação do gráfico permanecerá inalterada se x for substituído por -x.

Das afirmações (a) e (b) segue do teorema 1.3.6(iii) que o gráfico é simétrico em relação à origem.

53. Escolha as duas retas perpendiculares de simetria como eixos para um sistema de coordenadas. O resultado segue do Exercício 51.

EXERCÍCIOS 1.4 Funções

1. (a) $\{(x, y) \mid y = \sqrt{x - 4}\}$ é uma função; o domínio é $\{x \mid x \geq 4\}$, ou $[4, +\infty)$

(b) $\{(x, y) \mid y = \sqrt{x^2 - 4}\}$ é uma função; o domínio é $\{x \mid |x| \geq 2\}$, ou $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

(c) $\{(x, y) \mid \sqrt{4 - x^2}\}$ é uma função; o domínio é $\{x \mid |x| \leq 2\}$, ou $[-2, 2]$

(d) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$ não é uma função; contém $(0, 2)$ e $(0, -2)$

3. (a) $\{(x, y) \mid y = x^2\}$ é uma função; o domínio é $(-\infty, +\infty)$

(b) $\{(x, y) \mid x = y^2\}$ não é uma função; contém $(4, 2)$ e $(4, -2)$

(c) $\{(x, y) \mid y = x^3\}$ é uma função; o domínio é $(-\infty, +\infty)$

(d) $\{(x, y) \mid x = y^3\}$ é uma função; o domínio é $(-\infty, +\infty)$

5. $f(x) = 2x - 1$

(a) $f(3) = 2(3) - 1 = 5$

(b) $f(-2) = 2(-2) - 1 = -5$

(c) $f(0) = 2(0) - 1 = -1$

(d) $f(a + 1) = 2(a + 1) - 1 = 2a + 1$

(e) $f(x + 1) = 2(x + 1) - 1 = 2x + 1$

(f) $f(2x) = 2(2x) - 1 = 4x - 1$

(g) $2f(x) = 2(2x - 1) = 4x - 2$

(h) $f(x + h) = 2(x + h) - 1 = 2x + 2h - 1$

(i) $f(x) + f(h) = 2x - 1 + 2h - 1 = 2x + 2h - 2$

(j) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = \dfrac{(2x + 2h - 1) - (2x - 1)}{h} = \dfrac{2h}{h} = 2$

7. $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$

(a) $f(-2) = 2(-2)^2 + 5(-2) - 3 = -5$

(b) $f(-1) = 2(-1)^2 + 5(-1) - 3 = -6$

(c) $f(0) = -3$

(d) $f(3) = 2(3)^2 + 5(3) - 3 = 30$

(e) $f(h + 1) = 2(h + 1)^2 + 5(h + 1) - 3 = 2h^2 + 9h + 4$

(f) $f(2x^2) = 2(2x^2)^2 + 5(2x^2) - 3 = 8x^4 + 10x^2 - 3$

(g) $f(x^2 - 3) = 2(x^2 - 3)^2 + 5(x^2 - 3) - 3 = 2x^4 - 7x^2$

(h) $f(x + h) = 2(x + h)^2 + 5(x + h) - 3 = 2x^2 + 4xh + 2h^2 + 5x + 5h - 3$

(i) $f(x) + f(h) = 2x^2 + 5x - 3 + 2h^2 + 5h - 3 = 2x^2 + 2h^2 + 5x + 5h - 6$

(j) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = \dfrac{(2x^2 + 4xh + 2h^2 + 5x + 5h - 3) - (2x^2 + 5x - 3)}{h} = \dfrac{4xh + 2h^2 + 5h}{h} = 4x + 2h + 5$

9. $F(x) = \sqrt{2x+3}$

(a) $F(-1) = \sqrt{2(-1)+3} = 1$

(b) $F(4) = \sqrt{2(4)+3} = \sqrt{11}$

(c) $F(\frac{1}{2}) = \sqrt{2(\frac{1}{2})+3} = 2$

(d) $F(11) = \sqrt{2(11)+3} = 5$

(e) $F(2x+3) = \sqrt{2(2x+3)+3} = \sqrt{4x+9}$

(f) $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \dfrac{\sqrt{2x+2h+3}-\sqrt{2x+3}}{h} \cdot \dfrac{\sqrt{2x+2h+3}+\sqrt{2x+3}}{\sqrt{2x+2h+3}+\sqrt{2x+3}} = \dfrac{2}{\sqrt{2x+2h+3}+\sqrt{2x+3}}$

11. $f(x) = x-5$; $g(x) = x^2-1$. O domínio de f é $(-\infty, +\infty)$ e o domínio de g é $(-\infty, +\infty)$.

(a) $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = (x-5)+(x^2-1) = x^2+x-6$; domínio: $(-\infty, +\infty)$

(b) $(f-g)(x) = f(x)-g(x) = (x-5)-(x^2-1) = -x^2+x-4$; domínio: $(-\infty, +\infty)$

(c) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x-5)(x^2-1) = x^3-5x^2-x+5$; domínio: $(-\infty, +\infty)$

(d) $(f/g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x-5}{x^2-1}$; domínio: $\{x \mid x \neq -1, 1\}$

(e) $(g/f)(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{x^2-1}{x-5}$; domínio: $\{x \mid x \neq 5\}$

13. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$. O domínio de f é o conjunto de todos os números reais exceto 1, e o domínio de g é o conjunto de todos os números reais exceto 0.

(a) $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2+2x-1}{x^2-x}$; domínio: $\{x \mid x \neq 0, 1\}$

(b) $(f-g)(x) = f(x)-g(x) = \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{x^2+1}{x^2-x}$; domínio: $\{x \mid x \neq 0, 1\}$

(c) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \dfrac{x+1}{x-1} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{x+1}{x^2-x}$; domínio: $\{x \mid x \neq 0, 1\}$

(d) $(f/g)(x) = f(x)/g(x) = \dfrac{x+1}{x-1} \cdot \dfrac{x}{1} = \dfrac{x^2+x}{x-1}$; domínio: $\{x \mid x \neq 0, 1\}$

(e) $(g/f)(x) = g(x)/f(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{x-1}{x^2+x}$; domínio: $\{x \mid x \neq -1, 0, 1\}$

15. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2-1$. O domínio de f é $[0, +\infty)$, e o domínio de g é $(-\infty, +\infty)$.

(a) $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = \sqrt{x}+x^2-1$; domínio: $[0, +\infty)$

(b) $(f-g)(x) = f(x)-g(x) = \sqrt{x}-(x^2-1) = \sqrt{x}-x^2+1$; domínio: $[0, +\infty)$

(c) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x}(x^2-1)$; domínio: $[0, +\infty)$

(d) $(f/g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2-1}$; domínio: $[0, 1) \cup (1, +\infty)$

(e) $(g/f)(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}}$; domínio: $(0, +\infty)$

17. $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = 3x - 2$. O domínio de f é $(-\infty, +\infty)$ e o domínio de g é $(-\infty, +\infty)$.

(a) $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (x^2 + 1) + (3x - 2) = x^2 + 3x - 1$; domínio: $(-\infty, +\infty)$

(b) $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (x^2 + 1) - (3x - 2) = x^2 - 3x + 3$; domínio: $(-\infty, +\infty)$

(c) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^2 + 1)(3x - 2) = 3x^3 - 2x^2 + 3x - 2$; domínio: $(-\infty, +\infty)$

(d) $(f/g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2 + 1}{3x - 2}$; domínio: $\{x \mid x \neq 2/3\}$

(e) $(g/f)(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{3x - 2}{x^2 + 1}$; domínio: $(-\infty, +\infty)$

19. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$; $g(x) = \dfrac{x}{x - 2}$. O domínio de f é $\{x \mid x \neq -1\}$ e o domínio de g é $\{x \mid x \neq 2\}$.

(a) $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \dfrac{1}{x - 2} + \dfrac{x}{x - 2} = \dfrac{x^2 + 2x - 2}{(x + 1)(x - 2)}$; domínio: $\{x \mid x \neq -1,\ x \neq 2\}$

(b) $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \dfrac{1}{x + 1} - \dfrac{x}{x - 2} = \dfrac{-x^2 - 2}{(x + 1)(x - 2)}$; domínio: $\{x \mid x \neq -1,\ x \neq 2\}$

(c) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \dfrac{1}{x + 1} \cdot \dfrac{x}{x - 2} = \dfrac{x}{(x + 1)(x - 2)}$; domínio: $\{x \mid x \neq -1,\ x \neq 2\}$

(d) $(f/g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x}{x - 2} \cdot \dfrac{x - 2}{x} = \dfrac{x - 2}{x(x + 1)}$; domínio: $\{x \mid x \neq -1,\ x \neq 0,\ x \neq 2\}$

(e) $(g/f)(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{x}{x - 2} \cdot \dfrac{x + 1}{1} = \dfrac{x(x + 1)}{x - 2}$; domínio: $\{x \mid x \neq -1,\ x \neq 2\}$

21. $f(x) = x - 2$; $g(x) = x + 7$. O domínio de f é $(-\infty, +\infty)$ e o domínio de g é $(-\infty, +\infty)$.

(a) $(f \circ g)(x) = f(x + 7) = (x + 7) - 2 = x + 5$ (b) $(g \circ f)(x) = g(x - 2) = (x - 2) + 7 = x + 5$

(c) $(f \circ f)(x) = f(x - 2) = (x - 2) - 2 = x - 4$ (d) $(g \circ g)(x) = g(x + 7) = (x + 7) + 7 = x + 14$

O domínio de todas as funções resultantes é $(-\infty, +\infty)$.

23. $f(x) = x - 5$; $g(x) = x^2 - 1$. O domínio de f é $(-\infty, +\infty)$ e o domínio de g é $(-\infty, +\infty)$.

(a) $(f \circ g)(x) = f(x^2 - 1) = (x^2 - 1) - 5 = x^2 - 6$ (b) $(g \circ f)(x) = g(x - 5) = (x - 5)^2 - 1 = x^2 - 10x + 24$

(c) $(f \circ f)(x) = f(x - 5) = (x - 5) - 5 = x - 10$ (d) $(g \circ g)(x) = g(x^2 - 1) = (x^2 - 1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2$

O domínio de todas as funções resultantes é $(-\infty, +\infty)$.

25. $f(x) = \sqrt{x - 2}$; $g(x) = x^2 - 2$. O domínio de f é $[2, +\infty)$ e o domínio de g é $(-\infty, +\infty)$.

(a) $(f \circ g)(x) = f(x^2 - 2) = \sqrt{(x^2 - 2) - 2} = \sqrt{x^2 - 4}$; domínio: $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

(b) $(g \circ f)(x) = g(\sqrt{x - 2}) = (\sqrt{x - 2})^2 - 2 = x - 4$; domínio: $[2, +\infty)$

(c) $(f \circ f)(x) = f(\sqrt{x - 2}) = \sqrt{\sqrt{x - 2} - 2}$; domínio: $[6, +\infty)$ já que $\sqrt{x - 2} \geq 2$ implica $x - 2 \geq 4$

(d) $(g \circ g)(x) = g(x^2 - 2) = (x^2 - 2)^2 - 2 = x^4 - 4x^2 + 2$; domínio: $(-\infty, +\infty)$

27. $f(x) = \frac{1}{x}$; $g(x) = \sqrt{x}$. O domínio de f é $\{x \mid x \neq 0\}$ e o domínio de g é $[0, +\infty)$.

(a) $(f \circ g)(x) = f(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}}$; domínio: $(0, +\infty)$

(b) $(g \circ f)(x) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$; domínio: $(0, +\infty)$

(c) $(f \circ f)(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1/x} = x$; domínio: $\{x \mid x \neq 0\}$

(d) $(g \circ g)(x) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$; domínio: $[0, +\infty)$

29. $f(x) = |x|$; $g(x) = |x + 2|$. O domínio de f é $(-\infty, +\infty)$ e o domínio de g é $(-\infty, +\infty)$.

(a) $(f \circ g)(x) = f(|x + 2|) = ||x + 2|| = |x + 2|$ (b) $(g \circ f)(x) = g(|x|) = ||x| + 2| = |x| + 2$

(c) $(f \circ f)(x) = ||x|| = |x|$ (d) $(g \circ g)(x) = g(|x + 2|) = ||x + 2| + 2| = |x + 2| + 2$

O domínio de todas as funções resultantes é $(-\infty, +\infty)$.

31. $f(x) = 2x - 3$. O domínio é $(-\infty, +\infty)$.

(a) $f(x^2) = 2x^2 - 3$; domínio: $(-\infty, +\infty)$

(b) $f^2(x) = (2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$; domínio: $(-\infty, +\infty)$

(c) $(f \circ f)(x) = f(2x - 3) = 2(2x - 3) - 3 = 4x - 9$; domínio: $(-\infty, +\infty)$

33. $G(x) = |x - 2| - |x| + 2$

(a) Se x estiver em $[2, +\infty)$ então $|x - 2| = x - 2$ e $|x| = x$. Logo, $G(x) = (x - 2) - x + 2 = 0$.

(b) Se x estiver em $(-\infty, 0)$ então $|x - 2| = -(x - 2)$ e $|x| = -x$. Logo, $G(x) = -(x - 2) - (-x) + 2 = 4$.

(c) Se x estiver em $[0, 2)$ então $|x - 2| = -(x - 2)$ e $|x| = x$. Logo, $G(x) = -(x - 2) - x + 2 = 4 - 2x$.

35. $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(a) $f(1) = \frac{|1|}{1} = \frac{1}{1} = 1$ (b) $f(-1) = \frac{|-1|}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$

(c) $f(4) = \frac{|4|}{4} = \frac{4}{4} = 1$ (d) $f(-4) = \frac{|-4|}{-4} = \frac{4}{-4} = -1$

(e) Se $x = 0$, $f(-x) = f(0) = 1$; se $x > 0$, $f(-x) = \frac{|-x|}{-x} = \frac{x}{-x} = -1$; se $x < 0$, $f(-x) = \frac{|-x|}{-x} = \frac{-x}{-x} = 1$.

(f) Se $x + 1 = 0$; isto é, se $x = -1$, $f(x + 1) = 1$.

Se $x + 1 > 0$; isto é, se $x = -1$, $f(x + 1) = 1$.

Se $x + 1 < 0$; isto é, se $x < 1$, $f(x + 1) = \frac{|x + 1|}{x + 1} = \frac{-(x + 1)}{x + 1} = -1$.

(g) Se $x = 0$, $f(x^2) = 1$.

Se $x \neq 0$, $f(x^2) = \frac{|x^2|}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1$.

(h) Se $x = 0$, $f(-x^2) = 1$.

Se $x \neq 0$, $f(-x^2) = \frac{|-x^2|}{-x^2} = \frac{x^2}{-x^2} = -1$.

37. (a) $g(x) = 5x^2 - 4$; $g(-x) = 5(-x)^2 - 4 = 5x^2 - 4$. Como $g(-x) = g(x)$, g é par.

(b) $f(x) = x^3 + 1$; $f(-x) = (-x)^3 + 1 = -x^3 + 1$. Portanto, f não é nem par nem ímpar.

(c) $f(t) = 4t^5 + 3t^3 - 2t$; $f(-t) = 4(-t)^5 + 3(-t)^3 - 2(-t) = -4t^5 - 3t^3 + 2t =$

$-(4t^5 + 3t^3 - 2t) = -f(t)$. Portanto, f é ímpar.

(d) $g(r) = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$; $g(-r) = \frac{(-r)^2 - 1}{(-r)^2 + 1} = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1} = g(r)$. Portanto, g é par.

(e) $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x > 0 \\ -1 \text{ se } x < 0 \end{cases}$; $f(-x) = \begin{cases} 1 \text{ se } -x > 0 \\ -1 \text{ se } -x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 \text{ se } x < 0 \\ -1 \text{ se } x > 0 \end{cases} = -f(x)$. Logo, f é ímpar.

(f) $h(x) = \frac{4x^2 - 5}{2x^3 + x}$; $h(-x) = \frac{4(-x)^2 - 5}{2(-x)^3 + (-x)} = \frac{4x^2 - 5}{-2x^3 - x} = -\frac{4x^2 - 5}{2x^3 + x} = -h(x)$. Portanto, h é ímpar.

(g) $f(z) = (z - 1)^2 = z^2 - 2z + 1$; $f(-z) = (-z - 1)^2 = z^2 + 2z + 1$. Portanto, f não é nem par nem ímpar.

(h) $g(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1}$; $g(-x) = \frac{|-x|}{(-x)^2 + 1} = \frac{|x|}{x^2 + 1} = g(x)$. Portanto, g é par.

(i) $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$; $g(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1} = g(x)$. Portanto, g é par.

(j) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $f(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x} = -f(x)$. Portanto, f é ímpar.

39. (a) f e g pares. $(f\circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(g(x)) = (f\circ g)(x)$. Assim, fog é par.

(b) f e g ímpares. $(f\circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = -f(g(x)) = -(f\circ g)(x)$. Assim, fog é ímpar.

(c) f par, g ímpar. $(f\circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x)) = (f\circ g)(x)$. Assim, fog é par.

(d) f ímpar, g par. $(f\circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(g(x)) = (f\circ g)(x)$. Assim, fog é par.

41. $f(x) = \frac{1}{x + 1}$; $g(x) = \frac{1 - x}{x}$. $(f\circ g)(x) = f\left(\frac{1 - x}{x}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1 - x}{x}\right) + 1} = \frac{x}{1 - x + x} = \frac{x}{1} = x$;

$(g\circ f)(x) = g\left(\frac{1}{x + 1}\right) = \frac{1 - \left(\frac{1}{x + 1}\right)}{\frac{1}{x + 1}} = \frac{x + 1 - 1}{1} = x$. Portanto, f e g são funções inversas.

EXERCÍCIOS 1.5 Gráficos de Funções

1. $f(x) = 3x - 1$

Domínio: $(-\infty, +\infty)$

Imagem: $(-\infty, +\infty)$

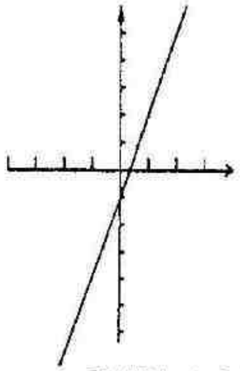


FIGURA 1.5-1

3. $F(x) = x^2 - 1$

Domínio: $(-\infty, +\infty)$

Imagem: $[-1, +\infty)$

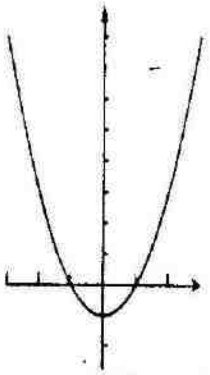


FIGURA 1.5-3

5. $g(x) = \sqrt{x + 1}$

Domínio: $x + 1 \geq 0$; $[-1, +\infty)$

Imagem: $[0, +\infty)$

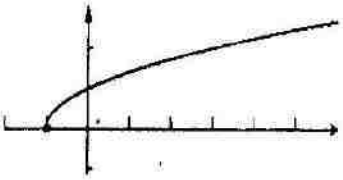


FIGURA 1.5-5

7. $f(x) = \sqrt{4 - 2x}$

Domínio: $4 - 2x \geq 0$; $(-\infty, 2]$

Imagem: $[0, +\infty)$

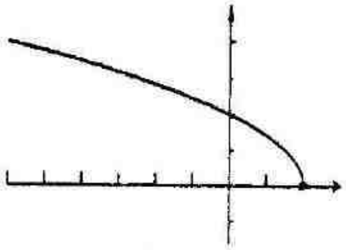


FIGURA 1.5-7

9. $h(x) = \sqrt{-x}$

Domínio: $-x \geq 0$; $(-\infty, 0]$

Imagem: $[0, +\infty)$

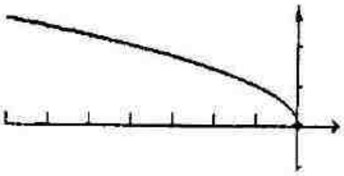


FIGURA 1.5-9

11. $f(x) = |4 - x|$

Domínio: $(-\infty, +\infty)$

Imagem: $[0, +\infty)$

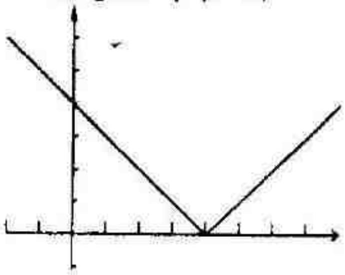


FIGURA 1.5-11

13. $F(x) = 4 - |x|$

Domínio: $(-\infty, +\infty)$

Imagem: $(-\infty, 4]$

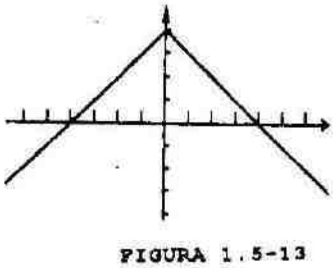


FIGURA 1.5-13

15. $g(x) = |x - 2| + 4$

Domínio: $(-\infty, +\infty)$

Imagem: $[4, +\infty)$

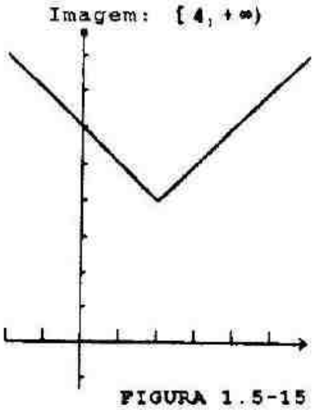


FIGURA 1.5-15

17. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = \dfrac{(x - 1)(x - 3)}{x - 1}$

Domínio: $\{x \mid x \neq 1\}$

Imagem: $\{y \mid y \neq -2\}$

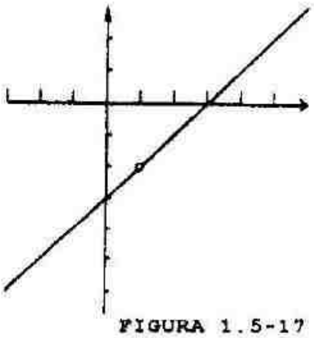


FIGURA 1.5-17

19. $G(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x \leq 3 \\ 2 & \text{se } 3 < x \end{cases}$. Domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $\{2, -2\}$

21. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x \neq 2 \\ 0 & \text{se } x = 2 \end{cases}$. Domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $\{y \mid y \neq 3\}$

23. $H(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x < 3 \\ 2x - 1 & \text{se } 3 \leq x \end{cases}$. Domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $[-4, +\infty)$

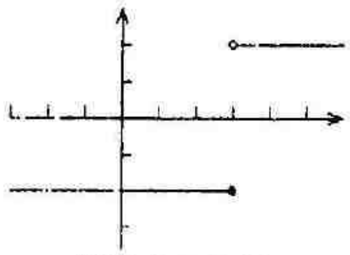


FIGURA 1.5-19

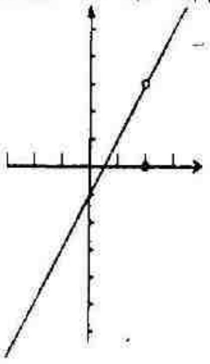


FIGURA 1.5-21

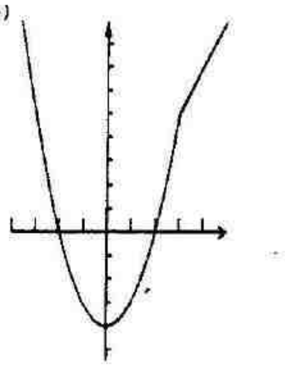


FIGURA 1.5-23

25. $f(x) = \begin{cases} x + 6 & \text{se } x \leq 4 \\ \sqrt{16 - x^2} & \text{se } -4 < x < 4 \\ 6 - x & \text{se } 4 \leq x \end{cases}$. Domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $(-\infty, 4]$

27. $F(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x^2 + 1 & \text{se } 0 < x \end{cases}$. Domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $(-\infty, -2) \cup \{0\} \cup (1, +\infty)$

29. $F(x) = \dfrac{(x+1)(x^2 + 3x - 10)}{x^2 + 6x + 5} = \dfrac{(x+1)(x+5)(x-2)}{(x+1)(x+5)} = x - 2$ se $x \neq -5$ e $x \neq -1$.

Domínio: $\{x \mid x \neq -5 \text{ e } x \neq -1\}$; imagem: $\{y \mid y \neq -7 \text{ e } y \neq -3\}$

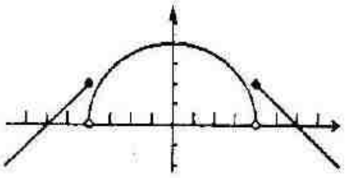


FIGURA 1.5-25

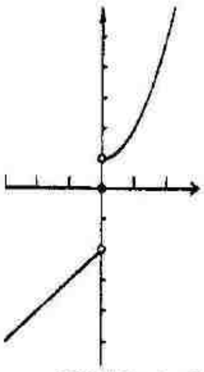


FIGURA 1.5-27

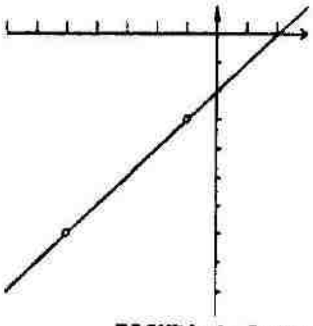


FIGURA 1.5-29

31. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 4} = \sqrt{(x+1)(x-4)}$

Domínio: todo x tal que $(x+1)(x-4) \geq 0$, isto é, $(-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$; imagem: $[0, +\infty)$

33. $g(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2} = \dfrac{x^2(x-2)}{x-2} = x^2$ se $x \neq 2$. Domínio: $\{x \mid x \neq 2\}$; imagem: $[0, +\infty)$

35. $h(x) = \dfrac{x^3 + 5x^2 - 6x - 30}{x + 5} = \dfrac{(x^2 - 6)(x + 5)}{x + 5} = x^2 - 6$ se $x \neq -5$. Domínio: $\{x \mid x \neq -5\}$; imagem: $[-6, +\infty)$

37. $f(x) = |x| + |x - 1| = \begin{cases} -x - (x-1) = -2x + 1 & \text{se } x < 0 \\ x - (x-1) = 1 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x + (x-1) = 2x - 1 & \text{se } 1 \leq x \end{cases}$ Domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $[1, +\infty)$

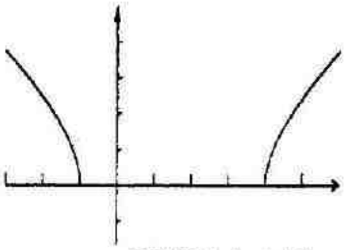


FIGURA 1.5-31

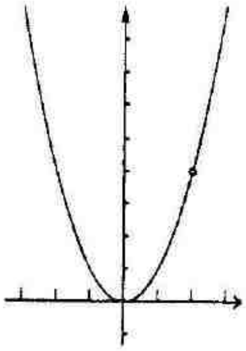


FIGURA 1.5-33

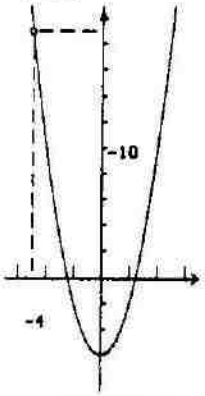


FIGURA 1.5-35

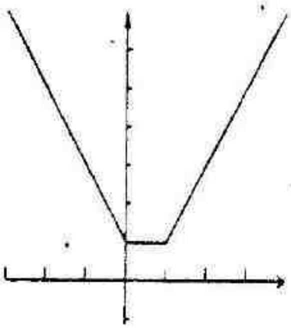


FIGURA 1.5-37

39. $g(x) = [\![x - 4]\!]$. Domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: (inteiros)

41. $G(x) = x - [\![x]\!]$. Domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $[0, 1)$

43. $g(x) = \dfrac{[\![x]\!]}{|x|}$. Domínio: $\{x \mid x \neq 0\}$; imagem: $(-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (\frac{1}{2}, 1)$

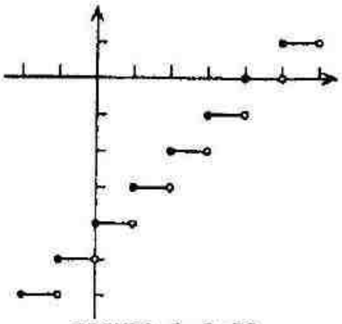


FIGURA 1.5-39

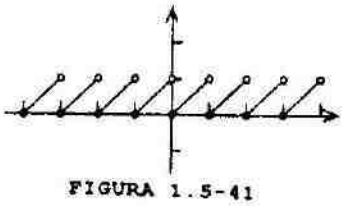


FIGURA 1.5-41

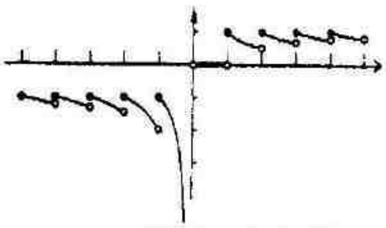


FIGURA 1.5-43

EXERCÍCIOS 1.6 As Funções Trigonométricas

1. $60° = 60 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{1}{3}\pi$ (b) $135° = 135 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{3}{4}\pi$ (c) $210° = 210 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{7}{6}\pi$

(d) $-150° = -150 \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{5}{6}\pi$ (e) $20° = 20 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{1}{9}\pi$ (f) $450° = 450 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5}{2}\pi$

(g) $-75° = -75 \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{5}{12}\pi$ (h) $100° = 100 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5}{9}\pi$

3. (a) $\frac{1}{4}\pi = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{180°}{\pi} = 45°$ (b) $\frac{2}{3}\pi = \frac{2\pi}{2} \cdot \frac{180°}{\pi} = 120°$ (c) $\frac{11}{6}\pi = \frac{11\pi}{6} \cdot \frac{180°}{\pi} = 330°$

(d) $-\frac{1}{2}\pi = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{180°}{\pi} = -90°$ (e) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 28°39'$ (f) $3\pi = 3\pi \cdot \frac{180°}{\pi} = 540°$

(g) $-2 = -2 \cdot \frac{180°}{\pi} \approx -114°36'$ (h) $\frac{1}{12}\pi = \frac{\pi}{12} \cdot \frac{180°}{\pi} = 15°$

5. (a) $\text{sen}\,\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$ (b) $\cos\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (c) $\text{sen}\left(-\frac{3}{2}\pi\right) = 1$ (d) $\cos\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$

7. (a) $\cos\frac{5}{6}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (b) $\text{sen}\,\frac{3}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (c) $\cos 3\pi = -1$ (d) $\text{sen}(-5\pi) = 0$

9. (a) $\text{tg}\,\frac{1}{3}\pi = \sqrt{3}$ (b) $\text{cotg}\,\frac{1}{4}\pi = 1$ (c) $\sec(-\pi) = -1$ (d) $\text{cosec}\,\frac{1}{2}\pi = 1$

11. (a) $\sec\left(-\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ (b) $\text{cosec}\,\frac{3}{4}\pi = \sqrt{2}$ (c) $\text{tg}\,\frac{5}{6}\pi = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (d) $\text{cotg}\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = 1$

Nota: As funções seno, co-seno, secante e co-secante têm período de 2π.

13. (a) $\text{sen}\,\frac{9}{4}\pi = \text{sen}\,\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (b) $\cos\frac{9}{4}\pi = \cos\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

(c) $\sec\frac{9}{4}\pi = \sec\frac{1}{4}\pi = \sqrt{2}$ (d) $\text{cosec}\,\frac{9}{4}\pi = \text{cosec}\,\frac{1}{4}\pi = \sqrt{2}$

15. (a) $\text{sen}\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \text{sen}\,\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (b) $\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \cos\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2}$

(c) $\sec\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \sec\frac{4}{3}\pi = -2$ (d) $\text{cosec}\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \text{cosec}\,\frac{4}{3}\pi = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$

17. (a) $\text{sen}\,8\pi = \text{sen}\,0 = 0$ (b) $\cos 10\pi = \cos 0 = 1$

(c) $\sec 7\pi = \sec\pi = -1$ (d) $\text{cosec}\,9\pi = \text{cosec}\,\pi$, indefinida

19. (a) $\text{sen}\left(-\frac{7}{2}\pi\right) = \text{sen}\,\frac{1}{2}\pi = 1$ (b) $\cos\left(-\frac{5}{2}\pi\right) = \cos\frac{1}{2}\pi = 0$

(c) $\sec\left(-\frac{11}{2}\pi\right) = \sec\frac{1}{2}\pi$, indefinida (d) $\text{cosec}\left(-\frac{9}{2}\pi\right) = \text{cosec}\,\frac{1}{2}\pi = 1$

Nota: As funções tangente e co-tangente têm período π.

21. (a) $\text{tg}\,\frac{7}{4}\pi = \text{tg}\,\frac{3}{4}\pi = -1$

(b) $\text{cotg}\,\frac{7}{4}\pi = \text{cotg}\,\frac{3}{4}\pi = -1$

(c) $\text{tg}\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = \text{tg}\,\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

(d) $\text{cotg}\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = \text{cotg}\,\frac{1}{6}\pi = \sqrt{3}$

23. (a) $\text{tg}\,\frac{11}{3}\pi = \text{tg}\,\frac{2}{3}\pi = -\sqrt{3}$

(b) $\text{cotg}\,\frac{11}{3}\pi = \text{cotg}\,\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

(c) $\text{tg}\,(-5\pi) = \text{tg}\,0 = 0$

(d) $\text{cotg}\left(-\frac{9}{2}\pi\right) = \text{cotg}\,\frac{1}{2}\pi = 0$

25. (a) $\text{sen}\,t = 1;\ t = \frac{1}{2}\pi$

(b) $\cos t = -1;\ t = \pi$

(c) $\text{tg}\,t = 1;\ t = \frac{1}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$

(d) $\sec t = 1;\ t = 0$

27. (a) $\text{sen}\,t = 0;\ t = 0,\ \pi$

(b) $\cos t = 0;\ t = \frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$

(c) $\text{tg}\,t = 0;\ t = 0,\ \pi$

(d) $\text{cotg}\,t = 0;\ t = \frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$

29. (a) $\text{sen}\,t = -\frac{1}{2};\ t = \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

(b) $\cos t = \frac{1}{2};\ t = \frac{1}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

(c) $\cos t = -1;\ t = \frac{3}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$

(d) $\text{cosec}\,t = 2;\ t = \frac{1}{6}\pi,\ \frac{5}{6}\pi$

31. (a) $\text{tg}\,t = \dfrac{\text{sen}\,t}{\cos t}$ é indefinida quando $\cos t = 0$. Isso acontece para $t = \frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$.

(b) $\text{cosec}\,t = \dfrac{1}{\text{sen}\,t}$ é indefinida quando $\text{sen}\,t = 0$. Isso acontece para $t = 0,\ \pi$.

33. (a) $\text{cotg}\,\pi$ é indefinida.

(b) $\sec\frac{3}{2}\pi$ é indefinida.

35. (a) $$\text{tg}\,\theta = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + (1)\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5}$$

(b) $$\text{tg}\,\theta = \frac{-\frac{5}{3} - 4}{1 + \left(-\frac{5}{3}\right)(4)} = \frac{-\frac{17}{3}}{-\frac{17}{3}} = 1$$

37. (a) $$\text{tg}\,\theta = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{2}{3}}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{-\frac{7}{6}}{\frac{4}{6}} = -\frac{7}{4}$$

(b) $$\text{tg}\,\theta = \frac{-\frac{5}{4} - \left(-\frac{7}{5}\right)}{1 + \left(-\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{7}{5}\right)} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{55}{20}} = \frac{3}{55}$$

39. (a) $$\text{tg}\,\theta = \frac{-\frac{7}{9} - 5}{1 + \left(-\frac{7}{9}\right)(5)} = 2$$

(b) $$\text{tg}\,\theta = \frac{-\frac{3}{4} - \left(-\frac{3}{2}\right)}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{6}{17}$$

Assim, $\theta = 63°$, com aproximação de um grau. Assim, $\theta = 19°$, com aproximação de um grau.

41. As retas dadas tornam-se: ℓ_1: $y = -2x + 6$; ℓ_2: $y = 3x - 4$; e

ℓ_3: $y = -\frac{3}{4}x - 2$, respectivamente. Sejam $m_1 = -2$, $m_2 = 3$, $m_3 = -\frac{3}{4}$

as inclinações das retas, com θ_1, θ_2, θ_3 denotando os

ângulos opostos às retas correspondentes.

Veja a Fig. 1.6.41.

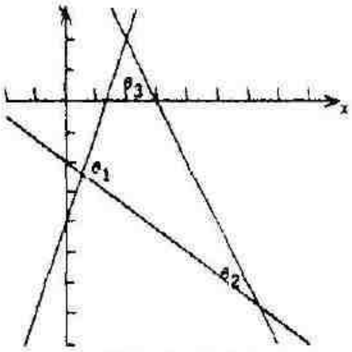


FIGURA 1.6-41

$$\text{tg}\,\theta_3 = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{(-2) - 3}{1 + (-2)3} = 1, \text{ assim } \theta_3 = 45°.$$

$$\text{tg}\,\theta_2 = \frac{m_3 - m_1}{1 + m_3 m_1} = \frac{-\frac{3}{4} - (-2)}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)(-2)} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{10}{4}} = \frac{1}{2}, \text{ assim } \theta_3 \approx 27°.$$

$$\text{tg}(180 - \theta_1) = \frac{m_3 - m_2}{1 + m_3 m_2} = \frac{-\frac{3}{4} - 3}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)(3)} = 3, \text{ assim } (180 - \theta_1) \approx 72° \text{ e } \theta_1 \approx 108°.$$

Verifique: $45° + 27° + 108° = 180°$

43. A equação $2x + y = 5$ é equivalente a $y = -2x + 5$; seja $m_1 = -2$. Tomemos m_2 para denotar a inclinação da reta que passa por $(-1, 4)$. Se as duas retas formam um ângulo de $\frac{1}{4}\pi$, então ou

(i) $\text{tg}\,\frac{1}{4}\pi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$; $1 = \frac{-2 - m_2}{1 - 2m_2}$; $1 - 2m_2 = -2 - m_2$; $m_2 = 3$; ou

(ii) $\text{tg}\,\frac{1}{4}\pi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$; $1 = \frac{m_2 + 2}{1 - 2m_2}$; $1 - 2m_2 = m_2 + 2$; $3m_2 = -1$; $m_2 = -\frac{1}{3}$

Assim, as equações das retas são $y - 4 = 3(x + 1)$ e $y - 4 = -\frac{1}{3}(x + 1)$.

45. (a) $f(x) = \text{sen}\,x$, $g(x) = 3x$. $(f \circ g)(x) = \text{sen}\,3x$, domínio: $(-\infty, +\infty)$

(b) $f(x) = \text{tg}\,x$, $g(x) = \frac{x}{2}$. $(f \circ g)(x) = \text{tg}\,\frac{x}{2}$, domínio: $\{x \mid x \neq (2k + 1)\pi\}$ (k é qualquer inteiro)

47. (a) $f(x) = \text{cotg}\,x$, $g(x) = \frac{1}{x}$. $(f \circ g)(x) = \text{cotg}\,\frac{1}{x}$, domínio: $\left\{x \mid x \neq 0 \text{ e } x \neq \frac{1}{k\pi}\right\}$ (k é qualquer inteiro)

(b) $f(x) = \sec\frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x - \pi}$. $(f \circ g)(x) = \sec(x - \pi)$ domínio: $\{x \mid x \neq \pi,\ x \neq (k + \frac{1}{2})\pi\}$ (k é um inteiro)

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 1

1. $3x - 7 \leq 5x - 17$; $10 \leq 2x$; $5 \leq x$; $[5, +\infty)$

3. $\frac{x}{x - 1} > \frac{1}{4}$

   Caso 1: $x - 1 > 0$, logo, $x > 1$. Então, $4x > x - 1$; $x > -\frac{1}{3}$. Assim, $x > 1$ e $x > -\frac{1}{3}$. Portanto $x > 1$.

   Caso 2: $x - 1 < 0$, logo, $x < 1$. Então, $4x < x - 1$; $x < -\frac{1}{3}$. Assim, $x < 1$ e $x < -\frac{1}{3}$. Portanto $x < -\frac{1}{3}$.

   Portanto, o conjunto-solução é $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (1, +\infty)$.

5. $2x^2 + x < 3$; isto é, $2x^2 + x - 3 < 0$; $(2x + 3)(x - 1) < 0$.

   Caso 1: $2x + 3 > 0$ e $x - 1 < 0$. Então, $x > -\frac{3}{2}$ e $x < 1$; logo, $-\frac{3}{2} < x < 1$.

   Caso 2: $2x + 3 > 0$ e $x - 1 > 0$. Então, $x < -\frac{3}{2}$ e $x > 1$. Não existem tais valores de x. Portanto, o conjunto-solução é $(-\frac{3}{2}, 1)$.

7. A desigualdade $|3 + 4x| \leq 9$ é equivalente a $-9 \leq 3 + 4x \leq 9$; $-12 \leq 4x \leq 6$; $-3 \leq x \leq \frac{3}{2}$. Assim, o conjunto-solução é $[-3, \frac{3}{2}]$.

9. $|4 - 3x| < 8$; $-8 < 4 - 3x < 8$; $-12 < -3x < 4$; $-\frac{4}{3} < x < 4$. Logo, $(-\frac{4}{3}, 4)$.

11. $|2x + 7| > 5$; $2x + 7 > 5$ ou $2x + 7 < -5$; $x > -1$ ou $x < -6$. Logo, $(-\infty, -6) \cup (-1, +\infty)$.

13. $|3 - 4x| = 15$; $3 - 4x = 15$ ou $3 - 4x = -15$; $x = -3$ ou $x = \frac{9}{2}$. Logo, $(-3, \frac{9}{2})$.

15. $|3x - 4| = |6 - 2x|$; $3x - 4 = 6 - 2x$ ou $3x - 4 = -(6 - 2x)$; $x = 2$ ou $x = -2$. Logo, $(-2, 2)$.

17. Seja P o ponto $(x, 4)$ e A o ponto $(5, -2)$ de modo que $|\overline{PA}| = \sqrt{117}$. Então,
    $\sqrt{(x - 5)^2 + (4 + 2)^2} = \sqrt{117}$; $x^2 - 10x + 25 + 36 = 117$; $x^2 - 10x - 56 = 0$; $x = 14$ e $x = -4$

19. Seja $A = (-3, 4)$ e $P = (x, y)$ de modo que $|\overline{PA}| = 10$. Então,
    $\sqrt{(x + 3)^2 + (y - 4)^2} = 10$; $x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 100$; $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 75 = 0$

21. $y^2 = x - 4$

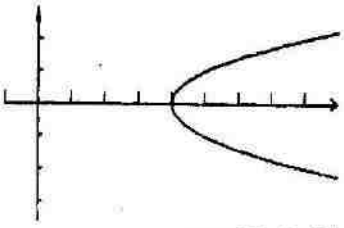


FIGURA 1-21

23. $y = x^2 - 4$

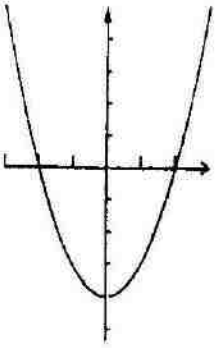


FIGURA 1-23

25. $y = \sqrt{16 - x^2}$

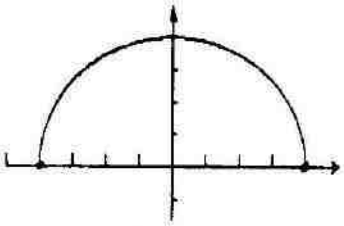


FIGURA 1-25

27. Seja $A = (1, 2)$, $B = (5, -1)$, $C = (11, 7)$, e $D = (7, 10)$.

$m_{AB} = \frac{-1-2}{5-1} = -\frac{3}{4}$; $m_{AD} = \frac{10-2}{7-1} = \frac{4}{3}$; $m_{BC} = \frac{7+1}{11-5} = \frac{4}{3}$; $m_{CD} = \frac{10-7}{7-11} = -\frac{3}{4}$

Como $m_{AB} = m_{CD}$, o lado AB é paralelo ao lado CD.

Como $m_{AD} = m_{BC}$, o lado AD é paralelo ao lado BC.

Como $m_{AB} \cdot m_{AD} = -1$, o lado AB é perpendicular ao lado AD.

Portanto, ABCD é um quadrilátero com lados paralelos opostos e um par de lados adjacentes perpendiculares. Assim, ABCD é um retângulo.

29. Seja $A = (2, 4)$, $B = (1, -4)$, e $C = (5, -2)$.

$m_{AB} = \frac{-4-4}{1-2} = 8$; $m_{AC} = \frac{-2-4}{5-2} = -2$; $m_{BC} = \frac{-2+4}{5-1} = \frac{1}{2}$

Como $m_{AC} \cdot m_{BC} = -1$, o lado AC é perpendicular ao lado BC. Portanto, o triângulo ABC é um triângulo reto. O número de unidades quadradas da área do triângulo é

$\frac{1}{2}|\overline{AC}| \cdot |\overline{BC}| = \frac{1}{2}\sqrt{(2-5)^2 + (4+2)^2} \cdot \sqrt{(1-5)^2 + (-4+2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{9+36} \cdot \sqrt{16+4} = \frac{1}{2}\sqrt{45} \cdot \sqrt{20} = \frac{1}{2}\sqrt{900} = 15$

31. Seja $C(p, q)$ o vértice diagonalmente oposto $A(2, 3)$ e seja $D(r, s)$ oposto a $B(-3, 4)$.

Então, $M_{AC} = (0, -1)$, isto é, $(0, -1) = \left(\frac{p+2}{2}, \frac{q+3}{2}\right)$; $0 = \frac{p+2}{2}$, $-1 = \frac{q+3}{2}$; $p = -2$, $q = -5$.

Também, $M_{BD} = (0, -1)$, isto é, $(0, -1) = \left(\frac{r-3}{2}, \frac{s+4}{2}\right)$; $0 = \frac{r-3}{2}$, $-1 = \frac{2}{s+4}$; $r = 3$, $s = -6$.

Assim, os outros dois vértices são $(-2, 5)$ e $(3, -6)$.

33. Seja $A = (2, 13)$, $B = (-2, 5)$, $C = (3, -1)$, e $D = (7, 7)$.

$m_{BA} = \frac{5-13}{-2-2} = 2$; $m_{CD} = \frac{7+1}{7-3} = 2$; $m_{DA} = \frac{7-13}{7-2} = -\frac{6}{5}$; $m_{CB} = \frac{-1-5}{3+2} = -\frac{6}{5}$

Como $m_{BA} = m_{CD}$, o lado BA é paralelo ao lado CD.

Como $m_{DA} = m_{CB}$, o lado DA é paralelo ao lado CB.

Como os lados opostos são paralelos, o quadrilátero é um paralelogramo.

35. Sejam $A = (-3, 2)$ e $B = (5, 6)$. Se r for o raio da circunferência, então $r = \frac{1}{2}|\overline{AB}|$.

Portanto, $r = \frac{1}{2}\sqrt{(5+3)^2 + (6-2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{64+16} = \frac{1}{2}\sqrt{80} = \sqrt{20}$.

O centro da circunferência é o ponto médio do segmento de reta AB. Assim, o centro está em $\left(\frac{5-3}{2}, \frac{6+2}{2}\right) = (1, 4)$. Logo, uma equação da circunferência é

$(x-1)^2 + (y-4)^2 = (\sqrt{20})^2$ ou, equivalentemente, $x^2 + y^2 - 2x - 8y - 3 = 0$.

37. $4x^2 + 4y^2 - 12x + 8y + 9 = 0$; $4(x^2 - 3x + \frac{9}{4}) + 4(y^2 + 2y + 1) = -9 + 4 \cdot \frac{9}{4} + 4 \cdot 1$

$4(x - \frac{3}{2})^2 + 4(y+1)^2 = 4$; $(x - \frac{3}{2})^2 + (y+1)^2 = 1$. O centro está em $(\frac{3}{2}, -1)$ e $r = 1$.

39. $P(-1, 6)$, $m = 3$. Usamos a forma ponto-inclinação para uma equação da reta $y - 6 = 3(x + 1)$.

41. A reta dada tem a equação $2x - 5y = 1$ ou $y = \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}$; assim, sua inclinação é $\frac{2}{5}$. A reta pedida é perpendicular a ela; logo, sua inclinação é $-\frac{5}{2}$. Como ela passa pelo ponto $(5, -3)$ sua equação é $y + 3 = -\frac{5}{2}(x - 5)$ ou $5x + 2y = 19$.

43. Achamos os vértices do triângulo, resolvendo simultaneamente os 3 pares de equações $x - 3y + 2 = 0$ e $3x - 2y + 6$; $2x + y - 3 = 0$ e $x - 3y + 2 = 0$; $2x + y - 3 = 0$ e $3x - 2y + 6 = 0$. Encontramos $(-2, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 3)$. Esses pontos determinam a circunferência. Da equação geral $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, resolvemos simultaneamente $4 + 0 - 2D + F = 0$, $1 + 1 + D + F = 0$, $0 + 9 + 3E + F = 0$. $D = \frac{11}{7}$, $E = -\frac{19}{7}$, $F = -\frac{6}{7}$.

Uma equação é, então, $x^2 + y^2 + \frac{11}{7}x - \frac{19}{7}y - \frac{6}{7} = 0 \iff 7x^2 + 7y^2 + 11x - 19y - 6 = 0$.

45. As retas que passam pela intersecção das duas retas dadas têm as equações

$$(5x + 6y - 4) + k(x - 3y + 2) = 0; \quad (5 + k)x + (6 - 3k)y + (-4 + 2k) = 0; \quad y = \frac{5 + k}{3k - 6}x + \frac{-4 + 2k}{3k - 6}$$

A terceira reta dada tem a equação $x - 4y - 20 = 0$ ou $y = \frac{1}{4}x - 5$; Assim, sua inclinação é $\frac{1}{4}$. A reta pedida é perpendicular à terceira reta dada; assim, sua inclinação é -4. A inclinação da reta pedida também é $\frac{5 + k}{3k - 6}$. Assim,

$$\frac{5 + k}{3k - 6} = -4; \quad 5 + k = -12k + 24; \quad 13k = 19; \quad k = \frac{19}{13}$$

Substituindo esse valor de k na primeira equação, obtemos

$$(5x + 6y - 4) + \frac{19}{13}(x - 3y + 2) = 0; \quad (65x + 78y - 52) + (19x - 57y + 38) = 0; \quad 84x + 21y - 14 = 0$$

isto é, $12x + 3y - 2 = 0$.

47. As duas equações dadas são $x^2 + y^2 = k$ e $x + y = k$. Os gráficos se interceptarão se as duas equações simultâneas tiverem soluções reais. Substituindo o valor de y da segunda equação na primeira, obtemos

$$x^2 + (k - x)^2 = k^2; \quad x^2 + k^2 - 2kx + x^2 = k; \quad 2x^2 - 2kx + (k^2 - k) = 0$$

Essa equação terá soluções reais se a discriminante não for negativa; isto é, se

$$(-2k)^2 - 4(2)(k^2 - k) \geq 0; \quad 4k^2 - 8k^2 + 8k \geq 0; \quad -k^2 + 2k \geq 0; \quad k(2 - k) \geq 0; \quad 0 \leq k \leq 2$$

49. $f(x) = 3x^2 - x + 5$

(a) $f(-3) = 3(-3)^2 - (-3) + 5 = 35$

(b) $f(-x^2) = 3(-x^2)^2 - (-x^2) + 5 = 3x^4 + x^2 + 5$

(c) $$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{[3(x + h)^2 + (x + h) + 5] - (3x^2 - x + 5)}{h}$$

$$= \frac{(3x^2 + 6xh + 3h^2 - x - h + 5) - (3x^2 - x + 5)}{h} = \frac{6xh + 3h^2 - h}{h} = 6x + 3h - 1$$

51. (a) $f(x) = 2x^3 - 3x$; $f(-x) = 2(-x)^3 - 3(-x) = -2x^3 + 3x = -f(x)$. Portanto, f é ímpar.

(b) $g(x) = 5x^4 + 2x^2 - 1$; $g(-x) = 5(-x)^4 + 2(-x)^2 - 1 = 5x^4 + 2x^2 - 1 = 5x^4 + 2x^2 - 1 = g(x)$.

Portanto, g é par.

(c) $h(x) = 3x^5 - 2x^3 + x^2 - x$; $h(-x) = 3(-x)^5 - 2(-x)^3 + (-x)^2 - (-x) = -3x^5 + 2x^3 + x^2 + x$.

Portanto, h não é nem par nem ímpar.

(d) $F(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3-x}$; $F(-x) = \dfrac{(-x)^2+1}{(-x)^3-(-x)} = \dfrac{x^2+1}{-x^3+x} = -\dfrac{x^2+1}{x^3-x} = -F(x)$. Portanto, F é ímpar.

53. $f(x) = x^2 - 4$; $g(x) = 4x - 3$. O domínio de f é $(-\infty, +\infty)$ e o domínio de g é $(-\infty, +\infty)$.

(a) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (x^2 - 4) + (4x - 3) = x^2 + 4x - 7$; domínio: $(-\infty, +\infty)$

(b) $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (x^2 - 4) - (4x - 3) = x^2 - 4x - 1$; domínio: $(-\infty, +\infty)$

(c) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^2 - 4)(4x - 3) = 4x^3 - 3x^2 - 16x + 12$; domínio: $(-\infty, +\infty)$

(d) $(f/g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2-4}{4x-3}$; domínio: $\{x \mid x \neq \frac{3}{4}\}$

(e) $(g/f)(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{4x-3}{x^2-4}$; domínio: $\{x \mid x \neq -2,\ x \neq 2\}$

(f) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(4x - 3) = (4x - 3)^2 - 4 = 16x^2 - 24x + 9 - 4 = 16x^2 - 24x + 5$;

domínio: $(-\infty, +\infty)$

(g) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 4) = 4(x^2 - 4) - 3 = 4x^2 - 19$; domínio: $(-\infty, +\infty)$

55. $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$; $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$. O domínio de f é $\{x \mid x \neq 3\}$ e o domínio de g é $\{x \mid x \neq -1\}$.

(a) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-2x-3}$; domínio: $\{x \mid x \neq -1,\ x \neq 3\}$

(b) $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{-x^2+4x+1}{x^2-2x-3}$; domínio: $\{x \mid x \neq -1,\ x \neq 3\}$

(c) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \dfrac{1}{x-3} \cdot \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x}{x^2-2x-3}$; domínio: $\{x \mid x \neq -1,\ x \neq 3\}$

(d) $(f/g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{x-3} \cdot \dfrac{x+1}{x} = \dfrac{x+1}{x^2-3x}$; domínio: $\{x \mid x \neq -1,\ x \neq 0,\ x \neq 3\}$

(e) $(g/f)(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{x}{x+1} \cdot \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{x^2-3x}{x+1}$; domínio: $\{x \mid x \neq -1,\ x \neq 3\}$

(f) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \dfrac{1}{\dfrac{x}{x+1} - 3} = \dfrac{x+1}{x-3x-3} = -\dfrac{x+1}{2x+3}$; domínio: $\{x \mid x \neq -\frac{3}{2},\ x \neq -1\}$

(g) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\dfrac{1}{x-3}\right) = \dfrac{\dfrac{1}{x-3}}{\dfrac{1}{x-3}+1} = \dfrac{1}{1+x-3} = \dfrac{1}{x-2}$; domínio: $\{x \mid x \neq 2,\ x \neq 3\}$

57. $f(x) = |3 - x|$, domínio: $(-\infty, +\infty)$, imagem: $[0, +\infty)$

59. $g(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x - 2} = \dfrac{(x + 4)(x - 2)}{x - 2}$, domínio: $\{x \mid x \neq 2\}$, imagem: $\{y \mid y \neq 6\}$

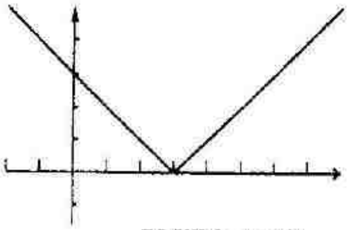


FIGURA 1-57

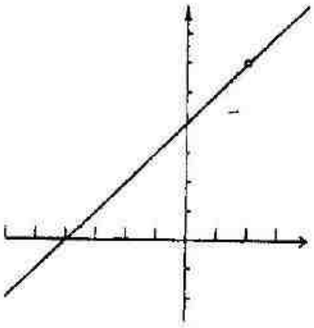


FIGURA 1-59

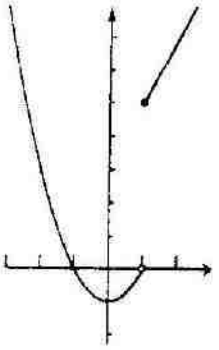


FIGURA 1-61

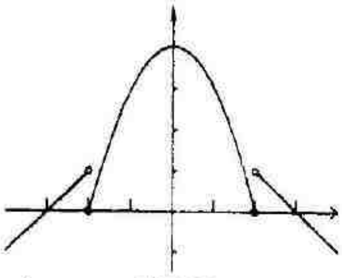


FIGURA 1-63

61. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x < 1 \\ 2x + 3 & \text{se } 1 \leq x \end{cases}$ domínio: $(-\infty, +\infty)$, imagem: $[-1, +\infty)$

63. $F(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{se } x < -2 \\ 4 - x^2 & \text{se } -2 \leq x \leq 2 \\ 3 - x & \text{se } 2 \leq x \end{cases}$ domínio: $(-\infty, +\infty)$, imagem: $(-\infty, 4]$

65. (a) $\text{sen}\,\frac{2}{3}\pi = \text{sen}\left(\pi - \frac{2}{3}\pi\right) = \text{sen}\,\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (b) $\cos\frac{5}{4}\pi = \cos\left(\pi + \frac{1}{4}\pi\right) = -\cos\frac{1}{4}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

(c) $\text{tg}\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = \text{tg}\left(-\frac{5}{6}\pi + \pi\right) = \text{tg}\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(d) $\text{cotg}\,\frac{13}{12}\pi = \text{cotg}\,\frac{\pi}{12} = \dfrac{1}{\text{tg}\,\frac{1}{2}(\pi/6)} = \dfrac{1 + \cos(\pi/6)}{\text{sen}(\pi/6)} = \dfrac{1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 2 + \sqrt{3}$

(e) $\sec\pi = \dfrac{1}{\cos\pi} = \dfrac{1}{-1} = -1$

(f) $\text{cosec}\left(-\frac{1}{8}\pi\right) = \dfrac{1}{\text{sen}\left(-\frac{1}{8}\pi\right)} = \dfrac{1}{-\text{sen}\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\pi\right)} = \dfrac{-1}{\sqrt{\dfrac{1 - \cos(\pi/4)}{2}}} = \dfrac{-1}{\sqrt{\dfrac{2 - \sqrt{2}}{4}}} = \dfrac{-2}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$

$= \dfrac{-2\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2 - \sqrt{2}} = \dfrac{-2(2 + \sqrt{2})\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} = -(2 + \sqrt{2})\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

67. (a) $\text{sen}\,t = \frac{1}{2}$; $t = \frac{1}{6}\pi,\ \frac{5}{6}\pi$ (b) $\cos t = 1$; $t = 0$

(c) $\text{tg}\,t = -1$; $t = \frac{3}{4}\pi,\ t = \frac{7}{4}\pi$ (d) $\text{cotg}\,t = \sqrt{3}$, $\text{tg}\,t = \frac{1}{3}\sqrt{3}$; $t = \frac{1}{6}\pi,\ t = \frac{7}{6}\pi$

(e) $\sec t = -2$, $\cos t = -\frac{1}{2}$; $t = \frac{2}{3}\pi,\ t = \frac{4}{3}\pi$ (f) $\text{cosec}\,t = \sqrt{2}$, $\text{sen}\,t = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $t = \frac{1}{4}\pi,\ t = \frac{3}{4}\pi$

69. Veja a Fig. 1-69. Seja a inclinação da reta que passa por (5,6) e (-2,4) igual a $m_1 = 2/7$, e a inclinação da reta que passa por (5,6) e (3,1) igual a $m_2 = 5/2$; a reta que passa por (-2,4) e (-2,1) é vertical, e a reta que passa por (-2,1) e (3,1) é horizontal. Além disso, denote os ângulos internos nos vértices (5,6), (-2,4), (-2,1), e (3,1) por θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, respectivamente.

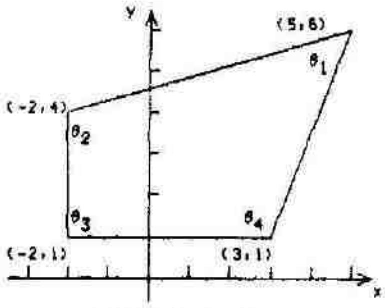


FIGURA 1-69

$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{5/2 - 2/7}{1 + 5/2 \cdot 2/7} = \frac{31}{24}$; $\theta_1 \approx 52°$ e $\operatorname{tg}(\theta_2 - 90°) = m_1 = \frac{2}{7}$; $\theta_2 - 90° \approx 16°$; $\theta_2 \approx 106°$

$\theta_3 = 90°$ e $\operatorname{tg}(180 - \theta_4) = m_2 = 5/2$; $180 - \theta_4 \approx 68°$; $\theta_4 \approx 112°$

Verifique: $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 \approx 52° + 106° + 90° + 112° = 360°$

71. A reta $x = ky$ que passa pela origem encontra uma circunferência $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ qdo $(ky - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$; $k^2y^2 - 4ky + 4 + y^2 - 2y + 1 = 4$; $(k^2 + 1) - (4k + 2)y + 1 = 0$

A reta será tangente à circunferência quando as duas raízes forem iguais, isto é, quando a discriminante for 0. Assim,

$(4k + 2)^2 - 4(k^2 + 1)(1) = 0$; $16k^2 + 16k + 4 - 4k^2 - 4 = 0$; $12k^2 + 16k = 0$; $4k(3k + 4) = 0$

Logo, $k = 0$, $k = -4/3$; Assim, as duas retas são $x = 0$ e $x = -4/3 y$ ou, equivalentemente, $y = -3/4\, x$.

73. Seja o retângulo com vértices $A(0,0)$, $B(a,0)$, $C(a,b)$ e $D(0,b)$. As diagonais AC e BD são perpendiculares; assim, $-1 = m_{AC} \cdot m_{BD} = \frac{b}{a}\left(-\frac{b}{a}\right) = -\frac{b^2}{a^2}$. Logo, $a^2 = b^2$, $|a| = |b|$ e $\overline{AB} = \overline{BC}$.

75. O triângulo tem vértices $A(2,8)$, $B(5,-1)$, $C(6,6)$. Pelo Exercício 1.2.55., as medianas encontram-se no ponto $G = \left(\frac{2 + 5 + 6}{3}, \frac{8 - 1 + 6}{3}\right) = \left(\frac{13}{3}, \frac{13}{3}\right)$. A inclinação da reta AB $\frac{-1 - 8}{5 - 2} = -3$; e assim, a inclinação da altura de C a AB é $-1/3$, e sua equação é $y - 6 = -1/3(x - 6)$.

Do mesmo modo, a altura até BC é $y - 8 = -1/7(x - 2)$. O ponto de intersecção é $H(9,7)$.

A bissetriz perpendicular de AB é $(x - 2)^2 + (y - 8)^2 = (x - 5)^2 + (y + 1)^2$; $6x - 18y = -42$.

A bissetriz perpendicular de AC é $(x - 2)^2 + (y - 8)^2 = (x - 6)^2 + (y - 6)^2$; $8x - 4y = 4$.

O ponto de intersecção em $O(2,3)$ é o centro da circunferência circunscrita. G, H, e O são colineares, pois $m_{GH} = \frac{13/3 - 7}{13/3 - 9} = \frac{4}{7}$ e também $m_{HO} = \frac{7 - 3}{9 - 2} = \frac{4}{7}$.

77. Se $|x| \geq 1$, então $x^2 \geq x$, assim $x < x^2 + 1$; se $|x| < 1$, já que $x^2 > 0$ temos também $|x| < 1 + x^2$. Então, para qualquer número real x, $|x| < 1 + x^2$. De fato, $0 \leq [x - \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x)]^2 = x^2 - |x| + \frac{1}{4}$; logo, $|x| \leq x^2 + \frac{1}{4}$.

CAPÍTULO DOIS

LIMITES E CONTINUIDADE

EXERCÍCIOS 2.1 O Limite de uma Função

1. (b) Queremos determinar um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - 4| < \delta \text{ então } |(x - 1) - 3| < 0{,}2$$

$$\iff \text{se } 0 < |x - 4| < \delta \text{ então } 0 < |x - 4| < 0{,}2$$

Logo, tomamos $\delta = 0{,}2$; então $0 < |x - 4| < 0{,}2 \Rightarrow |(x - 1) - 3| < 0{,}2$

3. (b) Queremos determinar um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - 3| < \delta \text{ então } |(2x + 4) - 10| < 0{,}01$$

$$\iff \text{se } 0 < |x - 3| < \delta \text{ então } 0 < 2|x - 3| < 0{,}01$$

$$\iff \text{se } 0 < |x - 3| < \delta \text{ então } 0 < |x - 3| < 0{,}005$$

Logo, tomamos $\delta = 0{,}005$; então $0 < |x - 3| < 0{,}005 \Rightarrow 2|x - 3| < 0{,}01 \Rightarrow |(2x + 4) - 10| < 0{,}01$

5. (b) Queremos determinar um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - 1| < \delta \text{ então } |(5x - 3) - 2| < 0{,}05$$

$$\iff \text{se } 0 < |x - 1| < \delta \text{ então } 5|x - 1| < 0{,}05$$

$$\iff \text{se } 0 < |x - 1| < \delta \text{ então } |x - 1| < 0{,}01$$

Logo, tomamos $\delta = 0{,}01$; então $0 < |x - 1| < 0{,}01 \Rightarrow 5|x - 1| < 0{,}05 \Rightarrow |(5x - 3) - 2| < 0{,}05$.

7. (b) Queremos determinar um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x + 1| < \delta \text{ então } |(3 - 4x) - 7| < 0{,}02$$

$$\iff \text{se } 0 < |x + 1| < \delta \text{ então } 4|x + 1| < 0{,}02$$

$$\iff \text{se } 0 < |x + 1| < \delta \text{ então } |x + 1| < 0{,}005$$

Logo, tomamos $\delta = 0{,}005$; então $0 < |x + 1| < 0{,}005 \Rightarrow 4|x + 1| < 0{,}02 \Rightarrow |(3 - 4x) - 7| < 0{,}02$.

9. (b) Queremos determinar um $\delta > 0$ tal que

se $0 < |x - 3| < \delta$ então $|x^2 - 9| < 0{,}005$

$\Longleftrightarrow$ se $0 < |x - 3| < \delta$ então $|x - 3||x + 3| < 0{,}005$

Seja $(2,4)$ o intervalo aberto requerido pela Definição 2.1.1, o que implica que $\delta \leq 1$.

Então, $2 < x < 4 \Rightarrow 5 < x + 3 < 7 \Rightarrow |x + 3| < 7$.

Agora, $0 < |x - 3| < \delta$ e $|x + 3| < 7 \Rightarrow |x - 3||x + 3| < \delta \cdot 7$.

Assim, requeremos que $7\delta \leq 0{,}005 \Longleftrightarrow \delta \leq \frac{1}{1.400}$. Logo, $\delta = \min\left(1, \frac{1}{1.400}\right) = \frac{1}{1.400}$.

Então, $0 < |x - 3| < \frac{1}{1.400} \Rightarrow |x - 3||x + 3| < \frac{1}{1.400} \cdot 7 \Rightarrow |x^2 - 9| < 0{,}005$

11. (b) Queremos determinar um $\delta > 0$ tal que

se $0 < |x + 2| < \delta$ então $|x^2 - 4| < 0{,}003$

$\Longleftrightarrow$ se $0 < |x + 2| < \delta$ então $|x - 2||x + 2| < 0{,}003$

Seja $(-3, -1)$ o intervalo aberto requerido pela Definição 2.1.1, o que implica que $\delta \leq 1$.

Então, $-3 < x < -1 \Rightarrow -5 < x - 2 < -3 \Rightarrow |x - 3| < 5$.

Agora, $0 < |x + 1| < \delta$ e $|x - 2| < 5 \Rightarrow |x - 2||x + 2| < 5\delta$.

Assim, requeremos que $5\delta \leq 0{,}003 \Longleftrightarrow \delta \leq 0{,}0006$. Logo, $\delta = \min(1, 0{,}0006) = 0{,}0006$.

Então, $0 < |x + 2| < \delta \Rightarrow |x - 2||x + 2| < 5(0{,}0006) \Rightarrow |x^2 - 4| < 0{,}003$

13. (b) Queremos determinar um $\delta > 0$ tal que

se $0 < |x - 2| < \delta$ então $|(x^2 - 2x + 1) - 1| < 0{,}001$

$\Longleftrightarrow$ se $0 < |x - 2| < \delta$ então $|x - 2||x| < 0{,}001$

Seja $(1,3)$ o intervalo aberto requerido pela Definição 2.1.1, o que implica que $\delta \leq 1$.

Então, $1 < x < 3 \Rightarrow |x| < 3$.

Agora, $0 < |x - 2| < \delta$ e $|x| < 3 \Rightarrow |x - 2||x| < \delta \cdot 3$.

Assim, requeremos que $3\delta \leq 0{,}001 \Longleftrightarrow \delta \leq \frac{1}{3.000}$. Logo, $\delta = \min\left(1, \frac{1}{3000}\right) = \frac{1}{3000}$.

Então, $0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |x - 2||x| < \frac{1}{3.000} \cdot 3 \Rightarrow |(x^2 - 2x + 1) - 1| < 0{,}001$

15. (b) Queremos determinar um $\delta > 0$ tal que

se $0 < |x| < \delta$ então $|(x^2 + 3x - 4) + 4| < 0{,}03$

$\Longleftrightarrow$ se $0 < |x| < \delta$ então $|x + 3||x| < 0{,}03$

Seja $(-1,1)$ o intervalo aberto requerido pela Definição 2.1.1, o que implica que $\delta \leq 1$.

Então, $-1 < x < 1$ $2 < x + 3 < 4 \Rightarrow |x + 3| < 4$.

Agora, $0 < |x| < \delta$ e $|x + 3| < 4 \Rightarrow |x + 3||x| < 4\delta$.

Assim, requeremos que $4\delta \leq 0{,}03 \Longleftrightarrow \delta \leq 0{,}0075$. Logo, $\delta = \min(1, 0{,}0075) = 0{,}0075$.

Então, $0 < |x| < \delta \Rightarrow |x + 3||x| < 4(0{,}0075) \Rightarrow |(x^2 + 3x - 4) + 4| < 0{,}03$

17. (b) Queremos determinar um $\delta > 0$ tal que

se $0 < |x+2| < \delta$ então $|(2x^2+5x+3)-1| < 0{,}004$

$\Longleftrightarrow$ se $0 < |x+2| < \delta$ então $|2x+1||x+2| < 0{,}004$

Seja $(-3, -1)$ o intervalo aberto requerido pela Definição 2.1.1, o que implica que $\delta \leq 1$.

Então, $-3 < x < -1 \Rightarrow -6 < 2x < -2 \Rightarrow -5 < 2x+1 < -1 \Rightarrow |2x+1| < 5$.

Agora, $0 < |x+2| < \delta$ e $|2x+1| < 5 \Rightarrow |2x+1||x+2| < 5\delta$.

Assim, requeremos que $5\delta \leq 0{,}004 \Longleftrightarrow \delta \leq 0{,}0008$. Logo, $\delta = \min(1, 0{,}0008) = 0{,}0008$.

Então, $0 < |x+2| < \delta \Rightarrow |2x+1||x+2| < 5(0{,}0008) \Rightarrow |(2x^2+5x+3)-1| < 0{,}004$

19. (b) Queremos determinar um $\delta > 0$ tal que

se $0 < |x+2| < \delta$ então $\left|\frac{x^2-4}{x+2}+4\right| < 0{,}01$

$\Longleftrightarrow$ se $0 < |x+2| < \delta$ então $|(x-2)+4| < 0{,}01$

$\Longleftrightarrow$ se $0 < |x+2| < \delta$ então $|x+2| < 0{,}01$

Logo, tomamos $\delta = 0{,}01$; então, $0 < |x+2| < \delta \Rightarrow 0 < |x+2| < 0{,}01 \Rightarrow \left|\frac{x^2-4}{x+2}+4\right| < 0{,}01$.

21. (b) Queremos determinar um $\delta > 0$ tal que

se $0 < |x-\frac{1}{3}| < \delta$ então $\left|\frac{3x^2-8x-3}{x-3}-\frac{5}{2}\right| < 0{,}001$

$\Longleftrightarrow$ se $0 < |x-\frac{1}{3}| < \delta$ então $|(3x+1)-\frac{5}{2}| < 0{,}01$

$\Longleftrightarrow$ se $0 < |x-\frac{1}{3}| < \delta$ então $3|x-\frac{1}{3}| < 0{,}001$

$\Longleftrightarrow$ se $0 < |x-\frac{1}{3}| < \delta$ então $|x-\frac{1}{3}| < \frac{1}{3.000}$

Logo, tomamos $\delta = \frac{1}{3.000}$; então, $0 < |x-\frac{1}{3}| < \delta \Rightarrow 0 < 3|x-\frac{1}{3}| < 3\cdot\frac{1}{3.000} \Rightarrow \left|\frac{3x^2-8x-3}{x-3}-\frac{5}{2}\right| < 0{,}001$

23. Queremos determinar um $\delta > 0$ tal que

se $0 < |x-2| < \delta$ então $|7-7| < \epsilon$

$\Longleftrightarrow$ se $0 < |x-2| < \delta$ então $0 < \epsilon$

Logo, para qualquer $\epsilon > 0$ qualquer escolha $\delta > 0$ será adequada; especificamente tomamos $\delta = \epsilon$.

25. Queremos determinar um $\delta > 0$ tal que

se $0 < |x-4| < \delta$ então $|(2x+1)-9| < \epsilon$

$\Longleftrightarrow$ se $0 < |x-4| < \delta$ então $2|x-4| < \epsilon$

$\Longleftrightarrow$ se $0 < |x-4| < \delta$ então $|x-4| < \frac{1}{2}\epsilon$

Logo, tomamos $\delta = \frac{1}{2}\epsilon$; então, $0 < |x-4| < \delta \Rightarrow 2|x-4| < 2(\frac{1}{2}\epsilon) \Rightarrow |(2x+1)-9| < \epsilon$.

27. Queremos determinar um $\delta > 0$ tal que

se $0 < |x+1| < \delta$ então $|(5x+8)-3| < \epsilon$

$\Longleftrightarrow$ se $0 < |x+1| < \delta$ então $5|x+1| < \epsilon$

$\Longleftrightarrow$ se $0 < |x+1| < \delta$ então $|x+1| < \frac{1}{5}\epsilon$

Logo, tomamos $\delta = \frac{1}{5}\epsilon$; então, $0 < |x+1| < \delta \Rightarrow 5|x+1| < 5(\frac{1}{5}\epsilon) \Rightarrow |(5x+8)-3| < \epsilon$.

29. Queremos determinar um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x-3| < \delta \text{ então } |(7-3x)-(-2)| < \epsilon$$

$$\iff \text{se } 0 < |x-3| < \delta \text{ então } 3|x-3| < \epsilon$$

$$\iff \text{se } 0 < |x-3| < \delta \text{ então } |x-3| < \tfrac{1}{3}\epsilon$$

Logo, tomamos $\delta = \frac{1}{3}\epsilon$; então, $0 < |x-3| < \delta \Rightarrow 3|x-3| < 3(\frac{1}{3}\epsilon) \Rightarrow |(7-3x)-(-2)| < \epsilon$.

31. Queremos determinar um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x+2| < \delta \text{ então } |(1+3x)-(-5)| < \epsilon$$

$$\iff \text{se } 0 < |x+2| < \delta \text{ então } 3|x+2| < \epsilon$$

$$\iff \text{se } 0 < |x+2| < \delta \text{ então } |x+2| < \tfrac{1}{3}\epsilon$$

Logo, tomamos $\delta = \frac{1}{3}\epsilon$; então, $0 < |x+2| < \delta \Rightarrow 3|x+2| < 3(\frac{1}{3}\epsilon) \Rightarrow |(1+3x)-(-5)| < \epsilon$.

33. Queremos determinar um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x+1| < \delta \text{ então } \left|\frac{x^2-1}{x+1} - (-2)\right| < \epsilon$$

$$\iff \text{se } 0 < |x+1| < \delta \text{ então } |x+1| < \epsilon$$

Logo, tomamos $\delta = \epsilon$; então, $0 < |x+1| < \delta \Rightarrow 0 < |x+1| < \epsilon \Rightarrow \left|\frac{x^2-1}{x+1} - (-2)\right| < \epsilon$.

35. Queremos determinar um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x-1| < \delta \text{ então } |x^2-1| < \epsilon$$

$$\iff \text{se } 0 < |x-1| < \delta \text{ então } |x-1||x+1| < \epsilon$$

Seja $(0,2)$ o intervalo aberto requerido pela Definição 2.1.1, o que implica que $\delta \leq 1$.

Então, $0 < x < 2 \Rightarrow 1 < x+1 < 3 \Rightarrow |x+1| < 3$.

Agora, $0 < |x-1| < \delta$ e $|x+1| < 3 \Rightarrow |x-1||x+1| < \delta \cdot 3$.

Assim, requeremos que $3\delta \leq \epsilon \iff \delta \leq \frac{1}{3}\epsilon$. Logo, $\delta = \min(1, \frac{1}{3}\epsilon)$.

Então, $0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |x-1||x+1| < \delta \cdot 3 \Rightarrow |x^2-1| < (\frac{1}{3}\epsilon)3 \Rightarrow |x^2-1| < \epsilon$

37. Queremos determinar um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x-5| < \delta \text{ então } |(x^2-3x)-10| < \epsilon$$

$$\iff \text{se } 0 < |x-5| < \delta \text{ então } |x-5||x+2| < \epsilon$$

Seja $(4,6)$ o intervalo aberto requerido pela Definição 2.1.1, o que implica que $\delta \leq 1$.

Então, $4 < x < 6 \Rightarrow 6 < x+2 < 8 \Rightarrow |x+2| < 8$.

Agora, $0 < |x-5| < \delta$ e $|x+2| < 8 \Rightarrow |x-5||x+2| < \delta \cdot 8$. Logo, requeremos que $8\delta \leq \epsilon$

$\iff \delta \leq \frac{1}{8}\epsilon$. Logo, $\delta = \min(1, \frac{1}{8}\epsilon)$. Então, $0 < |x-5| < \delta \Rightarrow |x-5||x+2| < \delta \cdot 8$

$\Rightarrow |x-5||x+2| < (\frac{1}{8}\epsilon)8 \Rightarrow |(x^2-3x)-10| < \epsilon$

39. Queremos determinar um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x+3| < \delta \text{ então } |(5 - x - x^2) - (-1)| < \epsilon$$

$$\iff \text{se } 0 < |x+3| < \delta \text{ então } |x+3||x-2| < \epsilon$$

Seja $(-4,-2)$ o intervalo aberto requerido pela Definição 2.1.1, o que implica que $\delta \leq 1$.

Então, $-4 < x < -2 \Rightarrow -6 < x - 2 < -4 \Rightarrow |x-2| < 6$.

Agora, $0 < |x+3| < \delta$ e $|x-2| < 6 \Rightarrow |x+3||x-2| < \delta \cdot 6$.

Assim, requeremos que $6\delta < \epsilon \iff \delta < \frac{1}{6}\epsilon$. Logo, $\delta = \min(1, \frac{1}{6}\epsilon)$.

Então, $0 < |x+3| < \delta \Rightarrow |x+3||x-2| < \delta \cdot 6 \Rightarrow |x+3||x-2| < (\frac{1}{6}\epsilon)6 \Rightarrow |(5 - x - x^2) - (-1)| < \epsilon$

41. Queremos determinar um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x-2| < \delta \text{ então } |(6x^2 - 13x + 5) - 3| < \epsilon$$

$$\iff \text{se } 0 < |x-2| < \delta \text{ então } |6x-1||x-2| < \epsilon$$

Seja $(1,3)$ o intervalo aberto requerido pela Definição 2.1.1, o que implica que $\delta \leq 1$.

Então, $1 < x < 3 \Rightarrow 6 < 6x < 18 \Rightarrow 5 < 6x - 1 < 17 \Rightarrow |6x-1| < 17$

Agora, $0 < |x-2| < \delta$ e $|6x-1| < 17 \Rightarrow |6x-1||x-2| < 17\delta$.

Assim, requeremos que $17\delta < \epsilon \iff \delta < \epsilon/17$. Logo, $\delta = \min(1, \epsilon/17)$. Então,

$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |6x-1||x-2| < 17\delta \Rightarrow |x+3||x-2| < (\epsilon/17)17 \Rightarrow |(6x^2 - 13x + 5 - 3| < \epsilon$

43. Para $a > 0$ queremos determinar um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x-a| < \delta \text{ então } |x^2 - a^2| < \epsilon$$

$$\iff \text{se } 0 < |x-a| < \delta \text{ então } |x-a||x+a| < \epsilon$$

Seja $(0,2a)$ o intervalo aberto requerido pela Definição 2.1.1, o que implica que $\delta \leq a$.

Então, $0 < |x-a| < \delta$ e $\delta \leq a \Rightarrow |x-a| < a \Rightarrow -a < x - a < a \Rightarrow a < x + a < 3a \Rightarrow |x+a| < 3a$.

Agora, $0 < |x-a| < \delta$ e $|x+a| < 3a \Rightarrow |x-a||x+a| < \delta(3a)$. Assim, queremos que $\delta(3a) \leq \epsilon$

$\iff \delta \leq \frac{\epsilon}{3a}$. Logo, $\delta = \min(a, \frac{\epsilon}{3a})$. Então, $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |x-a||x+a| < \delta|x+a|$

$\Rightarrow |x^2 - a^2| < \delta|x+a| \Rightarrow |x^2 - a^2| < \delta \cdot 3a \Rightarrow |x^2 - a^2| < \frac{\epsilon}{3a} \cdot 3a \Rightarrow |x^2 - a^2| < \epsilon$

EXERCÍCIOS 2.2 Teoremas Sobre Limites de Funções

1. $\lim\limits_{x\to 5}(3x-7) \overset{\text{L.T.1}}{=} 3(5)-7 = 8$

3. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x-1) \overset{\text{L.T.4}}{=} \lim\limits_{x\to 2} x^2 + \lim\limits_{x\to 2}(2x-5) \overset{\text{L.T.8, L.T.1}}{=} (\lim\limits_{x\to 2} x)^2 + [2(2)-1] \overset{\text{L.T.3}}{=} (2)^2 + 3 = 7$

5. $\lim\limits_{z\to -2}(z^3+8) \overset{\text{L.T.4}}{=} \lim\limits_{z\to -2} z^3 + \lim\limits_{z\to -2} 8 \overset{\text{L.T.8, L.T.3}}{=} \left(\lim\limits_{z\to -2} z\right)^3 + 8 \overset{\text{L.T.2}}{=} (-2)^3 + 8 = 0$

7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x-5}{5x-1} \overset{\text{L.T.9}}{=} \dfrac{\lim\limits_{x\to 3}(4x-5)}{\lim\limits_{x\to 3}(5x-1)} \overset{\text{L.T.1}}{=} \dfrac{4(3)-5}{5(3)-1} = \dfrac{1}{2}$

9. $\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{t^2-5}{2t^3+6} \overset{\text{L.T.9}}{=} \dfrac{\lim\limits_{t\to 2}(t^2-5)}{\lim\limits_{t\to 2}(2t^3+6)} \overset{\text{L.T.4}}{=} \dfrac{\lim\limits_{t\to 2} t^2 - \lim\limits_{t\to 2}(5)}{\lim\limits_{t\to 2}(2t^3) + \lim\limits_{t\to 2}(6)} \overset{\text{L.T.2, L.T.6}}{=} \dfrac{\lim\limits_{t\to 2} t^2 - 5}{(\lim\limits_{t\to 2} 2)(\lim\limits_{t\to 2} t^3) + 6} \overset{\text{L.T.2, L.T.8}}{=} \dfrac{(\lim\limits_{t\to 2})^2 - 5}{2(\lim\limits_{t\to 2} t)^3 + 6}$

$\overset{\text{L.T.3}}{=} \dfrac{(2)^2-5}{2(2)^3+6} = -\dfrac{1}{22}$

11. $\lim\limits_{r\to 1}\sqrt{\dfrac{8r+1}{r+3}} \overset{\text{L.T.10}}{=} \sqrt{\lim\limits_{r\to 1}\dfrac{8r+1}{r+3}} \overset{\text{L.T.9}}{=} \sqrt{\dfrac{\lim\limits_{r\to 1}(8r+1)}{\lim\limits_{r\to 1}(r+3)}} \overset{\text{L.T.1}}{=} \sqrt{\dfrac{8(1)+1}{1+3}} = \sqrt{\dfrac{9}{4}} = \dfrac{3}{2}$

13. $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt[3]{\dfrac{x^2-3x+4}{2x^2-x-1}} \overset{\text{L.T.10}}{=} \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x+4}{2x^2-x-1}} \overset{\text{L.T.9}}{=} \sqrt[3]{\dfrac{\lim\limits_{x\to 4}(x^2-3x+4)}{\lim\limits_{x\to 4}(2x^2-x-1)}} \overset{\text{L.T.4}}{=} \sqrt[3]{\dfrac{\lim\limits_{x\to 4} x^2 + \lim\limits_{x\to 4}(-3x+4)}{\lim\limits_{x\to 4} 2x^2 + \lim\limits_{x\to 4}(-x-1)}}$

$\overset{\text{L.T.7, L.T.1, L.T.8}}{=} \sqrt[3]{\dfrac{(\lim\limits_{x\to 4} x)^2 + (-8)}{\lim\limits_{x\to 4} 2(\lim\limits_{x\to 4} x)^2 + (-5)}} \overset{\text{L.T.3, L.T.2}}{=} \sqrt[3]{\dfrac{(4)^2-8}{2(4)^2-5}} = \sqrt[3]{\dfrac{8}{27}} = \dfrac{2}{3}$

15. $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$ (a)

x	1	1,5	1,9	1,99	1,999	3	2,5	2,1	2,01	2,001
f	0,3333	0,2857	0,2564	0,2506	0,2501	0,2000	0,2222	0,243[illegible]	0,2494	0,2499

(b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x+2} \overset{\text{L.T.9}}{=} \dfrac{\lim\limits_{x\to 2} 1}{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)} \overset{\text{L.T.2, L.T.1}}{=} \dfrac{1}{4}$

17. $f = \dfrac{x^2+5x+6}{x^2-x-12}$ (a)

x	-4	-3,5	-3,1	3,01	3,001	3,0001		2,5	2,9	2,99	2,999	2,[illegible]
f	0,2500	0,2000	0,1549	0,1441	0,1430	0,1429	0,0000	0,0769	0,1304	0,1416	0,1427	0,14[illegible]

(b) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-x-12} = \lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+2)(x+3)}{(x-4)(x+3)} = \lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+2}{x-4} \overset{\text{L.T.9}}{=} \dfrac{\lim\limits_{x\to -3}(x+2)}{\lim\limits_{x\to -3}(x-4)} \overset{\text{L.T.1}}{=} \dfrac{-3+2}{-3-4} = \dfrac{-1}{-7} = \dfrac{1}{7}$

N. do E.: L.T. = Teorema de Limite

19. $f = \dfrac{3 - \sqrt{x}}{9 - x}$ (a)

x	8	8,5	8,9	8,99	8,999	10	9,5	9,1	9,01	9,001
f	0,1716	0,1690	0,1671	0,1667	0,1667	0,1623	0,1644	0,1662	0,1666	0,1667

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3 - \sqrt{x}}{9 - x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(3 - \sqrt{x})(3 + \sqrt{x})}{(9 - x)(3 + \sqrt{x})} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{9 - x}{(9 - x)(3 + \sqrt{x})} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{3 + \sqrt{x}} \overset{L.T.9}{=} \dfrac{\lim\limits_{x \to 0} 1}{\lim\limits_{x \to 0}(3 + \sqrt{x})}$

$\overset{L.T.4}{\underset{L.T.2}{=}} \dfrac{1}{\lim\limits_{x \to 0} 3 + \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x}} \overset{L.T.10}{\underset{L.T.2}{=}} \dfrac{1}{3 + \sqrt{\lim\limits_{x \to 0} x}} \overset{L.T.3}{=} \dfrac{1}{3 + \sqrt{9}} = \dfrac{1}{6}$

21. $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{x^2 - 49}{x - 7} = \lim\limits_{x \to 7} \dfrac{(x - 7)(x + 7)}{x - 7} = \lim\limits_{x \to 7} x + 7 \overset{L.T.1}{=} 7 + 7 = 14$

23. $\lim\limits_{x \to -3/2} \dfrac{4x^2 - 9}{2x + 3} = \lim\limits_{x \to -3/2} \dfrac{(2x + 3)(2x - 3)}{2x + 3} = \lim\limits_{x \to -3/2} 2x - 3 \overset{L.T.1}{=} 2\left(-\dfrac{3}{2}\right) - 3 = -6$

25. $\lim\limits_{s \to 4} \dfrac{3s^2 - 8s - 16}{2s^2 - 9s + 4} = \lim\limits_{s \to 4} \dfrac{(3s + 4)(s - 4)}{(2s - 1)(s - 4)} = \lim\limits_{s \to 4} \dfrac{3s + 4}{2s - 1} \overset{L.T.9}{=} \dfrac{\lim\limits_{s \to 4}(3s + 4)}{\lim\limits_{s \to 4}(2s - 1)} \overset{L.T.1}{=} \dfrac{3(4) + 4}{2(4) - 1} = \dfrac{16}{7}$

27. $\lim\limits_{y \to -2} \dfrac{y^3 + 8}{y + 2} = \lim\limits_{y \to -2} \dfrac{(y + 2)(y^2 - 2y + 4)}{y + 2} = \lim\limits_{y \to -2} (y^2 - 2y + 4) \overset{L.T.4}{=} \lim\limits_{y \to -2} y^2 + \lim\limits_{y \to -2} (-2y + 4)$

$\overset{L.T.8}{\underset{L.T.1}{=}} (\lim\limits_{y \to -2} y)^2 + [(-2)(-2) + 4] \overset{L.T.3}{=} (-2)^2 + 8 = 12$

29. $\lim\limits_{y \to -3} \sqrt{\dfrac{y^2 - 9}{2y^2 + 7y + 3}} = \lim\limits_{y \to -3} \sqrt{\dfrac{(y - 3)(y + 3)}{(2y + 1)(y + 3)}} = \lim\limits_{y \to -3} \sqrt{\dfrac{y - 3}{2y + 1}} \overset{L.T.10}{=} \sqrt{\lim\limits_{y \to -3} \dfrac{y - 3}{2y + 1}}$

$\overset{L.T.9}{=} \sqrt{\dfrac{\lim\limits_{y \to -3}(y - 3)}{\lim\limits_{y \to -3}(2y + 1)}} \overset{L.T.1}{=} \sqrt{\dfrac{-6}{-5}} = \sqrt{\dfrac{6}{5}}$

31. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x} + 1} \overset{L.T.9}{=} \dfrac{\lim\limits_{x \to 1} 1}{\lim\limits_{x \to 1}(\sqrt{x} + 1)} \overset{L.T.2}{\underset{L.T.4}{=}} \dfrac{1}{\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x} + \lim\limits_{x \to 1} 1}$

$\overset{L.T.10}{\underset{L.T.2}{=}} \dfrac{1}{\sqrt{\lim\limits_{x \to 1} x} + 1} \overset{L.T.3}{=} \dfrac{1}{\sqrt{1} + 1} = \dfrac{1}{2}$

33. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{x + 2} - \sqrt{2})(\sqrt{x + 2} + \sqrt{2})}{x(\sqrt{x + 2} + \sqrt{2})} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x + 2) - 2}{x(\sqrt{x + 2} + \sqrt{2})} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x + 2} + \sqrt{2}}$

$\overset{L.T.9}{=} \dfrac{\lim\limits_{x \to 0} 1}{\lim\limits_{x \to 0}(\sqrt{x + 2} + \sqrt{2})} \overset{L.T.2}{\underset{L.T.4}{=}} \dfrac{1}{\lim\limits_{x \to 0}\sqrt{x + 2} + \lim\limits_{x \to 0}\sqrt{2}} \overset{L.T.10}{\underset{L.T.2}{=}} \dfrac{1}{\sqrt{\lim\limits_{x \to 0}(x + 2)} + \sqrt{2}} \overset{L.T.1}{=} \dfrac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

35. $\lim\limits_{h\to0}\frac{\sqrt[3]{h+1}-1}{h} = \lim\limits_{h\to0}\frac{(\sqrt[3]{h+1}-1)[\sqrt[3]{(h+1)^2}+\sqrt[3]{h+1}+1]}{h[\sqrt[3]{(h+1)^2}+\sqrt[3]{h+1}+1]} = \lim\limits_{h\to0}\frac{h+1-1}{h[\sqrt[3]{(h+1)^2}+\sqrt[3]{h+1}+1]}$

$= \lim\limits_{h\to0}\frac{1}{\sqrt[3]{(h+1)^2}+\sqrt[3]{h+1}+1} \overset{L.T.9}{=} \frac{\lim\limits_{h\to0} 1}{\lim\limits_{h\to0}[\sqrt[3]{(h+1)^2}+\sqrt[3]{h+1}+1]} \overset{\substack{L.T.5\\L.T.2}}{=} \frac{1}{\lim\limits_{h\to0}\sqrt[3]{(h+1)^2}+\lim\limits_{h\to0}\sqrt[3]{h+1}+\lim\limits_{h\to0} 1}$

$\overset{\substack{L.T.10\\L.T.2}}{=} \frac{1}{\sqrt[3]{\lim\limits_{h\to0}(h+1)^2}+\sqrt{\lim\limits_{h\to0}(h+1)}+1} \overset{\substack{L.T.1\\L.T.8}}{=} \frac{1}{\sqrt[3]{\left[\lim\limits_{h\to0}(h+1)\right]^2}+\sqrt[3]{1}+1} \overset{L.T.1}{=} \frac{1}{\sqrt[3]{(1)^2}+1+1} = \frac{1}{3}$

37. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^2-x-3}{x^3+2x^2+6x+5} = \lim\limits_{x\to-1}\frac{(2x-3)(x+1)}{(x^2+x+5)(x+1)} = \lim\limits_{x\to-1}\frac{2x-3}{x^2+x+5} \overset{L.T.9}{=} \frac{\lim\limits_{x\to-1}(2x-3)}{\lim\limits_{x\to-1}(x^2+x+5)}$

$\overset{\substack{L.T.4\\L.T.1}}{=} \frac{-5}{\lim\limits_{x\to-1}x^2+\lim\limits_{x\to-1}(x+5)} \overset{\substack{L.T.1\\L.T.8}}{=} \frac{-5}{(\lim\limits_{x\to-1}x)^2+4} \overset{L.T.3}{=} \frac{-5}{(-1)^2+4} = -1$

39. $\lim\limits_{x\to3}\frac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3} = \lim\limits_{x\to3}\frac{(2x^2+x+1)(x-3)}{(4x^2-x+1)(x-3)} = \lim\limits_{x\to3}\frac{2x^2+x+1}{4x^2-x+1} \overset{L.T.9}{=} \frac{\lim\limits_{x\to3}(2x^2+x+1)}{\lim\limits_{x\to3}(4x^2-x+1)}$

$\overset{L.T.4}{=} \frac{\lim\limits_{x\to3}(2x^2)+\lim\limits_{x\to3}(x+1)}{\lim\limits_{x\to3}(4x^2)+\lim\limits_{x\to3}(-x+1)} \overset{\substack{L.T.1,\,L.T.7\\L.T.6}}{=} \frac{\lim\limits_{x\to3}2(\lim\limits_{x\to3}x)^2+4}{\lim\limits_{x\to3}2(\lim\limits_{x\to3}x)^2-2} \overset{\substack{L.T.3\\L.T.2}}{=} \frac{2(3)^2+4}{4(3)^2-2} = \frac{22}{34} = \frac{11}{17}$

41. $\lim\limits_{x\to-1}F(x) = \lim\limits_{x\to-1}(2x^3+7x-1) = \lim\limits_{x\to-1}2x^3+\lim\limits_{x\to-1}(7x-1) = 2(-1)^3+7(-1)-1 = -10$

$F(-1) = 2(-1)^3+7(-1)-1 = -10$. Portanto, $\lim\limits_{x\to-1}F(x) = F(-1)$

43. $\lim\limits_{x\to0}h(x) = \lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x} = \frac{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)}{x(\sqrt{x+9}+3)} = \lim\limits_{x\to0}\frac{x+9-9}{x(\sqrt{x+9}+3)} = \lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+9}+3} = \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{6}$

$h(0)$ não é definida, pois o denominador é zero quando $x = 0$.

45. (a) $\lim\limits_{x\to-3}f(x) = \lim\limits_{x\to-3}(x^2-9) = (-3)^2-9 = 0$. Mas, $f(-3) = 4$; então $f(-3) \neq \lim\limits_{x\to-3}f(x)$

(b)

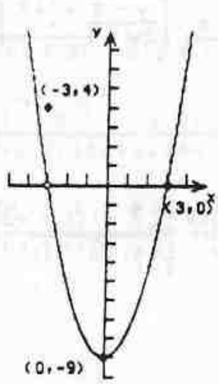


FIGURA 2.2.45

47. Queremos provar por indução matemática que se $\lim_{x \to a} f_1(x) = L_1$, $\lim_{x \to a} f_2(x) = L_2, \ldots,$ e $\lim_{x \to a} f_n(x) = L_n$, então

$$\lim_{x \to a}[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)] = L_1 \pm L_2 \pm \cdots \pm L_n \qquad (1)$$

Prova: Pelo T.L.4, $\lim_{x \to a}[f_1(x) \pm f_2(x)] = L_1 \pm L_2$. Portanto, a equação (1) é verificada qdo n=2. Suponha que a equação (1) é verificada quando n = k; ou seja

$$\lim_{x \to a}[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_k(x)] = L_1 \pm L_2 \pm \cdots \pm L_k \qquad (2)$$

Desejamos provar que a equação (1) é verificada quando n = k + 1. Pelo T.L.4

$$\lim_{x \to a}([f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_k(x)] \pm f_{k+1}(x)) = \lim_{x \to a}[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_k(x)] \pm \lim_{x \to a}[f_{k+1}(x)]$$

Da equação (2) e como por hipótese, $\lim_{x \to a} f_{k+1}(x) = L_{k+1}$ o segundo membro da equação acima é $(L_1 \pm L_2 \pm \cdots \pm L_k) \pm L_{k+1}$. Portanto, a equação (1) é verificada para n = k + 1, e assim, para todo inteiro n.

49. Para provar que $\lim_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = 0$ devemos mostrar que p/ qquer. $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |f(x) \cdot g(x)| < \epsilon \qquad (1)$$

Como $\lim_{x \to a} f(x) = L$ segue da Definição 2.1.1 que existe um $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ então } |f(x) - L| < 1 \qquad (2)$$

Como $|a| - |b| \leq |a - b|$ segue que $|f(x)| - |L| \leq |f(x) - L|$. Assim, da afirmação (2) há um $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ então } |f(x)| < 1 + |L|$$

Como $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ segue da Definição 2.1.1 que existe um $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ então } |g(x)| < \frac{\epsilon}{1 + |L|}$$

Seja $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$; segue que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)|\,|g(x)| < (1 + |L|)\frac{\epsilon}{1 + |L|} = \epsilon$$

Portanto, a afirmação (1) está provada e então $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0$.

EXERCÍCIOS 2.3 Limites Laterais

1. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < 1 \\ -1 & \text{se } x = 1 \\ -3 & \text{se } 1 < x \end{cases}$

(a) $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (-3) = -3$

(b) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 2 = 2$

(c) $\lim_{x \to 1} f(x)$ não existe, pois $\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$.

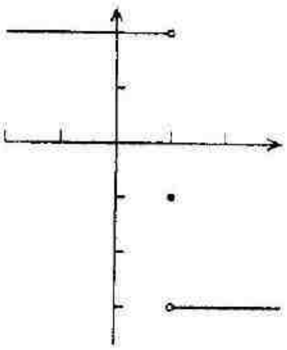


FIGURA 2.3-1

3. $f(t) = \begin{cases} t + 4 & \text{se } t \leq -4 \\ 4 - t & \text{se } -4 < t \end{cases}$

(a) $\lim_{t \to -4^+} f(t) = \lim_{t \to -4^+} (4 - t) = 8$

(b) $\lim_{t \to -4^-} f(t) = \lim_{t \to -4^-} (t + 4) = 0$

(c) $\lim_{t \to -4} f(t)$ não existe, pois $\lim_{t \to -4^-} f(t) \neq \lim_{t \to -4^+} f(t)$.

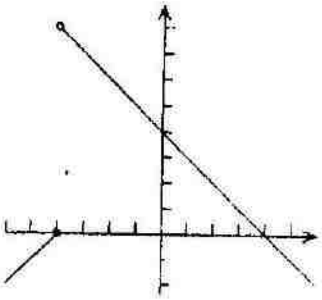


FIGURA 2.3-3

5. $F(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 2 \\ 8 - 2x & \text{se } 2 < x \end{cases}$

(a) $\lim_{x \to 2^+} F(x) = \lim_{x \to 2^+} (8 - 2x) = 4$

(b) $\lim_{x \to 2^-} F(x) = \lim_{x \to 2^-} x^2 = 4$

(c) $\lim_{x \to 2} F(x) = 4$ pelo Teorema 2.3.3.

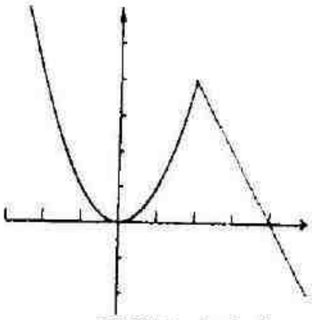


FIGURA 2.3-5

7. $g(r) = \begin{cases} 2r + 3 & \text{se } r < 1 \\ 2 & \text{se } r = 1 \\ 7 - 2r & \text{se } 1 < r \end{cases}$

(a) $\lim_{r \to 1^+} g(r) = \lim_{r \to 1^+} (7 - 2r) = 5$

(b) $\lim_{r \to 1^-} g(r) = \lim_{r \to 1^-} (2r + 3) = 5$

(c) $\lim_{r \to 1} g(r) = 5$ pelo Teorema 2.3.3.

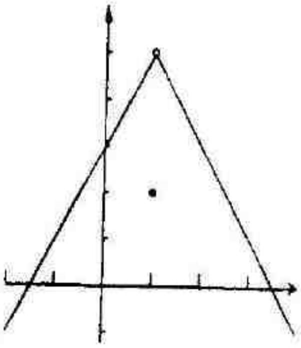


FIGURA 2.3-7

9. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x < 2 \\ 4 & \text{se } x = 2 \\ 4 - x^2 & \text{se } 2 < x \end{cases}$

(a) $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (4 - x^2) = 0$

(b) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 - 4) = 0$

(c) $\lim_{x \to 2} f(x) = 0$ pelo Teorema 2.3.3

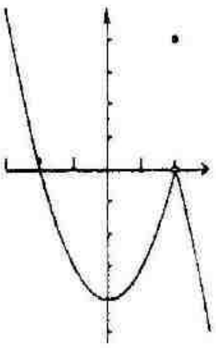


FIGURA 2.3-9

11. $F(x) = |x - 5|$

(a) $\lim_{x \to 5^+} F(x) = \lim_{x \to 5^+} (x - 5) = 0$

(b) $\lim_{x \to 5^-} F(x) = \lim_{x \to 5^-} (5 - x) = 0$

(c) $\lim_{x \to 5} F(x) =$ pelo Teorema 2.3.3

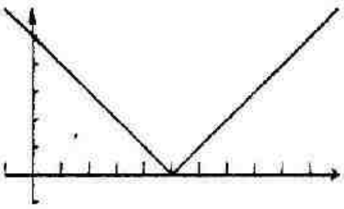


FIGURA 2.3-11

13. $G(x) = |2x - 3| - 4$

(a) $\lim_{x \to 3/2^+} G(x) = \lim_{x \to 3/2^+} [(2x - 3) - 4] = -4$

(b) $\lim_{x \to 3/2^-} G(x) = \lim_{x \to 3/2^-} [(3 - 2x) - 4] = -4$

(c) $\lim_{x \to 3/2} G(x) = -4$ pelo Teorema 2.3.3

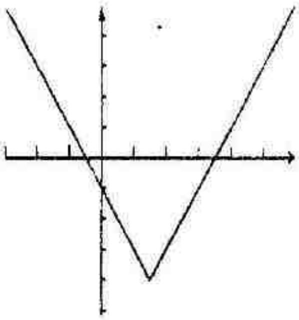


FIGURA 2.3-13

15. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

(a) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$

(b) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \dfrac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$

(c) $\lim_{x \to 0} f(x)$ não existe, pois $\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x)$.

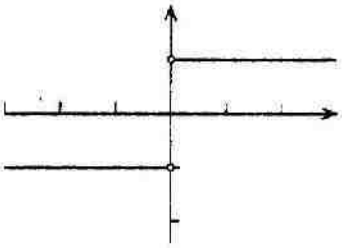


FIGURA 2.3-15

17. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < -2 \\ \sqrt{4 - x^2} & \text{se } -2 \le x \le 2 \\ -2 & \text{se } 2 < x \end{cases}$

(a) $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} 2 = 2$

(b) $\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0$

(c) $\lim_{x \to -2} f(x)$ não existe, pois $\lim_{x \to -2^-} f(x) \ne \lim_{x \to -2^+} f(x)$.

(d) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0$

(e) $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (-2) = -2$

(f) $\lim_{x \to 2} f(x)$ não existe, pois $\lim_{x \to 2^-} f(x) \ne \lim_{x \to 2^+} f(x)$.

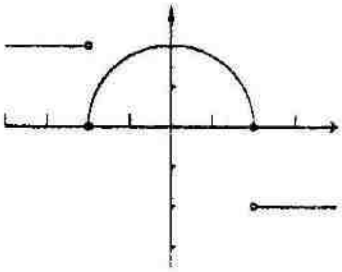


FIGURA 2.3-17

19. $f(t) = \begin{cases} \sqrt[3]{t} & \text{se } t < 0 \\ \sqrt{t} & \text{se } 0 \le t \end{cases}$

(a) $\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{t \to 0^+} \sqrt{t} = 0$

(b) $\lim_{t \to 0^-} f(t) = \lim_{t \to 0^-} \sqrt[3]{t} = 0$

(c) $\lim_{t \to 0} f(t) = 0$ pelo Teorema 2.3.3

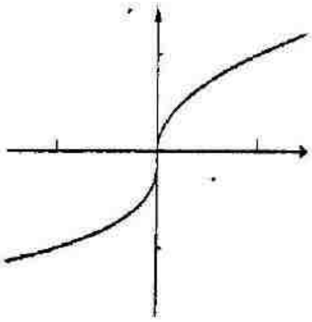


FIGURA 2.3-19

21. $F(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 9} & \text{se } x \le -3 \text{ ou } 3 \le x \\ \sqrt{9 - x^2} & \text{se } -3 < x < 3 \end{cases}$

(a) $\lim_{x \to -3^-} F(x) = \lim_{x \to -3^-} \sqrt{x^2 - 9} = 0$

(b) $\lim_{x \to -3^+} F(x) = \lim_{x \to -3^+} \sqrt{9 - x^2} = 0$

(c) $\lim_{x \to -3} F(x) = 0$ pelo Teorema 2.3.3

(d) $\lim_{x \to 3^-} F(x) = \lim_{x \to 3^-} \sqrt{9 - x^2} = 0$

(e) $\lim_{x \to 3^+} F(x) = \lim_{x \to 3^+} \sqrt{x^2 - 9} = 0$

(f) $\lim_{x \to 3} F(x) = 0$ pelo Teorema 2.3.3

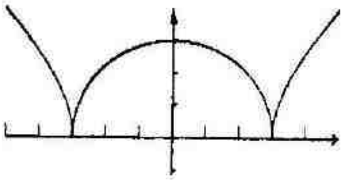


FIGURA 2.3-21

23. $F(x) = x - 2 \operatorname{sgn} x = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x = 0 \\ x - 2 & \text{se } 0 < x \end{cases}$

(a) $\lim_{x \to 0^+} F(x) = \lim_{x \to 0^+} (x - 2) = -2$ (b) $\lim_{x \to 0^-} F(x) = \lim_{x \to 0^-} (x + 2) = 2$

(c) $\lim_{x \to 0} F(x)$ não existe, pois $\lim_{x \to 0^-} F(x) \ne \lim_{x \to 0^+} F(x)$.

25. (a) $\lim_{x\to 2^+} [\![x]\!] = 2$ (b) $\lim_{x\to 2^-} [\![x]\!] = 1$

(c) $\lim_{x\to 2} [\![x]\!]$ não existe, pois $\lim_{x\to 2^-} [\![x]\!] \neq \lim_{x\to 2^+} [\![x]\!]$.

27. $h(x) = (x-1)\,\mathrm{sgn}\, x = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x - 1 & \text{se } 0 < x \end{cases}$

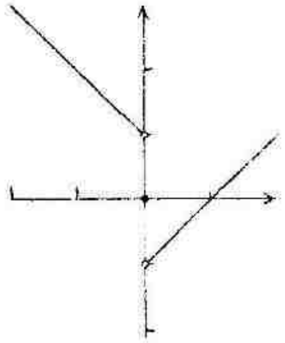


FIGURA 2.3-27

(a) $\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} (x-1) = -1$

(b) $\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} (1-x) = 1$

(c) $\lim_{x\to 0} h(x)$ não existe, pois $\lim_{x\to 0^-} h(x) \neq \lim_{x\to 0^+} h(x)$.

29. $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{se } x < 4 \\ 5x + k & \text{se } 4 \le x \end{cases}$

$\lim_{x\to 4} f(x)$ existe se e somente se $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x)$.

$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} (3x+2) = 14$ $\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} (5x+k) = 20 + k$

Portanto, $\lim_{x\to 4} f(x)$ existe se e somente se $20 + k = 14$; logo, $k = -6$.

31. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \le -2 \\ ax + b & \text{se } -2 < x < 2 \\ 2x - 6 & \text{se } 2 \le x \end{cases}$

Se $\lim_{x\to -2} f(x)$ existe, então $\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^+} f(x)$; isto é, $4 = -2a + b$.

Se $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe, então $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$; isto é, $2a + b = -2$.

Resolvendo essas equações simultaneamente, obtemos $a = -\frac{3}{2}$, $b = 1$.

33. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \end{cases}$; $|f(x)| = 1$ se $x \neq 0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (1) = 1$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe. Mas, $\lim_{x\to 0} |f(x)| = \lim_{x\to 0} 1 = 1$.

35. $C(x) = \begin{cases} 0{,}80\,x & \text{se } 0 < x \le 50 \\ 0{,}70\,x & \text{se } 50 \le x \le 200 \\ 0{,}65\,x & \text{se } 200 < x \end{cases}$

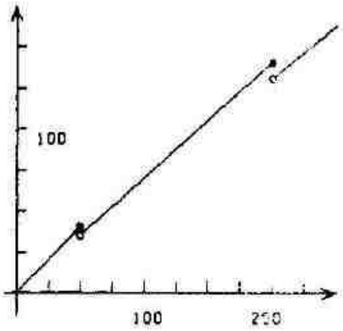


FIGURA 2.3-35

(b) $\lim_{x\to 50^-} C(x) = \lim_{x\to 50^-} 0{,}80\,x = 0{,}80(50) = 40$

(c) $\lim_{x\to 50^+} C(x) = \lim_{x\to 50^+} 0{,}70\,x = 0{,}70(50) = 35$

(d) $\lim_{x\to 200^-} C(x) = \lim_{x\to 200^-} 0{,}70\,x = 0{,}70(200) = 140$

(e) $\lim_{x\to 200^+} C(x) = \lim_{x\to 200^+} 0{,}65\,x = 0{,}65(200) = 130$

EXERCÍCIOS 2.4 Limites Infinitos

1. (a) $f(x) = \frac{1}{x-5}$,

x	6	5,5	5,1	5,01	5,001	5,0001
f(x)	1	2	10	100	1.000	10.000

(b) $\lim_{x \to 5^+} 1 = 1$ e $\lim_{x \to 5^+}(x - 5) = 0$ por valores positivos. Então, $\lim_{x \to 5^+} \frac{1}{x-5} = +\infty$.

3. (a) $f(x) = \frac{1}{(x-5)^2}$,

x	6	5,5	5,1	5,01	5,001	5,0001
f(x)	1	4	100	10.000	1.000.000	100.000.000

x	4	4,5	4,9	4,99	4,999	4,9999
f(x)	1	4	100	10.000	1.000.000	100.000.000

(b) $\lim_{x \to 5} 1 = 1$ e $\lim_{x \to 5}(x - 5)^2 = 0$ por valores positivos. Então, $\lim_{x \to 5} \frac{1}{(x-5)^2} = +\infty$.

5. (a) $f(x) = \frac{x+2}{1-x}$,

x	2	1,5	1,1	1,01	1,001	1,0001
f(x)	-4	-7	-31	-301	- 3.001	-30.001

(b) $\lim_{x \to 1^+}(x + 2) = 3$ e $\lim_{x \to 1^+}(1 - x) = 0$ por valores negativos. Então, $\lim_{x \to 1^+} \frac{x+2}{1-x} = -\infty$.

7. (a) $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$,

x	0	-0,5	-0,9	-0,99	-0,999	-0,9999
f(x)	-2	-5	-29	-299	-2.999	-29.999

(b) $\lim_{x \to -1^+}(x - 2) = -3$ e $\lim_{x \to -1^+}(x + 1) = 0$ por valores positivos. Então, $\lim_{x \to -1^+} \frac{x-2}{x+1} = -\infty$.

9. (a) $f(x) = \frac{x}{x+4}$,

x	-5	-4,5	-4,1	-4,01	-4,001	-4,0001
f(x)	5	19	41	401	4.001	40.001

(b) $\lim_{x \to -4^-} x = -4$ e $\lim_{x \to -4^-}(x + 4) = 0$ por valores negativos. Então $\lim_{x \to -4^-} \frac{x}{x+4} = +\infty$.

11. (a) $f(x) = \frac{4x}{9-x^2}$,

x	-4	-3,5	-3,1	-3,01	-3,001	-3,0001
f(x)	2,3	4,3	20,3	200,3	2000,5	20.037

(b) $\lim_{x \to -3^-} 4x = -12$ e $\lim_{x \to -3^-}(9 - x^2) = 0$ por valores negativos. Então, $\lim_{x \to -3^-} \frac{4x}{9-x^2} = +\infty$.

13. $\lim_{t \to 2^+} \frac{t+2}{t^2-4} = \lim_{t \to 2^+} \frac{t+2}{(t+2)(t-2)} = \lim_{t \to 2^+} \frac{1}{t-2} = +\infty$.

15. $\lim_{t \to 2^-} \frac{t+2}{t^2-4} = \lim_{t \to 2^-} \frac{t+2}{(t+2)(t-2)} = \lim_{t \to 2^-} \frac{1}{t-2} = -\infty$.

17. $\lim_{x \to 0^-} \sqrt{3 + x^2} = \sqrt{3}$ e $\lim_{x \to 0^-} x = 0$ por valores negativos. Portanto, $\lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x} = -\infty$.

19. $\lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{x-3}\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}\sqrt{x-3}} = \lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}}$; $\lim_{x \to 3^+} \sqrt{x+3} = \sqrt{6}$

e $\lim_{x \to 3^+} \sqrt{x-3} = 0$ por valores positivos. Portanto, $\lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}} = +\infty$.

21. $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x-1}{x^2}$; $\lim_{x \to 0^+}(x - 1) = -1$ e $\lim_{x \to 0^+} x^2 = 0$ por valores positivos.

Portanto, $\lim_{x \to 0^+} \frac{x-1}{x^2} = -\infty$.

23. $\lim_{x \to 0^-}(2 - 4x^3) = 2$ e $\lim_{x \to 0^-}(5x^2 + 3x^3) = 0$ por valores positivos. Então, $\lim_{x \to 0^-} \frac{2-4x^3}{5x^2+3x^3} = +\infty$.

25. $\lim_{t\to-4^-}\left[\frac{2}{t^2+3t-4}-\frac{3}{t+4}\right]=\lim_{t\to-4^-}\left[\frac{2}{(t+4)(t-1)}-\frac{3(t-1)}{(t+4)(t-1)}\right]=\lim_{t\to-4^-}\frac{5-3t}{(t+4)(t-1)}$

$\lim_{t\to-4^-}(5-3t)=17$ e $\lim_{t\to-4^-}(t+4)(t-1)=0$ por valores positivos. Portanto,

$\lim_{t\to-4^-}\frac{5-3t}{(t+4)(t-1)}=+\infty$.

27. $\lim_{x\to3^-}([\![x]\!]-x)=\lim_{x\to3^-}[\![x]\!]-3=\lim_{x\to3^-}(2)-3=-1$ e $\lim_{x\to3^-}(3-x)=0$ por valores positivos.

Portanto, $\lim_{x\to3^-}\frac{[\![x]\!]-x}{3-x}=-\infty$.

29. $\lim_{x\to3^-}\frac{x^3+9x^2+20x}{x^2+x-12}=\lim_{x\to3^-}\frac{x(x+5)(x+4)}{(x-3)(x+4)}=\lim_{x\to3^-}\frac{x(x+5)}{x-3}$

$\lim_{x\to3^-}x(x+5)=24$ e $\lim_{x\to3^-}(x-3)=0$ por valores negativos. Então, $\lim_{x\to3^-}\frac{x(x+5)}{x-3}=-\infty$.

31. $\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(\sqrt{2x-x^2}+1)}{(\sqrt{2x-x^2}-1)(\sqrt{2x-x^2}+1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(\sqrt{2x-x^2}+1)}{2x-x^2-1}$

$=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(\sqrt{2x-x^2}+1)}{-(x-1)^2}=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{2x-x^2}+1}{1-x}$

$\lim_{x\to1^+}(\sqrt{2x-x^2}+1)=2$ e $\lim_{x\to1^+}(1-x)=0$ por valores negativos. Então, $\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{2x-x^2}+1}{1-x}=-\infty$.

33. (a) Como $\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ ou como $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$, $x=0$ é uma assintota vertical.

(b) Como $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=+\infty$, $x=0$ é uma assintota vertical.

(c) Como $\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x^3}=-\infty$ ou como $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^3}=+\infty$, $x=0$ é uma assintota vertical.

(d) Como $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^4}=+\infty$, $x=0$ é uma assintota vertical.

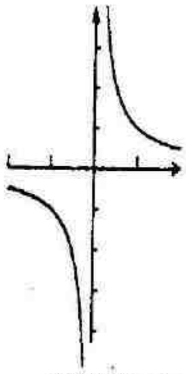


FIGURA 2.4-33(a)

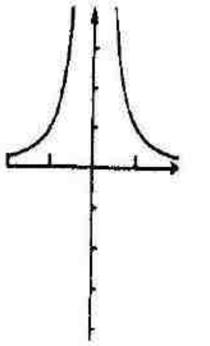


FIGURA 2.4-33(b)

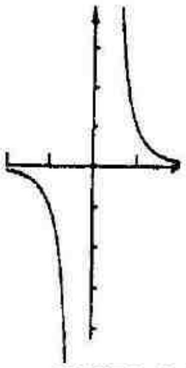


FIGURA 2.4-33(c)

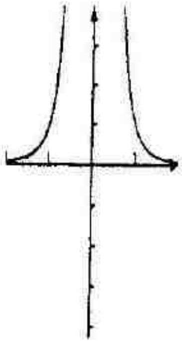


FIGURA 2.4-33(d)

35. Como $\lim_{x\to4^-}\frac{2}{x-4}=-\infty$ ou como $\lim_{x\to4^+}\frac{2}{x-4}=+\infty$, $x=4$ é uma assintota vertical.

37. Como $\lim_{x\to-3^-}\frac{-2}{x+3}=+\infty$ ou como $\lim_{x\to-3^+}\frac{-2}{x+3}=-\infty$, $x=-3$ é uma assintota vertical.

39. Como $\lim_{x \to -3} \frac{-2}{(x+3)^2} = +\infty$, $x = -3$ é uma assíntota vertical.

41. $f(x) = \frac{5}{(x+3)(x+5)}$

Como $\lim_{x \to -5^-} f(x) = +\infty$ ou como $\lim_{x \to -5^+} f(x) = -\infty$, $x = -5$ é uma assíntota vertical.

Como $\lim_{x \to -3^-} f(x) = -\infty$ ou como $\lim_{x \to -3^+} f(x) = +\infty$, $x = -3$ é uma assíntota vertical.

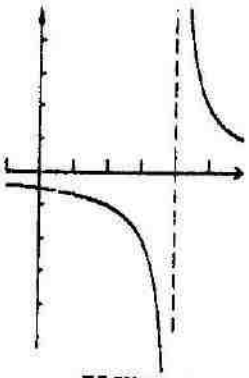


FIGURA 2.4-35

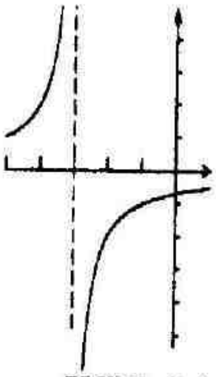


FIGURA 2.4-37

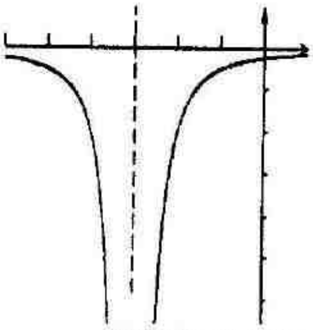


FIGURA 2.4-39

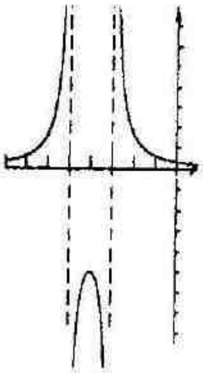


FIGURA 2.4-41

43. Para provar que $\lim_{x \to 2} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$, devemos mostrar que para qquer $N > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

se $0 < |x - 2| < \delta$ então $\frac{3}{(x-2)^2} > N$

$\Longleftrightarrow$ se $0 < |x - 2| < \delta$ então $\frac{3}{N} > (x-2)^2$

$\Longleftrightarrow$ se $0 < |x - 2| < \delta$ então $|x - 2| < \sqrt{\frac{3}{N}}$. Tome $\delta = \sqrt{\frac{3}{N}}$.

45. O Teorema 2.4.3 (ii) estabelece:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty & \text{se } r \text{ for um inteiro positivo impar} \\ +\infty & \text{se } r \text{ for um inteiro positivo par} \end{cases}$$

Se r for um inteiro positivo impar, devemos mostrar que p/ qquer $N < 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

se $-\delta < x < 0$ então $\frac{1}{x^r} < N$

$\Longleftrightarrow$ se $0 < -x < \delta$ então $\frac{1}{-x^r} > -N$

$\Longleftrightarrow$ se $0 < -x < \delta$ então $\frac{1}{(-x)^r} > -N$ (pois r é um inteiro impar)

$\Longleftrightarrow$ se $0 < -x < \delta$ então $(-x)^r < \frac{1}{-N}$ (pois $-x > 0$ e $-N > 0$)

$\Longleftrightarrow$ se $0 < -x < \delta$ então $-x < \left(-\frac{1}{N}\right)^{1/r}$ (pois r é positivo)

A última afirmação será válida se $\delta = \left(-\frac{1}{N}\right)^{1/r}$

Se r for um inteiro positivo par, devemos mostrar que p/ qquer $N > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

se $-\delta < x < 0$ então $\frac{1}{x^r} > N$

$\iff$ se $0 < -x < \delta$ então $\frac{1}{(-x)^r} > N$ (pois r é um inteiro par)

$\iff$ se $0 < -x < \delta$ então $(-x)^r < \frac{1}{N}$ (pois $-x > 0$ e $N > 0$)

$\iff$ se $0 < -x < \delta$ então $-x < \left(\frac{1}{N}\right)^{1/r}$ (pois r é positivo)

A última afirmação será válida se $\delta = \left(\frac{1}{N}\right)^{1/r}$.

47. O Teorema 2.4.4 (iii) estabelece:

Se $\lim_{x \to a} g(x) = c < 0$ e $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ através de valores positivos de f(x) então $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$.

Devemos mostrar que, para qualquer $N < 0$ existe um $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $\frac{g(x)}{f(x)} < N$.

Como $\lim_{x \to a} g(x) = c$ e $-\frac{1}{2}c > 0$

existe um $\delta_1 > 0$ tal que

se $0 < |x - a| < \delta_1$ então $|g(x) - c| < -\frac{1}{2}c$

$\iff$ se $0 < |x - a| < \delta_1$ então $\frac{1}{2}c < g(x) - c < -\frac{1}{2}c$

$\iff$ se $0 < |x - a| < \delta_1$ então $\frac{3}{2}c < g(x) < \frac{1}{2}c$

$\Rightarrow$ se $0 < |x - a| < \delta_1$ então $-g(x) > -\frac{1}{2}c$

Como $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, então p/ qquer $\epsilon > 0$

existe um $\delta_2 > 0$ tal que

se $0 < |x - a| < \delta_2$ então $|f(x)| < \epsilon$

$\iff$ se $0 < |x - a| < \delta_2$ então $f(x) < \epsilon$

(como $f(x) > 0$)

$\iff$ se $0 < |x - a| < \delta_2$ então $\frac{1}{f(x)} > \frac{1}{\epsilon}$

As duas últimas afirmações implicam: se $0 < |x - a| < \delta_1$ e $0 < |x - a| < \delta_2$ então $-\frac{g(x)}{f(x)} > \frac{-\frac{1}{2}c}{\epsilon}$.

Seja $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Portanto, se $0 < |x - a| < \delta$ então $\frac{g(x)}{f(x)} < \frac{\frac{1}{2}c}{\epsilon}$.

Seja $\epsilon = \frac{c}{2N}$ e $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Assim, se $0 < |x - a| = \delta$ então $\frac{g(x)}{f(x)}$.

Logo, $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$.

49. O Teorema 2.4.5 estabelece: Se c for uma constante qualquer e

(i) se $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = c$ então $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = +\infty$

(ii) se $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = c$ então $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = -\infty$

Como $\lim_{x \to a} g(x) = c$, então para qualquer $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

se $0 < |x - a| < \delta$ então $|g(x) - c| < \epsilon$

Agora, $|g(x)| - |c| \leq |g(x) - c|$. Logo, se $\epsilon = |c| + 1$ existe um δ_1 tal que

se $0 < |x - a| < \delta_1$ então $|g(x) - c| < |c| + 1$

$\iff$ se $0 < |x - a| < \delta_1$ então $|g(x)| < 2|c| + 1$

$\iff$ se $0 < |x - a| < \delta_1$ então $-2|c| - 1 < g(x) < 2|c| + 1$ (1)

Para provar (i) devemos mostrar que para qualquer $N > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

se $0 < |x - a| < \delta$ então $f(x) + g(x) > N$

Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, então para $N + 2|c| + 1 > 0$ existe um $\delta_2 > 0$ tal que

se $0 < |x - a| < \delta_2$ então $f(x) > N + 2|c| + 1$

Se $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, pela afirmação (1) obtemos

se $0 < |x - a| < \delta$

então $f(x) + g(x) > N + 2|c| + 1 - 2|c| - 1$

$\Leftrightarrow$ se $0 < |x - a| < \delta$ então $f(x) + g(x) > N$

Logo, a parte (i) está provada.

Para provar (ii) devemos mostrar que para qualquer $N < 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

se $0 < |x - a| < \delta$ então $f(x) + g(x) < N$

Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, então para $N - 2|c| - 1 < 0$ existe um $\delta_3 > 0$ tal que

se $0 < |x - a| < \delta_3$ então $f(x) < N - 2|c| - 1$

Se $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, pela afirmação (1) obtemos

se $0 < |x - a| < \delta$

então $f(x) + g(x) < N - 2|c| - 1 + 2|c| + 1$

$\Leftrightarrow$ se $0 < |x - a| < \delta$ então $f(x) + g(x) < N$

Logo, a parte (ii) está provada.

51. O Teorema 2.4.7 estabelece:

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, onde c é qualquer constante exceto 0, então

(i) se $c > 0$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = -\infty$

(ii) se $c < 0$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = +\infty$

Para provar (i) devemos mostrar que para qualquer $N < 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

se $0 < |x - a| < \delta$ então $f(x) \cdot g(x) < N$ (1)

Como $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$ e $c > 0$ então para $\epsilon = \frac{1}{2}c > 0$ existe um $\delta_1 > 0$ tal que

se $0 < |x - a| < \delta_1$ então $|g(x) - c| < \frac{1}{2}c$

$\Rightarrow$ se $0 < |x - a| < \delta_1$ então $g(x) - c > -\frac{1}{2}c$

$\Leftrightarrow$ se $0 < |x - a| < \delta_1$ então $g(x) > \frac{1}{2}c > 0$ (2)

Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ então para $\dfrac{2N}{c} < 0$

existe um $\delta_2 > 0$ tal que

se $0 < |x - a| < \delta_2$ então $-f(x) > -\dfrac{2N}{c} > 0$ (3)

Seja $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Segue das afirmações (2) e (3) que

se $0 < |x - a| < \delta$ então $-f(x) \cdot g(x) > -\dfrac{2N}{c} \cdot \dfrac{c}{2} = -N$

Esta é a afirmação (1) provando a parte (i).

Para provar (ii) devemos mostrar que para qualquer $N > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

se $0 < |x - a| < \delta$ então $f(x) \cdot g(x) > N$ (4)

Como $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$ e $c < 0$ então para $\epsilon = -\frac{1}{2}c > 0$ existe um $\delta_3 > 0$ tal que

se $0 < |x - a| < \delta_3$ então $|g(x) - c| < -\frac{1}{2}c$

$\Rightarrow$ se $0 < |x - a| < \delta_3$ então $-g(x) + c > \frac{1}{2}c$

$\Rightarrow$ se $0 < |x - a| < \delta_3$ então $-g(x) > -\frac{1}{2}c > 0$ (5)

Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ então para $\dfrac{2N}{c} < 0$

existe um $\delta_4 > 0$ tal que

se $0 < |x - a| < \delta_4$ então $-f(x) > -\dfrac{2N}{c} > 0$ (6)

Seja $\delta = \min(\delta_3, \delta_4)$. Segue das afirmações (5) e (6) que

se $0 < |x - a| < \delta$ então $f(x) \cdot g(x) > -\dfrac{2N}{c} \cdot -\dfrac{c}{2} = N$

Esta é a afirmação (4) provando a parte (ii).

EXERCÍCIOS 2.5 Limites no Infinito

Nota: Se r for um inteiro positivo então $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^r} = 0$ e $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$. (Teorema de Limite 13)

1. $f(x) = \frac{4}{x^2}$.

x	1	2	4	6	8	10	100	1.000
f	4	1	0,25	0,1111	0,0625	0,0400	0,0004	0,000004

x	−1	−2	−4	−6	−8	−10	−100	−1.000
f	4	1	0,25	0,1111	0,0625	0,0400	0,0004	0,000004

(a) 0 (b) 0 (c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x^2} = 0$ (d) $\lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x^2} = 0$

3. $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

x	1	2	4	6	8	10	100	1.000
f	1	0,1250	0,0156	0,0046	0,0020	0,0010	10^{-6}	10^{-9}

x	−1	−2	−4	−6	−8	−10	−100	−1.000
f	−1	−0,1250	−0,0156	−0,0046	−0,0020	−0,0010	-10^{-6}	-10^{-9}

(a) 0 (b) 0 (c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ (d) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

5. $f(x) = \frac{-3x^2}{x^2 + 1}$.

x	0	1	2	4	6	8	10	100	1.000
f	0	−1,5	−2,4	−2,823	−2,919	−2,953	−2,970	−2,9997	−2,999997

(a) −3

x	−1	−2	−4	−6	−8	−10	−100	−1.000
f	−1,5	−2,4	−2,823	−2,919	−2,953	−2,970	−2,9997	−2,999997

(b) −3

(c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{-3x^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-3}{1 + 1/x^2} = \frac{-3}{1} = -3$ (d) $\lim_{x \to -\infty} \frac{-3x^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-3}{1 + 1/x^2} = \frac{-3}{1} = -3$

7. $f(x) = \frac{4x + 1}{2x - 1}$.

x	2	6	10	100	1.000	10.000	100.000
f	3	2,273	2,158	2,015	2,0015	2,00015	2,000015

(a) 2

x	−2	−6	−10	−100	−1.000	−10.000	−100.000
f	1,4	1,769	1,857	1,985	1,9985	1,99985	1,999985

(b) 2

(c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{4x + 1}{2x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4 + \frac{1}{x}}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{4}{2} = 2$ (d) $\lim_{x \to -\infty} \frac{4x + 1}{2x - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4 + \frac{1}{x}}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{4}{2} = 2$

9. $f(x) = \frac{x + 1}{x^2}$.

x	2	6	10	100	1.000	10.000	100.000
f	0,75	0,1944	0,1100	0,0101	0,0010	0,0001	0,00001

(a) 0

x	−2	−6	−10	−100	−1.000	−10.000	−100.000
f	−0,25	−0,1389	−0,0900	−0,0099	−0,0010	−0,0001	−0,00001

(b) 0

(c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x + 1}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 0 + 0 = 0$ (d) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x + 1}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 0 + 0 = 0$

11. $\lim_{t \to +\infty} \frac{2t + 1}{5t - 2} = \lim_{t \to +\infty} \frac{2 + \frac{1}{t}}{5 - \frac{2}{t}} = \frac{2}{5}$

13. $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x + 7}{4 - 5x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2 + \frac{7}{x}}{\frac{4}{x} - 5} = -\frac{2}{5}$

15. $\lim_{x \to +\infty} \frac{7x^2 - 2x + 1}{3x^2 + 8x + 5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{7 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}} = \frac{7}{3}$

17. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x + 4}{3x^2 - 5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}}{3 - \frac{5}{x^2}} = 0$

19. $\lim_{y \to +\infty} \frac{2y^2 - 3y}{y + 1} = \lim_{y \to +\infty} \frac{2 - \frac{3}{y}}{\frac{1}{y} + \frac{1}{y^2}} = +\infty$

21. $\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^3 + 2x^2 - 5}{8x^3 + x + 2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^3}}{8 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}} = \frac{1}{2}$

23. $\lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{2y^3 - 4}{5y + 3} = \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{2 - \frac{4}{y^3}}{\frac{5}{y^2} + \frac{3}{y^3}} = +\infty$

25. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(3x + \dfrac{1}{x^2}\right) = -\infty$

27. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 4}}{x + 4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}}{1 + \frac{4}{x}} = 1$

29. $\lim\limits_{w\to-\infty} \dfrac{\sqrt{w^2 - 2w + 3}}{w + 5} = \lim\limits_{w\to-\infty} \dfrac{\sqrt{1 - \frac{2}{w} + \frac{3}{w^2}}}{-1 - \frac{5}{w}} = -1$

31. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[(\sqrt{x^2 + 1} - x)\dfrac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1} + x}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$

33. $\lim\limits_{r\to+\infty} \sqrt{3r^2 + r} - 2r = \lim\limits_{r\to+\infty}\left[r\left(\sqrt{3 + \frac{1}{r}} - 2\right)\right] = \lim\limits_{r\to+\infty} r\cdot(\sqrt{3} - 2) = -\infty$

35. $\lim\limits_{x\to-\infty} [(x^3 + x)^{1/3} - (x^3 + 1)^{1/3}]$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[[(x^3 + x)^{1/3} - (x^3 + 1)^{1/3}]\frac{(x^3 + x)^{2/3} + (x^3 + x)^{1/3}(x^3 + 1)^{1/3} + (x^3 + 1)^{2/3}}{(x^3 + x)^{2/3} + (x^3 + x)^{1/3}(x^3 + 1)^{1/3} + (x^3 + 1)^{2/3}}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{(x^3 + x) - (x^3 + 1)}{(x^3 + x)^{2/3} + (x^3 + x)^{1/3}(x^3 + 1)^{1/3} + (x^3 + 1)^{2/3}}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x - 1}{(x^3 + x)^{2/3} + (x^3 + x)^{1/3}(x^3 + 1)^{1/3} + (x^3 + 1)^{2/3}}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{2/3} + \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{1/3}\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)^{1/3} + \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)^{2/3}}\right] = 0$$

Nota: Um limite de cada par é suficiente para mostrar que a reta dada é uma assíntota.

37. $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 3}$

Como $\lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{2x + 1}{x - 3} = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{2x + 1}{x - 3} = -\infty$,

$x = 3$ é uma assíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x + 1}{x - 3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2 + 1/x}{1 - 3/x} = 2$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$,

$y = 2$ é uma assíntota horizontal.

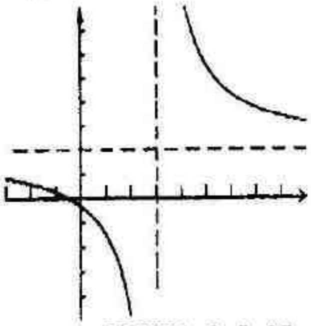


FIGURA 2.5-37

39. $g(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$.

Como $\lim\limits_{x\to0^+} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to0^-} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$,

$x = 0$ é uma assíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = 1$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = 1$,

$y = 1$ é uma assíntota horizontal.

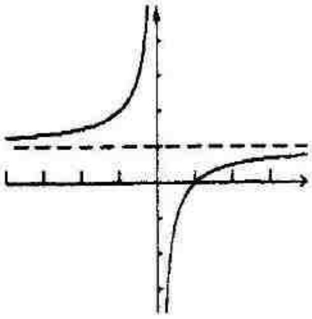


FIGURA 2.5-39

41. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2 - 4}}$, Domínio: $\{x \mid |x| > 2\}$

Como $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$,

$x = 2$ é uma assintota vertical.

Como $\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$,

$x = -2$ é uma assintota vertical.

Como $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ou $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$,

$y = 0$ é uma assintota horizontal.

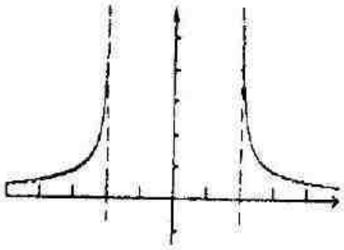


FIGURA 2.5-41

43. $G(x) = \dfrac{4x^2}{x^2 - 9} = \dfrac{4x^2}{(x - 3)(x + 3)}$

Como $\lim_{x \to 3^+} G(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to 3^-} G(x) = -\infty$,

$x = 3$ é uma assintota vertical.

Como $\lim_{x \to -3^+} G(x) = -\infty$ ou $\lim_{x \to -3^-} G(x) = +\infty$,

$x = -3$ é uma assintota vertical.

Como $\lim_{x \to +\infty} G(x) = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{4}{1 - 9/x^2} = 4$ ou $\lim_{x \to -\infty} G(x) = 4$,

$y = 4$ é uma assintota horizontal.

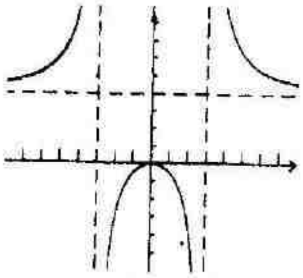


FIGURA 2.5-43

45. $h(x) = \dfrac{2x}{6x^2 + 11x - 10} = \dfrac{2x}{(2x + 5)(3x - 2)}$

Como $\lim_{x \to -5/2^+} h(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to -5/2^-} h(x) = -\infty$,

$x = -\frac{5}{2}$ é uma assintota vertical.

Como $\lim_{x \to 2/3^+} h(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to 2/3^-} h(x) = -\infty$,

$x = \frac{2}{3}$ é uma assintota vertical.

Como $\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{2/x}{6 + 11/x - 10/x^2} = 0$ ou $\lim_{x \to -\infty} h(x) = 0$,

$y = 0$ é uma assintota horizontal.

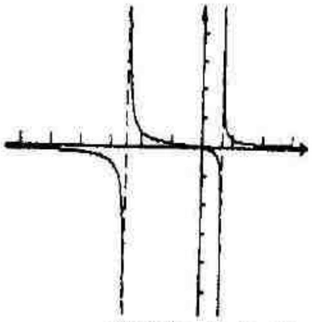


FIGURA 2.5-45

47. $f(x) = \dfrac{4x^2}{\sqrt{x^2 - 2}}$, Domínio: $\{x \mid |x| > \sqrt{2}\}$

Como $\lim_{x \to \sqrt{2}^+} f(x) = +\infty$,

$x = \sqrt{2}$ é uma assintota vertical.

Como $\lim_{x \to -\sqrt{2}^-} f(x) = +\infty$,

$x = -\sqrt{2}$ é uma assintota vertical.

Como $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{4|x|}{\sqrt{1 - 2/x^2}} = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$,

não existem assintotas horizontais.

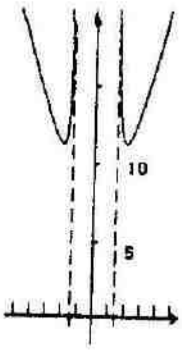


FIGURA 2.5-47

49. $3xy - 2x - 4y - 3 = 0;\ (3x - 4)y = 2x + 3;\ y = \dfrac{2x + 3}{3x - 4}$. Seja $y = f(x)$.

Como $\lim\limits_{x \to 4/3^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to 4/3^-} f(x) = -\infty$,

$x = 4/3$ é uma assíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 + 3/x}{3 - 4/x} = \dfrac{2}{3}$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{2}{3}$,

$y = 2/3$ é uma assíntota horizontal.

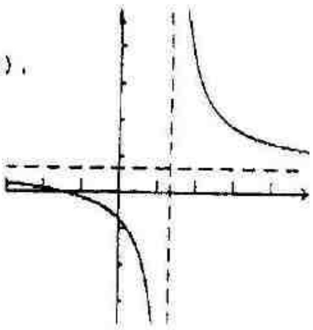


FIGURA 2.5-49

51. $x^2y^2 - x^2 + 4y^2 = 0;\ (x^2 + 4)y^2 = x^2;\ y^2 = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$.

Seja $f_1(x) = \sqrt{\dfrac{x^2}{x^2 + 4}}$ e $f_2(x) = -\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2 + 4}}$.

Como f_1 e f_2 têm limites finitos em qualquer número a,

não existem assíntotas verticais.

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{1}{1 + 4/x^2}} = 1$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = 1$,

$y = 1$ é uma assíntota horizontal.

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -\sqrt{\dfrac{1}{1 + 4/x^2}} = -1$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f_2(x) = -1$,

$y = -1$ é uma assíntota horizontal.

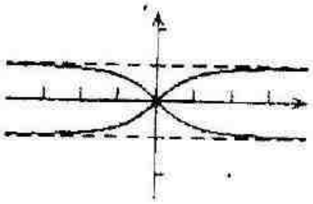


FIGURA 2.5-51

53. $(y^2 - 1)(x - 3) = 6;\ y^2 = 1 + \dfrac{6}{x - 3}$.

Seja $f_1(x) = \sqrt{1 + \dfrac{6}{x - 3}}$ e $f_2(x) = -\sqrt{1 + \dfrac{6}{x - 3}}$.

Como $\lim\limits_{x \to 3^+} f_1(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to 3^-} f_2(x) = -\infty$,

$x = 3$ é uma assíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = 1$,

$y = 1$ é uma assíntota horizontal.

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = -1$,

$y = -1$ é uma assíntota horizontal.

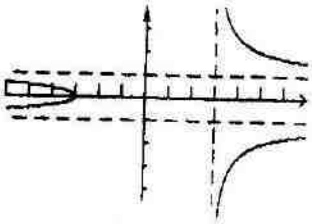


FIGURA 2.5-53

55. $x^2y - 2x^2 - y - 2 = 0;\ (x^2 - 1)y = 2x^2 + 2;\ y = \dfrac{2x^2 + 2}{x^2 - 1}$. Seja $y = f(x)$.

Como $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$,

$x = 1$ é uma assíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$,

$x = -1$ é uma assíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 + 2/x^2}{1 - 1/x^2} = 2$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$,

$y = 2$ é uma assíntota horizontal.

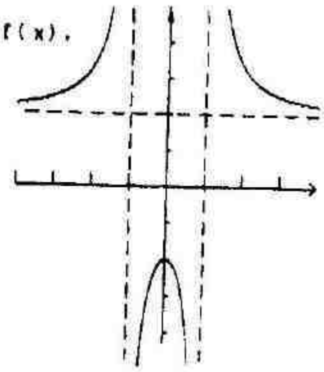


FIGURA 2.5-55

57. $f(x) = \frac{x}{x-1}$. Dado um $\epsilon > 0$ procuramos um $N > 0$ tal que

Se $x > N$ então $\left|\frac{x}{x-1} - 1\right| < \epsilon$

$\iff$ Se $x > N$ então $\frac{1}{x-1} < \epsilon$

$\iff$ Se $x > N$ então $x - 1 > \frac{1}{\epsilon}$

$\iff$ Se $x > N$ então $x > \frac{1}{\epsilon} + 1$

As hipóteses são válidas se $N = \frac{1}{\epsilon} + 1$.

59. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. Dado um $\epsilon > 0$ procuramos um $N > 0$ tal que

Se $x > N$ então $\left|\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} - 1\right| < \epsilon$

$\iff$ Se $x > N$ então $\left|\frac{-2}{x^2 + 1}\right| < \epsilon$

$\iff$ Se $x > N$ então $x^2 + 1 > \frac{2}{\epsilon}$

$\iff$ Se $x > N$ então $x > \sqrt{\frac{2}{\epsilon} - 1}$

As hipóteses são válidas se $N = \sqrt{\frac{2}{\epsilon} - 1}$.

61. Seja $f(x) = \frac{8x + 3}{2x - 1}$. Dado um $\epsilon > 0$, procuramos um $N < 0$ tal que

Se $x < N$ então $\left|\frac{8x + 3}{2x - 1} - 4\right| < \epsilon$

$\iff$ Se $x < N$ então $\left|\frac{7}{2x - 1}\right| < \epsilon$

$\iff$ Se $x < N$ então $2x - 1 < -\frac{7}{\epsilon}$

$\iff$ Se $x < N$ então $x < \frac{1}{2}\left(-\frac{7}{\epsilon} + 1\right)$

As hipóteses são válidas se $N = -\frac{7}{2\epsilon} + \frac{1}{2} = \frac{\epsilon - 7}{2\epsilon}$.

63. (a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$: dado qualquer número $N < 0$ existe um número $M > 0$ tal que se $x > M$ então $f(x) < N$.

(b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$: dado qualquer número $N > 0$ existe um número $M < 0$ tal que se $x < M$ então $f(x) > N$.

(c) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$: dado qualquer número $N < 0$ existe um número $M < 0$ tal que se $x < M$ então $f(x) < N$.

65. $\lim_{x \to +\infty} (6 - x - x^2) = -\infty$. Usando 63(a), dado um número $N < 0$ procuramos um $M > 0$ tal que

Se $x > M$ então $6 - x - x^2 < N$

$\Leftarrow$ Se $x > M$ então $6 - x < N$

$\iff$ Se $x > M$ então $x > 6 - N$

As hipóteses são válidas se $M = 6 - N$.

EXERCÍCIOS 2.6 Continuidade de uma Função em um Número

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3} = \dfrac{(x + 3)(x - 2)}{x + 3} = x - 2$ se $x \neq -3$.

Existe uma quebra no gráfico em −3.

$f(-3)$ não existe. Logo, a condição (i) da Definição 2.6.1 não é verificada em −3.

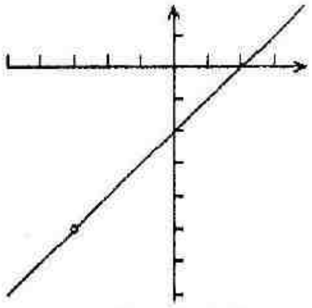


FIGURA 2.6-1

3. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3} & \text{se } x \neq -3 \\ 1 & \text{se } x = -3 \end{cases} = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x \neq -3 \\ 1 & \text{se } x = -3 \end{cases}$

Existe uma quebra no gráfico em −3.

(i) $g(-3) = 1$; (ii) $\lim\limits_{x \to -3} g(x) = -5$; (iii) $\lim\limits_{x \to -3} g(x) \neq g(-3)$.

Assim, a condição (iii) da Definição 2.6.1 não é verificada em −3. Logo, g é descontínua em −3.

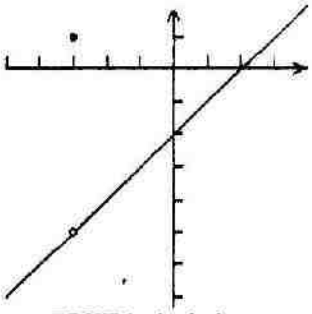


FIGURA 2.6-3

5. $h(x) = \dfrac{5}{x - 4}$

Existe uma quebra no gráfico em 4.

$h(4)$ não existe. Assim, a condição (i) da Definição 2.6.1. não é verificada em 4.

Portanto, f é descontínua em 4.

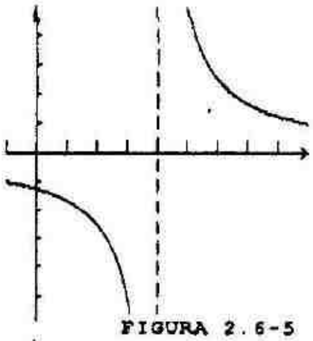


FIGURA 2.6-5

7. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{x - 4} & \text{se } x \neq 4 \\ 1 & \text{se } x = 4 \end{cases}$

Existe uma quebra no gráfico em 4.

$\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$. Logo, a condição (ii) da Definição 2.6.1 não é verificada em 4.

Portanto, f é descontínua em 4.

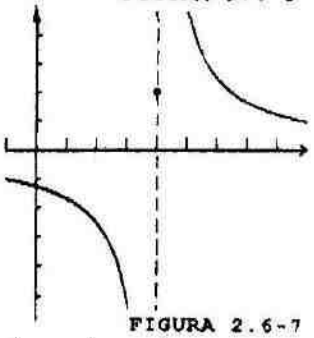


FIGURA 2.6-7

9. $F(x) = \dfrac{x^4 - 16}{x^2 - 4} = \dfrac{(x^2 + 4)(x^2 - 4)}{x^2 - 4} = x^2 + 4$ se $x \neq -2, 2$.

Existem quebras no gráfico em −2 e 2.

$F(-2)$ e $F(2)$ não existem. Assim, a condição (i) da Definição 2.6.1 não é verificada em −2 e 2.

Portanto, F é descontínua em −2 e 2.

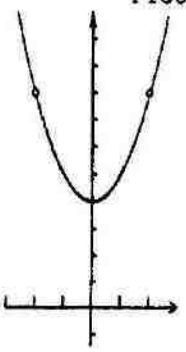


FIGURA 2.6-9

11. $G(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^4 - 16} = \dfrac{x^2 - 4}{(x^2 + 4)(x^2 - 4)} = \dfrac{1}{x^2 + 4}$ se $x \neq -2, 2$.

Existem quebras no gráfico em -2 e 2.

$G(-2)$ e $G(2)$ não existem. Assim, a condição (i) da Definição 2.6.1 não é verificada em -2 e 2.

Portanto, G é descontínua em -2 e 2.

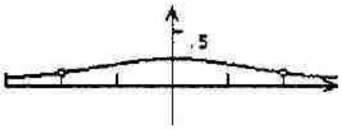


FIGURA 2.6-11

13. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \sqrt{x} & \text{se } 0 < x \end{cases}$

Existe uma quebra no gráfico em 0.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-1) = -1$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$;

portanto, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ não existe. Assim, a condição (ii) da Definição 2.6.1 não é verificada em 0. Logo, f é descontínua em 0.

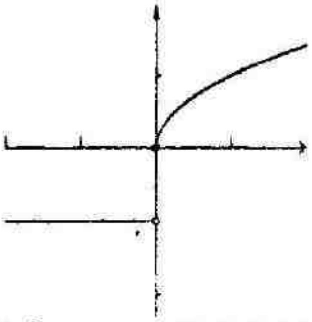


FIGURA 2.6-13

15. $g(t) = \begin{cases} t^2 - 4 & \text{se } t < 2 \\ 4 & \text{se } t = 2 \\ 4 - t^2 & \text{se } 2 < t \end{cases}$

Existe uma quebra no gráfico em 2.

(i) $g(2) = 4$; (ii) $\lim\limits_{t \to 2^-} g(t) = \lim\limits_{t \to 2^-} (t^2 - 4) = 0$ e

$\lim\limits_{t \to 2^+} g(t) = \lim\limits_{t \to 2^+} (4 - t^2) = 0$.

Portanto, $\lim\limits_{t \to 2} g(t) = 0$. (iii) $\lim\limits_{t \to 2} g(t) \neq g(2)$.

Assim, a condição (iii) da Definição 2.6.1 não é verificada em 2. Logo, g é descontínua em 2.

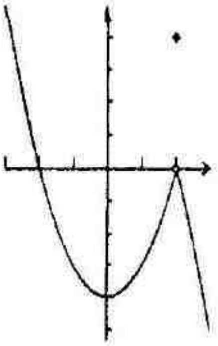


FIGURA 2.6-15

17. $g(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{se } x < 0 \\ \sqrt[3]{x+1} & \text{se } 0 \leq x \end{cases}$

Existe uma quebra no gráfico em 0.

(ii) $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \sqrt{-x} = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt[3]{x+1} = 1$;

portanto, $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ não existe. Assim, a condição (ii) da Definição 2.6.1 não é verificada em 0.

Logo, g é descontínua em 0.

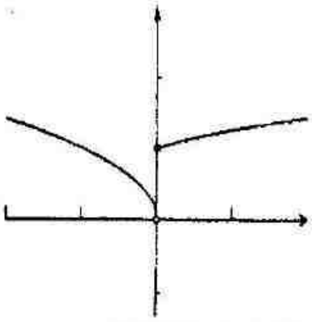


FIGURA 2.6-17

19. $f(x) = -\frac{|x|}{x}$, $x \neq 0$.

Existe uma quebra no gráfico em 0.

$f(0)$ não existe. Logo, a condição (i) da Definição 2.6.1 não é verificada em 0.

Portanto, f é descontínua em 0.

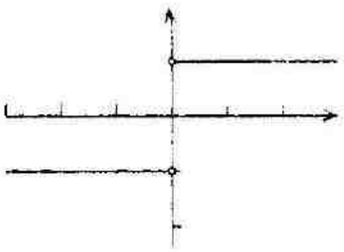


FIGURA 2.6-19

21. Seja $F(x) = [\![x]\!]$.

Existe uma quebra no gráfico em todo inteiro a.

(ii) $\lim_{x \to a^-} F(x) = a - 1$ e $\lim_{x \to a^+} F(x) = a$; logo, $\lim_{x \to a^-} F(x) \neq \lim_{x \to a^+} F(x)$. Assim, a condição (ii) da Definição 2.6.1 não é verificada em a. Logo, F(x) é descontínua em todos os inteiros.

23. $f(x) = \frac{9x^2 - 4}{3x - 2}$

f é descontínua em a, pois $f(a)$ não existe.

$$\lim_{x \to 2/3} \frac{9x^2 - 4}{3x - 2} = \lim_{x \to 2/3} \frac{(3x + 2)(3x - 2)}{3x - 2} = \lim_{x \to 2/3} (3x + 2) = 4$$

A descontinuidade será removível se definirmos $f(a) = 4$ de modo que $f(x) = 3x + 2$.

25. $f(t) = \begin{cases} 9 - t^2 & \text{se } t \leq 2 \\ 3t + 2 & \text{se } 2 < t \end{cases}$

$\lim_{t \to 2^-} f(t) = \lim_{t \to 2^-} (9 - t^2) = 5$; $\lim_{t \to 2^+} f(t) = \lim_{t \to 2^+} (3t + 2) = 8$ de modo q. $\lim_{t \to 2} f(t)$ não existe.

Portanto, f é descontínua em 2 e a descontinuidade é essencial.

27. $f(x) = \begin{cases} |x - 3| & \text{se } x \neq 3 \\ 2 & \text{se } x = 3 \end{cases}$

f é descontínua em 3, pois $\lim_{x \to 3} f(x) = 0$ e $f(3) = 2$.

A descontinuidade será removível se redefinirmos $f(3) = 0$, de modo que $f(x) = |x-3|$.

29. $f(t) = \begin{cases} t^2 - 4 & \text{se } t \leq 2 \\ t & \text{se } 2 < t \end{cases}$

$\lim_{t \to 2^-} f(t) = \lim_{t \to 2^-} (t^2 - 4) = 0$ e $\lim_{t \to 2^+} f(t) = \lim_{t \to 2^+} t = 2$ de modo q. $\lim_{t \to 2} f(t)$ não existe.

Logo, f é descontínua em 2 e a descontinuidade é essencial.

31. $f(x) = \frac{3 - \sqrt{x + 9}}{x}$

f é descontínua em 0, pois f(0) não existe.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{3 - \sqrt{x + 9}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(3 - \sqrt{x + 9})(3 + \sqrt{x + 9})}{x(3 + \sqrt{x + 9})} = \lim_{x \to 0} \frac{9 - (x + 9)}{x(3 + \sqrt{x + 9})} = \lim_{x \to 0} \frac{-1}{3 + \sqrt{x + 9}} = -\frac{1}{6}$$

Logo, a descontinuidade será removível se definirmos $f(0) = -\frac{1}{6}$ de modo q. $f(x) = \frac{-1}{3 + \sqrt{x + 9}}$.

33. $f(x) = x^2(x+3)^2$ é um polinômio. Logo, f é contínua para todos os números reais.

35. $g(x) = \frac{x}{x-3}$ é uma função racional.

Logo, f é contínua em seu domínio: todos os números reais, exceto 3.

37. $F(x) = \frac{x^3+7}{x^2-4}$ é uma função racional.

Logo, F é contínua em seu domínio: todos os números reais, exceto 2 e −2.

39. $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{se } x < 2 \\ 4-x^2 & \text{se } 2 \leq x \end{cases}$

Se $x \neq 2$, $f(x)$ é um polinômio. Logo, f é contínua em números diferentes de 2.

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(3x-1) = 5$ e $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(4-x^2) = 0$; logo $\lim_{x\to 2} f(x)$ não existe.

Portanto, f é descontínua em 2.

41. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } 1 < x \end{cases}$

Se $x \neq 1$, $f(x)$ é uma função racional. Como $f(0) = \frac{1}{0-2} = -\frac{1}{2}$ e $f(2) = \frac{1}{2}$,

f é contínua em números diferentes de 1.

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-2} = -1$ é $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = 1$; logo, $\lim_{x\to 1} f(x)$ não existe.

Portanto, f é descontínua em 1.

43. $C(x) = \begin{cases} 0{,}80x & \text{se } 0 < x \leq 50 \\ 0{,}70x & \text{se } 50 < x \leq 200. \\ 0{,}65x & \text{se } 200 < x \end{cases}$ Veja a Figura 2.3.35.

Existem quebras no gráfico de C em 50 e 200.

$$\lim_{x\to 50^-} C(x) = \lim_{x\to 50^-} 0{,}80x = 40 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 50^+} C(x) = \lim_{x\to 50^+} 0{,}70x = 35$$

Logo, $\lim_{x\to 50} C(x)$ não existe. Portanto, C é descontínua em 50.

$$\lim_{x\to 200^-} C(x) = \lim_{x\to 200^-} 0{,}70x = 140 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 200^+} C(x) = \lim_{x\to 200^+} 0{,}65x = 130$$

Logo, $\lim_{x\to 200} C(x)$ não existe. Portanto, C é descontínua em 200.

45. $f(x) = \begin{cases} |x - [\![x]\!]| & \text{se } [\![x]\!] \text{ for par} \\ |x - [\![x+1]\!]| & \text{se } [\![x]\!] \text{ for impar} \end{cases} = \begin{cases} x - 2k & \text{se} \quad 2k \leq x < 2k+1 \\ 2k + 2 - x & \text{se } 2k+1 \leq x < 2k+2 \end{cases}$

Se a for um inteiro qualquer, f será polinomial (linear) em $(a, a+1)$ e será contínua.

Se $a = 2k$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} (2k - x) = 2k - a = 0$ e $f(a) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} (x - 2k) = a - 2k = 0.$

Se $a = 2k + 1$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} (x - 2k) = a - 2k = 1$; $f(a) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} (2k + 2 - x) = 2k + 2 - a = 1.$

Logo, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ e f é contínua em a.

Portanto, f é contínua em toda parte.

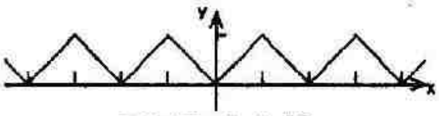


FIGURA 2.6.45

47. $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x + a^3)^{1/3} - a}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{[(x + a^3)^{1/3} - a][(x + a^3)^{2/3} + a(x + a^3)^{1/3} + a^2]}{x[(x + a^3)^{2/3} + a(x + a^3)^{1/3} + a^2]}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x + a^3) - a^3}{x[(x + a^3)^{2/3} + a(x + a^3)^{1/3} + a^2]} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{(x + a^3)^{2/3} + a(x + a^3)^{1/3} + a^2} = \dfrac{1}{3a^2}$

A descontinuidade será removível se definirmos $g(0) = \dfrac{1}{3a^2}$.

49. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$; $(f \cdot g)(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases} = |x|$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1$; logo, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ não existe.

Portanto, f é descontínua em 0.

$\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 1 = 1$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$; logo, $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ não existe.

Portanto, g é descontínua em 0.

$(f \cdot g)(x) = |x|$ portanto $f \cdot g$ é contínua em toda parte; em particular, $f \cdot g$ é contínua em 0.

51. Seja $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ 1 & \text{se } a \leq x \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < a \\ 0 & \text{se } a \leq x \end{cases}$.

Então f e g são descontínuas em a, pois a condição (ii) da Definição 2.6.1 não é verificada em a para ambas as funções. Mas, $(f + g)(x) = 1$ para todo x; portanto, f + g é contínua em toda parte; em particular, f + g é contínua em a.

EXERCÍCIOS 2.7 Continuidade de uma Função Composta e Continuidade em um Intervalo

1. e 25. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = 9 - x^2$; $(f \circ g)(x) = \sqrt{9 - x^2}$

Pelo Teorema 2.6.5(ii), $f \circ g$ é contínua para $g(x) > 0$.

Pelo Teorema 2.6.3, g é contínua para todo x e $g(x) > 0$ para $-3 < x < 3$.

Logo, pelo Teorema 2.7.2, $f \circ g$ é contínua para todo x em $(-3, 3)$. Como

$\lim_{x \to -3^+} (f \circ g)(x) = 0 = (f \circ g)(-3)$ e $\lim_{x \to 3^-} (f \circ g)(x) = 0 = (f \circ g)(3)$, $f \circ g$ é contínua em $[-3, 3]$.

3. e 27. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 - 16$; $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 16}$

Pelo Teorema 2.6.5(ii), $f \circ g$ é contínua para $g(x) > 0$.

Pelo Teorema 2.6.3, g é contínua para todo x e $g(x) > 0$ para $x < -4$ ou $x > 4$.

Logo, pelo Teorema 2.7.2, $f \circ g$ é contínua para todo x em $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$.

Como $\lim_{x \to -4^-} (f \circ g)(x) = 0 = (f \circ g)(-4)$ e $\lim_{x \to 4^+} (f \circ g)(4) = 0 = (f \circ g)(4)$,

$f \circ g$ é contínua em $(-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$.

5. $f(x) = x^3$; $g(x) = \sqrt{x}$; $(f \circ g)(x) = (\sqrt{x})^3 = x^{3/2}$

Pelo Teorema 2.6.3, $f \circ g$ é contínua para todo $g(x)$.

Pelo Teorema 2.6.5 (ii), g é contínua para todo $x > 0$.

Logo, pelo Teorema 2.7.2, $f \circ g$ é contínua para todo $x > 0$.

7. $f(x) = \frac{1}{x}$; $g(x) = x - 2$; $(f \circ g)(x) = \frac{1}{x - 2}$. Pelo Teorema 2.6.4, $f \circ g$ é contínua para todo $x \neq 2$.

9. e 29. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = \frac{1}{x - 2}$; $(f \circ g)(x) = \sqrt{\frac{1}{x - 2}} = \frac{1}{\sqrt{x - 2}}$

Pelo Teorema 2.6.5(ii), $f \circ g$ é contínua para $g(x) > 0$.

Pelo Teorema 2.6.4, g é contínua, exceto em 2 e $g(x) > 0$ para $x > 2$.

Logo, pelo Teorema 2.7.2, $f \circ g$ é contínua em $(2, +\infty)$.

Como $\lim_{x \to 2^+} (f \circ g)(x)$ não existe, $f \circ g$ é contínua apenas em $(2, +\infty)$.

11. e 31. $f(x) = \frac{1}{x - 2}$; $g(x) = \sqrt{x}$; $(f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - 2}$

Pelo Teorema 2.6.4, $f \circ g$ é contínua para $g(x) \neq 2$.

Pelo Teorema 2.6.5(ii), g é contínua para $x > 0$ e $g(x) = 2$ para $x = 4$.

Logo, pelo Teorema 2.7.2, $f \circ g$ é contínua para todos os números positivos, exceto 4.

Como $\lim_{x \to 0^+} (f \circ g)(x) = -\frac{1}{2} = (f \circ g)(0)$, $f \circ g$ é contínua em $[0, 4) \cup (4, +\infty)$.

13. e 33. $f(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{x - 1}}$; $g(x) = |x|$; $(f \circ g)(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{|x| - 1}}$

$\sqrt{4 - x^2}$ é contínua para x em $(-2, 2)$; $\sqrt{|x| - 1}$ é contínua para x em $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Pelo Teorema 2.6.2(iv), $f \circ g$ é contínua para x em $(-2, -1) \cup (1, 2)$.

Como $\lim_{x \to -2^+} (f \circ g)(x) = 0 = (f \circ g)(-2)$ e $\lim_{x \to 2^-} (x) = 0 = (f \circ g)(2)$,

$f \circ g$ é contínua em $[-2, -1) \cup (1, 2]$.

15. $f(x) = \dfrac{2}{x + 5}$; o domínio de f são todos os números reais, exceto −5.

f é contínua em $(3, 7)$, $(-5, +\infty)$, $[-10, -5)$; f é descontínua em $[-6, 4]$, $(-\infty, 0)$, $[-5, +\infty)$.

17. $f(t) = \dfrac{t}{t^2 - 1}$; o domínio de f são todos os números reais, exceto 1 e −1.

f é contínua em $(0, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, 0]$, $(1, +\infty)$; f é descontínua em $[0, 1]$, $(-\infty, -1]$.

19. $g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$; o domínio de g é $\{x \mid x^2 - 9 \geq 0\} = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$.

g é contínua em $(-\infty, -3)$, $(3, \infty)$; g é descontínua em $(-3, 3)$.

Como $\lim_{x \to -3^-} g(x) = \lim_{x \to -3^-} \sqrt{x^2 - 9} = 0 = g(-3)$ e $\lim_{x \to 3^+} g(x) = \lim_{x \to 3^+} \sqrt{x^2 - 9} = 0 = g(3)$,

g também é contínua em $(-\infty, -3]$ e $[3, +\infty)$.

21. $f(t) = \dfrac{|t - 1|}{t - 1}$; o domínio de f são todos os números reais, exceto 1.

f é contínua em $(-\infty, 1)$ e $(1, \infty)$; f é descontínua em $(-\infty, 1]$, $[-1, 1]$, $(-1, \infty)$.

23. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$; o domínio de f é $\{x \mid 4 - x^2 \geq 0\} = [-2, 2]$.

f é contínua em $(-2, 2)$; f é descontínua em $(-\infty, -2]$ e $(2, +\infty)$.

Como $\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0 = f(-2)$ e $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0 = f(2)$,

f também é contínua em $[-2, 2]$, $(-2, 2]$, e $[-2, 2)$.

25. Veja o Ex.1 27. Veja o Ex.3 29. Veja o Ex.9 31. Veja o Ex.11 33. Veja o Ex.13

35-37. Esboços dos gráficos aparecem no texto e nas Respostas dos Exercícios de Número Ímpar.

39. $$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < -2 \\ \sqrt{4 - x^2} & \text{se } -2 \leq x \leq 2 \\ -2 & \text{se } 2 < x \end{cases}$$

$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0 = f(-2)$ e $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0 = f(2)$

Como f é contínua em $(-2, 2)$, f é contínua em $(-\infty, -2) \cup [-2, 2] \cup (2, +\infty)$.

41. Seja $V(x)$ cm^3 o volume da caixa. Então, como volume = comprimento × largura × altura,

$V(x) = x(8 - 2x)(15 - 2x)$. O domínio de V é $[0, 4]$.

V é contínua em seu domínio, pois $V(x)$ é um polinômio.

43. Se x metros for o comprimento do campo e w metros for a largura, então $2x + 2w = 240$; logo, $w = 120 - x$. Se $A(x)$ metros quadrados for a área do campo, então

$A(x) = x(120 - x)$. O domínio de A é $[0, 120]$.

A é contínua em seu domínio, pois $A(x)$ é um polinômio.

45. $f(x) = \begin{cases} 3x + 7 & \text{se } x \leq 4 \\ kx - 1 & \text{se } 4 < x \end{cases}$

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} (3x + 7) = 19 = f(4);$$

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} (kx - 1) = 4k - 1$$

Logo, f será contínua em 4 se e somente se $4k - 1 = 19$; $k = 5$.

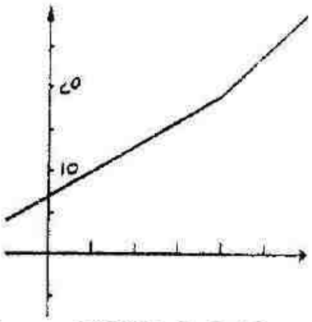


FIGURA 2.7-45

47. $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 1 \\ cx + k & \text{se } 1 < x < 4 \\ -2x & \text{se } 4 \leq x \end{cases}$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x = 1 = f(1)$; $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (cx + k) = c + k$

Portanto, f será contínua em 1 se e somente se $c + k = 1$.

$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} (cx + k) = 4c + k$; $\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} (-2x) = -8 = f(4)$

Portanto, f será contínua em 4 se e somente se $4c + k = -8$.

Resolvendo, $c + k = 1$ e $4c + k = -8$ simultaneamente,

obtemos $c = -3$ e $k = 4$.

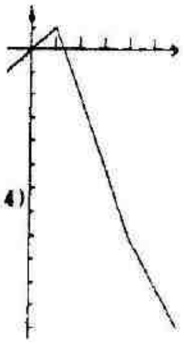


FIGURA 2.7-47

49. $f(x) = 2 + x - x^2$; $[a, b] = [0, 3]$;

1 está entre $f(0) = 2$ e $f(3) = -3$

e f é contínua em $[0,3]$. Portanto,

o teorema do valor intermediário é verificado

e existe um número c entre 0 e 3 tal que $f(c) = 1$:

$2 + c - c^2 = 1$; $c^2 - c - 1 = 0$; $c = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; e $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ está em $[0, 3]$.

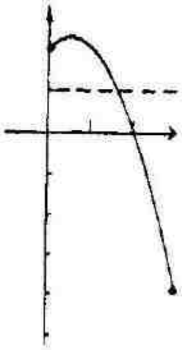


FIGURA 2.7-49

51. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$; $[a, b] = [-4,5, 3]$;

3 está entre $f(-4,5) = \frac{1}{2}\sqrt{19} \approx 2,18$ e $f(3) = 4$

e f é contínua em $[-4,5, 3]$. Portanto,

o teorema do valor intermediário é verificado,

e existe um número c entre −4,5 e 3 tal que $f(c) = 3$:

$\sqrt{25 - c^2} = 3$; $25 - c^2 = 9$; $c^2 = 16$; $c = \pm 4$, e −4 está em $[-4,5, 3]$.

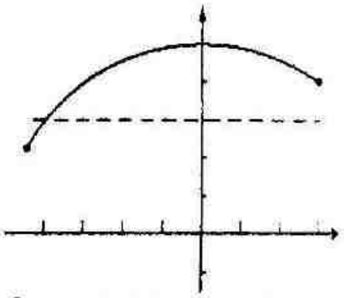


FIGURA 2.7-51

53. $f(x) = \frac{4}{x + 2}$; $[a, b] = [-3, 1]$;

$\frac{1}{2}$ está entre $f(-3) = -4$ e $f(1) = \frac{4}{3}$

mas f é descontínua em −2, e −2 está em $[-3, 1]$.

Portanto, o teorema do valor intermediário não é

verificado e não pode existir um número c entre −3 e 1,

tal que $f(c) = \frac{1}{2}$:

$\frac{4}{c + 2} = \frac{1}{2}$; $8 = c + 2$; $c = 6$. Mas, 6 não está em $[-3, 1]$.

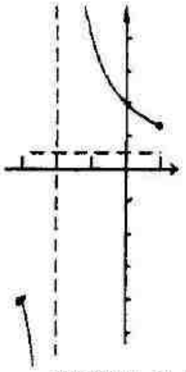


FIGURA 2.7-53

55. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } -2 \le x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{se } 1 \le x \le 3 \end{cases}$; $[a, b] = [-2, 3]$;

−1 não está entre $f(-2) = 0$ e $f(3) = 8$.

Portanto, o teorema do valor intermediário não é

verificado e não pode existir um número c entre −2 e 3,

tal que $f(c) = -1$:

$c^2 - 4 = -1$; $c^2 = 3$; $c = \pm\sqrt{3}$; e $-\sqrt{3}$ está em $[-2, 3]$.

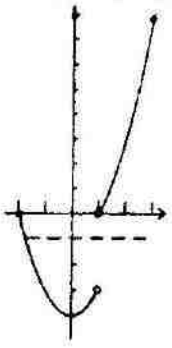


FIGURA 2.7-55

57. Seja $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } a \le x < b \\ h(x) & \text{se } b \le x \le c \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{se } \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$

Então, $g(x) = 0$, $h(x) = 1$, g é contínua em $[0, \frac{1}{2})$ e h é contínua em $[\frac{1}{2}, 1]$;

no entanto, f não é contínua em ½.

Para f ser contínua em b, $\lim_{x \to b^-} g(x)$ deve existir e é igual a $h(b)$.

59. $f(x) = [\![x^2 - 2]\!]$

Procuramos o maior valor de k para o qual f seja contínua no intervalo $[3, 3 + k)$.

$f(3) = [\![9 - 2]\!] = [\![7]\!]$. Se $x > 3$, então $f(x) \le 7$ se e somente se $x^2 - 2 < 8$, isto é, $x < \sqrt{10}$.

Assim, o maior valor de k satisfaz $3 + k = \sqrt{10}$; $k = \sqrt{10} - 3$.

61. Seja $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 3$. Então, $k = 0$ está entre $f(1) = 1$ e $f(2) = -3$ e f é contínua em $[1, 2]$. Logo, o teorema do valor intermediário é verificado e existe um número c entre 1 e 2, tal que $f(c) = 0$; $c^3 - 4c^2 + c + 3 = 0$.

Portanto, a equação $x^3 - 4x^2 + x + 3 = 0$ tem uma raiz entre 1 e 2.

EXERCÍCIOS 2.8 Continuidade das Funções Trigonométricas e o Teorema do "sanduíche"

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{x} = 4 \lim\limits_{4x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{4x} = 4 \cdot 1 = 4$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 9x}{\operatorname{sen} 7x} = \dfrac{9}{7} \cdot \dfrac{\lim\limits_{9x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 9x}{9x}}{\lim\limits_{7x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 7x}{7x}} = \dfrac{9}{7} \cdot \dfrac{1}{1} = \dfrac{9}{7}$

5. $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{3y}{\operatorname{sen} 5y} = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{1}{\lim\limits_{5y \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5y}{5y}} = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{1}{1} = \dfrac{3}{5}$

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{\operatorname{sen}^2 3x} = \left(\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\operatorname{sen} 3x}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{\lim\limits_{3x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x}}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{1}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\cos x} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 0} x}{\lim\limits_{x \to 0} \cos x} = \dfrac{0}{1} = 0$

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 4x}{x} = 4 \lim\limits_{4x \to 0} \dfrac{1 - \cos 4x}{4x} = 4 \cdot 0 = 0$

13. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2}{1 - \cos^2 \frac{1}{2}x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{12(\frac{1}{2}x)^2}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x} = 12\left(\lim\limits_{x/2 \to 0} \dfrac{\frac{1}{2}x}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}x}\right)^2 = 12(1)^2 = 12$

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{2x} = \dfrac{1}{2} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \dfrac{1}{2}$

7. $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t^2} = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t} \cdot \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{1}{t} = +\infty$

19. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{\operatorname{sen} 3x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{x} \cdot \dfrac{x}{\operatorname{sen} 3x} = 2 \lim\limits_{2x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{2x} \cdot \dfrac{1}{3} \dfrac{1}{\lim\limits_{3x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x}} = 2 \cdot 0 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot 1 = 0$

1. Seja $t = \frac{1}{2}\pi - x$. Então, $x = \frac{1}{2}\pi - t$. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{\frac{1}{2}\pi - x} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1 - \operatorname{sen}(\frac{1}{2}\pi - t)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1 - \cos t}{t} = 0$

3. Seja $t = x - \pi$. Então, $x = \pi + t$. $\lim\limits_{x \to \pi^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x - \pi} = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen}(\pi + t)}{t} = -\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t} = -1$

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 3x}{\operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + 3}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 0} x + 3}{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} = \dfrac{3}{1} = 3$

27. Se $x \neq 0$, então, $-1 \le \cos \frac{1}{x} \le 1$; logo,

$$-|x| \le x \cos \frac{1}{x} \le |x| \qquad (1)$$

Como $\lim_{x \to 0} |x| = 0$, segue de (1) e do teorema do "sanduíche" que $\lim_{x \to 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$.

29. Como $0 \le |g(x) + 4| < 2(3 - x)^4$, então

$$-2(3 - x)^4 < g(x) + 4 < 2(3 - x)^4 \qquad (1)$$

Como $\lim_{x \to 3} 2(3 - x)^4 = 0$, segue de (1) e do teorema do "sanduíche" que $\lim_{x \to 3} g(x) + 4 = 0$. Portanto, $\lim_{x \to 3} g(x) = -4$.

31. Enquanto x aproxima-se de 0, o mesmo ocorre com sen x. Logo,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(\text{sen } x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(\text{sen } x)}{\text{sen } x} \cdot \frac{\text{sen } x}{x} = \lim_{\text{sen } x \to 0} \frac{\text{sen}(\text{sen } x)}{\text{sen } x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

33. Como $1 - \cos^2 x \le f(x) \le x^2$ para todo x em $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ então

$$\text{sen}^2 x \le f(x) \le x^2 \text{ para todo } x \text{ em } (-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi) \qquad (1)$$

Como $\lim_{x \to 0} \text{sen}^2 x = 0$ e $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$, segue de (1) e do teorema do "sanduíche" que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

35. Como $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$, e as funções seno e co-seno são contínuas, a função tangente é contínua para todo x para o qual $\cos x \neq 0$.

Portanto, a função tangente é contínua em seu domínio.

37. Como $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, e a função co-seno é contínua, a função secante é contínua em todos os valores de x para os quais $\cos x \neq 0$.

Portanto, a função secante é contínua em seu domínio.

39. Se $|f(x)| \le M$ para todo x, então $-M \le f(x) \le M$ e

$$-Mx^2 \le x^2 f(x) \le x^2 M \qquad (1)$$

Como $\lim_{x \to 0} Mx^2 = 0$, segue de (1) e do teorema do "sanduíche" que $\lim_{x \to 0} x^2 f(x) = 0$.

41. Se $|f(x)| \le k|x - a|$ para todo $x \neq a$, então

$$-k|x - a| \le f(x) \le k|x - a| \qquad (1)$$

Como $\lim_{x \to a} k|x - a| = 0$, segue de (1) e do teorema do "sanduíche" que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

Obs: Se $|f(x)| < g(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, então $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

De fato, $-g(x) < f(x) < g(x)$ e a observação segue do teorema do "sanduíche".

Os resultados dos Exercícios 27, 29, 39 e 41 seguem imediatamente dessa observação.

EXERCÍCIOS 2.9 Provas de Alguns Teoremas Sobre Limites de Funções (Suplementar)

1. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{4}{x+1}$. Seja $f(x) = 4$, $g(x) = x + 1$, $h(x) = \dfrac{1}{x}$.

Então, $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 4$, $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = 3 + 1 = 4$. Pelo Teorema 2.9.5, h é contínua em 4.

Logo, pelo Teorema 2.7.1, $\lim\limits_{x\to 3} h(g(x)) = h(\lim\limits_{x\to 3} g(x)) = h(4) = \frac{1}{4}$.

Assim, pelo T.L.6, $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{4}{x+1} = \lim\limits_{x\to 3} f(x)\cdot h(g(x)) = \lim\limits_{x\to 3} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to 3} h(g(x)) = 4\cdot \frac{1}{4} = 1$

3. $\lim\limits_{t\to -1} \dfrac{t+4}{t-2}$. Seja $f(t) = t + 4$, $g(t) = t - 2$, $h(x) = \dfrac{1}{x}$. Então,

$\lim\limits_{t\to -1} f(t) = -1 + 4 = 3$, $\lim\limits_{t\to -1} g(t) = -1 - 2 = -3$. Pelo Teorema 2.9.5, h é contínua em −3.

Logo, pelo Teorema 2.7.1, $\lim\limits_{t\to -1} h(g(t)) = h(\lim\limits_{t\to -1} g(t)) = h(-3) = -\frac{1}{3}$.

Assim, pelo T.L.6, $\lim\limits_{t\to -1} \dfrac{t+4}{t-2} = \lim\limits_{t\to -1} f(t)\cdot h(g(t)) = \lim\limits_{t\to -1} f(t)\cdot \lim\limits_{t\to -1} h(g(t)) = 3(-\frac{1}{3}) = -1$.

5. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x}{2x^2 - 3x + 4}$. Seja $f(x) = 3x$, $g(x) = 2x^2 - 3x + 4$, $h(x) = \dfrac{1}{x}$. Então,

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3(2) = 6$, $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 2(2)^2 - 3(2) + 4 = 6$. Pelo Teorema 2.9.1, h é contínua em 6.

Logo, pelo Teorema 2.7.1, $\lim\limits_{x\to 2} h(g(x)) = h(\lim\limits_{x\to 2} g(x)) = h(6) = \frac{1}{6}$.

Assim, pelo T.L.6, $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x}{2x^2 - 3x + 4} = \lim\limits_{x\to 2} f(x)\cdot h(g(x)) = \lim\limits_{x\to 2} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to 2} h(g(x)) = 6\cdot \frac{1}{6} = 1$.

7. $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{x^2 - 5}$. Seja $h(x) = \sqrt{x}$ e $f(x) = x^2 - 5$. Então, $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = (3)^2 - 5 = 4$.

Pelo Teorema 2.6.5, h é contínua em 4. Assim, pelo Teorema 2.7.1

$\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{x^2 - 5} = \lim\limits_{x\to 3} h(f(x)) = h(\lim\limits_{x\to 3} f(x)) = h(4) = \sqrt{4} = 2$

9. $\lim\limits_{y\to -4} \sqrt[3]{3y + 4}$. Seja $h(x) = \sqrt[3]{x}$ e $f(y) = 3y + 4$. Então, $\lim\limits_{y\to -4} f(y) = 3(-4) + 4 = -8$.

Pelo Teorema 2.6.5, h é contínua em −8. Assim, pelo Teorema 2.7.1

$\lim\limits_{y\to -4} \sqrt[3]{3y + 4} = \lim\limits_{y\to -4} h(f(y)) = h(\lim\limits_{y\to -4} f(y)) = h(-8) = \sqrt[3]{-8} = -2$

11. $\lim\limits_{t\to 1} \sqrt[4]{t^2 + 5t + 3}$. Seja $h(x) = \sqrt[4]{x}$, $f(t) = t^2 + 5t + 3$. Então, $\lim\limits_{t\to 1} g(t) = (1)^2 + 5(1) + 3 = 9$.

Pelo Teorema 2.6.5, h é contínua em 9. Assim, pelo Teorema 2.7.1

$\lim\limits_{t\to 1} \sqrt[4]{t^2 + 5t + 3} = \lim\limits_{t\to 1} h(f(t)) = h(\lim\limits_{t\to 1} f(t)) = h(9) = \sqrt[4]{9} = \sqrt{3}$

13. Não. Suponha que f/g seja contínua em a e g seja contínua em a. Então, pelo Teorema 2.6.2, o produto $(f/g)g = f$ é contínuo em a. Isso contradiz a hipótese de que f seja descontínua em a, logo, a hipótese de que f/g é contínua em a é falsa.

15. Como $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então para qualquer $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon$$

Como $||c| - |d|| = \sqrt{(|c| - |d|)^2} = \sqrt{c^2 - 2|cd| + d^2} \leq \sqrt{c^2 - 2cd + d^2} = \sqrt{(c - d)^2} = |c - d|$, segue que $||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L|$. Assim, para qualquer $\epsilon > 0$ existirá um $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $||f(x)| - |L|| < \epsilon$

Logo, $\lim_{x \to a} |f(x)| = |L|$.

17. Dado que $f(x) = g(x)$ p/ todos os valores de x, exceto a, e que $\lim_{x \to a} g(x)$ não existe. Supomos que $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, sendo L. Então, para qualquer $\epsilon > 0$ existirá um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon \qquad (1).$$

Na afirmação (1), $0 < |x - a|$ significa $x \neq a$; logo, podemos substituir $f(x)$ por $g(x)$ e temos

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |g(x) - L| < \epsilon$$

Assim, a afirmação implica que $\lim_{x \to a} g(x) = L$ o que contradiz a hipótese de que $\lim_{x \to a} g(x)$ não existe. Portanto, $\lim_{x \to a} f(x)$ não existe.

19. $f(x) = \sqrt[n]{x}$. Queremos provar que se $\underline{a}$ for um número negativo ou zero e, $\underline{n}$ for um inteiro positivo ímpar, então f será contínua em a. Como $\sqrt[n]{a}$ existe quando $a \leq 0$ e $\underline{n}$ é ímpar, a prova ficará completa se mostrarmos que $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$. O intervalo aberto requerido pela Definição 1.2.1 pode ser qualquer intervalo aberto contendo a.

Se $a = 0$ queremos mostrar que para qualquer $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - 0| < \delta \text{ então } |\sqrt[n]{x} - 0| < \epsilon \qquad (1)$$

$$\Longleftrightarrow \text{se } 0 < |x| < \delta \text{ então } \sqrt[n]{|x|} < \epsilon$$

$$\Longleftrightarrow \text{se } 0 < |x| < \delta \text{ então } |x| < \epsilon^n \text{ (pois n é positivo)}$$

Portanto, tomamos $\delta = \epsilon^n$ e a afirmação (1) é satisfeita.

Se $a < 0$, então $-a$ é positivo e $-x$ é positivo em algum intervalo contendo a.

Como n é ímpar, então, do resultado provado no texto, temos

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = -\lim_{-x \to -a} \sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{-a} = \sqrt[n]{a}$$

EXERCÍCIOS 2.10 Teoremas Adicionais de Limites de Funções (Suplementar)

1. $f(x) = \frac{5}{2x+4}$; $c = 3$

(a) $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{5}{2x+4} = \frac{\lim_{x\to 3} 5}{\lim_{x\to 3}(2x+4)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} > 0$

(b) $\frac{5}{2x+4} > 0 \Rightarrow 2x+4 > 0 \Rightarrow x > -2$. Se $-2 < a < 3 < b$ então $f(x) > 0$ para $x \in (a, b)$, $x \neq 3$.

3. $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; $c = 1$

(a) $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2} > 0$

(b) $\frac{1}{\sqrt{x}+1} > 0$ para todo $x \geq 0$. Logo, se $0 \leq a < 1 < b$ então $f(x) > 0$ p/ $x \in (a, b)$, $x \neq 1$.

5. $g(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$; $c = -3$

(a) $\lim_{x\to -3} g(x) = \lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3} = \lim_{x\to -3} \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} = \lim_{x\to -3}(x-3) = -6 < 0$

(b) $x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3$. Logo, se $a < -3 < b < 3$ então $f(x) < 0$ para $x \in (a, b)$, $x \neq -3$.

7. $g(x) = \frac{2-\sqrt{4+x}}{x}$; $c = 0$

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{2-\sqrt{4+x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(2-\sqrt{4+x})(2+\sqrt{4+x})}{x(2+\sqrt{4+x})} = \lim_{x\to 0} \frac{4-(4+x)}{x(2+\sqrt{4+x})} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{2+\sqrt{4+x}} = -\frac{1}{4} < 0$

(b) $\frac{-1}{2+\sqrt{4+x}} < 0$ para todo $x \geq -4$. Logo, se $-4 \leq a < 0 < b$, então $g(x) < 0$ p/ $x \in (a, b)$, $x \neq 0$.

9. $f(x) = \frac{3x}{x+1}$

(a) Seja $L = \lim_{x\to k} \frac{3x}{x+1} = \frac{3k}{k+1}$, $k \neq -1$.

Para determinar os valores de k, tais que $L > 0$, consideramos a seguinte tabela:

	k	$k+1$	$\frac{3k}{k+1}$
$k < -1$	−	−	+
$-1 < k < 0$	−	+	−
$0 < k$	+	+	+

Portanto, $L > 0$ quando k está em $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

(b) Se $a < k < b \leq -1$ ou $0 \leq a < k < b$ então $g(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$.

11. $g(x) = \dfrac{2x^2 + x - 6}{2x^2 + 11x + 14} = \dfrac{(2x-3)(x+2)}{(2x+7)(x+2)} = \dfrac{2x-3}{2x+7}, \quad x \neq -2$

(a) Seja $L = \lim\limits_{x \to k} g(x) = \lim\limits_{x \to k} \dfrac{2x-3}{2x+7} = \dfrac{2k-3}{2k+7}, \quad k \neq -\dfrac{7}{2}$

Para determinar os valores de k, tais que L < 0, consideramos a seguinte tabela:

	$2k - 3$	$2k + 7$	$\dfrac{2k-3}{2k+7}$
$k < -\frac{7}{2}$	-	-	+
$-\frac{7}{2} < k < \frac{3}{2}$	-	+	-
$\frac{3}{2} < k$	+	+	+

Portanto, $L < 0$ quando k está em $(-\frac{7}{2}, \frac{3}{2})$.

(b) Para $k = -2$ seja $-\frac{7}{2} \leq a < -2 < b \leq \frac{3}{2}$ e para $k \neq -2$ seja $-\frac{7}{2} \leq a < k < b \leq -2$ ou $-2 \leq a < k < b \leq \frac{3}{2}$.

Então, $f(x) < 0$ para $x \in (a, b)$, $x \neq k$.

13.

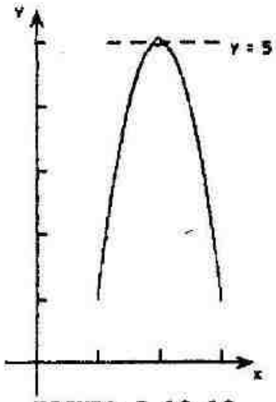


FIGURA 2.10.13

15.

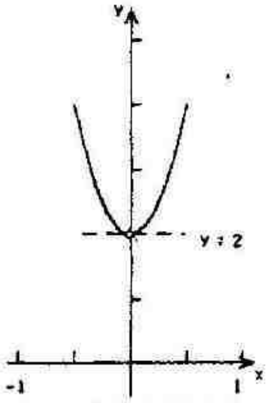


FIGURA 2.10.15

17. O Teorema 2.10.2 estabelece:

Se $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ existir e for negativo, existirá um intervalo aberto contendo c, tal que $f(x) < 0$ para todo $x \neq c$ no intervalo.

Prova: Seja $g(x) = -f(x)$. Então, $\lim\limits_{x \to c} g(x) = -\lim\limits_{x \to c} f(x) = -L > 0$. Logo, pelo Teorema 2.10.1 existe um intervalo aberto contendo c, tal que para todo $x \neq c$ no intervalo $g(x) > 0$ isto é, $f(x) < 0$.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 2

1. $\lim\limits_{x \to 2}(3x^2 - 4x + 5) \overset{L.T.4}{=} \lim\limits_{x \to 2} 3x^2 + \lim\limits_{x \to 2}(-4x + 5) \overset{L.T.7,\ L.T.8}{\underset{L.T.1}{=}} \lim\limits_{x \to 2} 3\left(\lim\limits_{x \to 2} x\right)^2 + (-3) \overset{L.T.3}{\underset{L.T.2}{=}} 3(2)^2 - 3 = 9$

3. $\lim\limits_{z \to -3} \dfrac{z^2 - 9}{z + 3} = \lim\limits_{z \to -3} \dfrac{(z - 3)(z + 3)}{z + 3} = \lim\limits_{z \to -3}(z - 3) \overset{L.T.1}{=} -6$

5. $\lim\limits_{x \to 1/2} \sqrt[3]{\dfrac{4x^2 + 4x - 3}{4x^2 - 1}} = \lim\limits_{x \to 1/2} \sqrt[3]{\dfrac{(2x - 1)(2x + 3)}{(2x - 1)(2x + 1)}} = \lim\limits_{x \to 1/2} \sqrt[3]{\dfrac{2x + 3}{2x + 1}} \overset{L.T.10}{=} \sqrt[3]{\lim\limits_{x \to 1/2}\left(\dfrac{2x + 3}{2x + 1}\right)}$

$\overset{L.T.9}{=} \sqrt[3]{\dfrac{\lim\limits_{x \to 1/2}(2x + 3)}{\lim\limits_{x \to 1/2}(2x + 1)}} \overset{L.T.1}{=} \sqrt[3]{\dfrac{4}{2}} = \sqrt[3]{2}$

7. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{9 - t} - 3}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{(\sqrt{9 - t} - 3)(\sqrt{9 - t} + 3)}{t(\sqrt{9 - t} + 3)} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{-t}{t(\sqrt{9 - t} + 3)} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{-1}{\sqrt{9 - t} + 3} \overset{L.T.9}{=} \dfrac{\lim\limits_{t \to 0}(-1)}{\lim\limits_{t \to 0}(\sqrt{9 - t} + 3)}$

$\overset{L.T.4}{\underset{L.T.2}{=}} \dfrac{-1}{\lim\limits_{t \to 0}\sqrt{9 - t} + \lim\limits_{t \to 0} 3} \overset{L.T.10}{\underset{L.T.2}{=}} \dfrac{-1}{\sqrt{\lim\limits_{t \to 0}(9 - t)} + 3} \overset{L.T.1}{=} \dfrac{-1}{\sqrt{9} + 3} = -\dfrac{1}{6}$

9. Queremos determinar um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - 3| < \delta \text{ então } |(2x - 5) - 1| < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \text{se } 0 < |x - 3| < \delta \text{ então } |2x - 6| < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \text{se } 0 < |x - 3| < \delta \text{ então } |x - 3| < \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

Logo, tomamos $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$; então,

$$0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow 2|x - 3| < 2(\tfrac{1}{2}\varepsilon) \Rightarrow |(2x - 5) - 1| < \varepsilon$$

11. Queremos determinar um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x + 1| < \delta \text{ então } |(3x + 8) - 5| < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \text{se } 0 < |x + 1| < \delta \text{ então } |3x + 3| < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \text{se } 0 < |x + 1| < \delta \text{ então } 3|x + 1| < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \text{se } 0 < |x + 1| < \delta \text{ então } |x + 1| < \tfrac{1}{3}\varepsilon$$

Logo, tomamos $\delta = \frac{1}{3}\varepsilon$; então,

$$0 < |x + 1| < \delta \Rightarrow 3|x + 1| < 3(\tfrac{1}{3}\varepsilon) \Rightarrow |(3x + 8) - 5| < \varepsilon$$

13. Queremos determinar um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x + 4| < \delta \text{ então } |x^2 - 16| < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \text{se } 0 < |x + 4| < \delta \text{ então } |x + 4||x - 4| < \varepsilon$$

Seja $(-5, -3)$ o intervalo aberto requerido pela Definição 2.2.1, o que implica que $\delta \leq 1$.

Então, $-5 < x < -3 \Rightarrow -9 < x - 4 < -7 \Rightarrow |x - 4| < 9$.

Agora, $0 < |x + 4| < \delta$ e $|x - 4| < 9 \Rightarrow |x + 4||x - 4| < \delta \cdot 9$. Assim, requeremos que $9\delta \leq \varepsilon$.

$\Longleftrightarrow \delta \leq \frac{1}{9}\varepsilon$. Logo, $\delta = \min(1, \frac{1}{9}\varepsilon)$. Então,

$$0 < |x + 4| < \delta \Rightarrow |x + 4||x - 4| < \delta \cdot 9 \Rightarrow |x^2 - 16| < \tfrac{1}{9}\varepsilon \cdot 9 \Rightarrow |x^2 - 16| < \varepsilon$$

N. do E.: L.T. - Teorema de Limite

15. Queremos determinar um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - 2| < \delta \text{ então } |(x^2 - 3x) - (-2)| < \epsilon$$

$$\Longleftrightarrow \text{se } 0 < |x - 2| < \delta \text{ então } |x - 1||x - 2| < \epsilon$$

Seja (1,3) o intervalo aberto requerido pela Definição 2.2.1, o que implica que $\delta \le 1$.

Então, $1 < x < 3 \Rightarrow 0 < x - 1 < 2 \Rightarrow |x - 2| < 2$.

Agora, $0 < |x - 2| < \delta$ e $|x - 1| < 2 \Rightarrow |x - 1||x - 2| < 2\delta$. Assim, requeremos $2\delta \le \epsilon$

$\Longleftrightarrow \delta \le \frac{1}{2}\epsilon$. Logo, $\delta = \min(1, \frac{1}{2}\epsilon)$. Então,

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |x - 1||x - 2| < 2\delta \Rightarrow |x^2 - 3x + 2| < 2(\tfrac{1}{2}\epsilon) \Rightarrow |(x^2 - 3x) - (-2)| < \epsilon$$

17. Queremos determinar um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x + \tfrac{3}{4}| < \delta \text{ então } \left|\frac{16x^2 - 9}{4x + 3} - (-6)\right| < \epsilon$$

$$\Longleftrightarrow \text{se } 0 < |x - \tfrac{3}{4}| < \delta \text{ então } |4x + 3| < \epsilon$$

$$\Longleftrightarrow \text{se } 0 < |x + \tfrac{3}{4}| < \delta \text{ então } |x + \tfrac{3}{4}| < \tfrac{1}{4}\epsilon$$

Logo, tomamos $\delta = \frac{1}{4}\epsilon$; então,

$$0 < |x + \tfrac{3}{4}| < \delta \Rightarrow 4|x + \tfrac{3}{4}| < 4(\tfrac{1}{4}\epsilon) \Rightarrow \left|\frac{16x^2 - 9}{4x + 3} - (-6)\right| < \epsilon$$

19. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2 - x - 3}{3x^2 + 8x + 5} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(2x - 3)(x + 1)}{(3x + 5)(x + 1)} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x - 3}{3x + 5} = -\dfrac{5}{2}$

21. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \le 3 \\ x + 5 & \text{se } 3 < x \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (x^2 - 1) = (3)^2 - 1 = 8$; $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x + 5) = 3 + 5 = 8$. Logo, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 8$.

23. $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{2\sqrt{x} - 6}{x - 9} = 2 \lim\limits_{x \to 9} \dfrac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} = 2 \lim\limits_{x \to 9} \dfrac{x - 9}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} = 2 \lim\limits_{x \to 9} \dfrac{1}{\sqrt{x} + 3} = 2 \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$

25. $\lim\limits_{x \to 4^+} 2x = 8$ e $\lim\limits_{x \to 4^+} (16 - x^2) = 0$ onde $(16 - x^2)$ se aproxima de 0 através de valores negativos.

Portanto, $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{2x}{16 - x^2} = -\infty$.

27. $\lim\limits_{t \to 5} \dfrac{\sqrt{t - 4}}{t^2 - 10t + 25} = \lim\limits_{t \to 5} \dfrac{\sqrt{t - 4}}{(t - 5)^2}$

$\lim\limits_{t \to 5} \sqrt{t - 4} = 1$ e $\lim\limits_{t \to 5} (t - 5)^2 = 0$

através de valores positivos. Logo,

$$\lim_{t \to 5} \frac{\sqrt{t - 4}}{(t - 5)^2} = +\infty$$

29. $\lim\limits_{x \to 2^+} ([\![x]\!] - 1) = 1$ e

$\lim\limits_{x \to 2^+} ([\![x]\!] - x) = 2 - 2 = 0$

através de valores negativos. Logo,

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{[\![x]\!] - 1}{[\![x]\!] - x} = -\infty$$

31. $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 2x - 5}{x^2 + 4} = \lim_{x \to \infty} \frac{3 + 2/x - 5/x^2}{1 + 4/x^2} = \frac{3}{1} = 3$

33. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 5}{2x - 4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x + \frac{5}{x}}{2 - \frac{4}{x}} = -\infty$

35. $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{(\sqrt{x + 1} - \sqrt{x})(\sqrt{x + 1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x}} \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x}} = 0$

37. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\text{sen}\, 3x} = \lim_{3x \to 0} \frac{1}{3} \cdot \frac{3x}{\text{sen}\, 3x} = \frac{1}{3} \cdot = \frac{1}{3}$

39. $\lim_{t \to 0} \frac{\text{sen}\, 5t}{\text{sen}\, 2t} = \lim_{t \to 0} \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{\text{sen}\, 5t}{5t} \cdot \frac{2t}{\text{sen}\, 2t} \right) = \frac{5}{2} \cdot \lim_{5t \to 0} \frac{\text{sen}\, 5t}{5t} \cdot \lim_{2t \to 0} \frac{2t}{\text{sen}\, 2t} = \frac{5}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{2}$

41. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^2\, x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \text{sen}\, x = 1 \cdot 0 = 0$

43. $\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{cosec}\, 3\theta}{\text{cotg}\, \theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\frac{1}{\text{sen}\, 3\theta}}{\frac{\cos \theta}{\text{sen}\, \theta}} = \lim_{\theta \to 0} \left(\text{sen}\, \theta \cdot \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{1}{\text{sen}\, 3\theta} \right) = \lim_{\theta \to 0} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\text{sen}\, \theta}{\theta} \cdot \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{3\theta}{\text{sen}\, 3\theta} \right)$

$= \frac{1}{3} \lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen}\, \theta}{\theta} \cdot \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\cos \theta} \cdot \lim_{3\theta \to 0} \frac{3\theta}{\text{sen}\, 3\theta} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3}$

45. $\lim_{t \to 0} \frac{(t + a)^{2/3} - a^{2/3}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{[(t + a)^{2/3} - a^{2/3}][(t + a)^{4/3} + (t + a)^{2/3} a^{2/3} + a^{4/3}]}{t[(t + a)^{4/3} + (t + a)^{2/3} a^{2/3} + a^{4/3}]}$

$= \lim_{t \to 0} \frac{(t + a)^2 - a^2}{t[(t + a)^{4/3} + (t + a)^{2/3} a^{2/3} + a^{4/3}]} = \lim_{t \to 0} \frac{t + 2a}{(t + a)^{4/3} + (t + a)^{2/3} a^{2/3} + a^{4/3}} = \frac{2a}{3a^{4/3}} = \frac{2}{3a^{1/3}}$

47. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[4]{x^4 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{x^2 + 1}}{x^2} + \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[4]{x^4 + 1} - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - (x^2 + 1)}{x^2(1 + \sqrt{x^2 + 1})} + \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^4 + 1} - 1}{x^2(\sqrt[4]{x^4 + 1} + 1)}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{-1}{1 + \sqrt{x^2 + 1}} + \lim_{x \to 0} \frac{(x^4 + 1) - 1}{x^2(\sqrt[4]{x^4 + 1} + 1)(\sqrt{x^4 + 1} + 1)} = -\frac{1}{2} + \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{(\sqrt[4]{x^4 + 1} + 1)(\sqrt{x^4 + 1} + 1)} = -\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{2}$

49. $f(x) = \frac{x + 8}{x - 4}$

Como $\lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$,

$x = 4$ é uma assintota vertical.

Como $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1 + 8/x}{1 - 4/x} = 1$ ou $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$,

$y = 1$ é uma assintota horizontal.

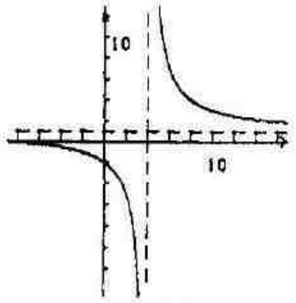


FIGURA 2-49

51. $g(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

Como $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = -\infty$,

$x = 0$ é uma assíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 1$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$,

$y = 1$ é uma assíntota horizontal.

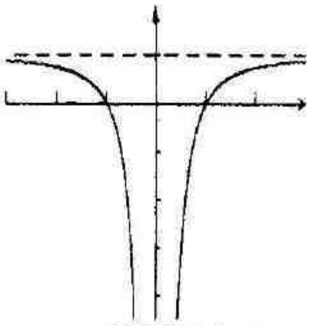


FIGURA 2-51

53. $f(x) = \dfrac{5x^2}{x^2 - 4}$

Como $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$,

$x = 2$ é uma assíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$,

$x = -2$ é uma assíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5}{1 - 4/x^2} = 5$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$,

$y = 5$ é uma assíntota horizontal.

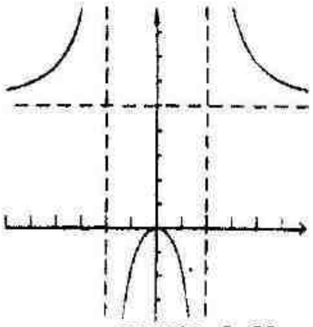


FIGURA 2-53

55. $xy - 3x + 4y = 0$; $(x + 4)y = 3x$; $y = \dfrac{3x}{x + 4}$. Seja $y = f(x)$.

Como $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = -\infty$,

$x = -4$ é uma assíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{1 + 4/x} = 3$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$,

$y = 3$ é uma assíntota horizontal.

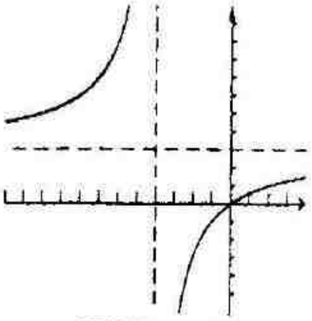


FIGURA 2-55

57. $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 + x - 2} = \dfrac{x + 2}{(x + 2)(x - 1)}$

Existem quebras no gráfico em -2 e 1.

$f(-2)$ e $f(1)$ não existem.

Logo, a condição (i) da Definição 2.6.1 não é verificada em -2 e 1. Portanto, f é descontínua em -2 e 1.

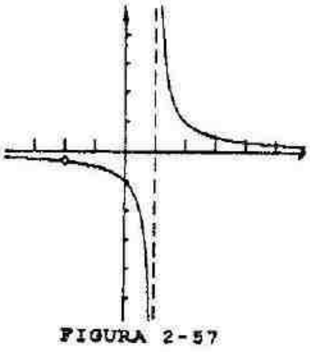


FIGURA 2-57

59. $g(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se} \quad x \le -2 \\ x - 2 & \text{se} \quad -2 < x \le 2 \\ 2 - x & \text{se} \quad 2 < x \end{cases}$

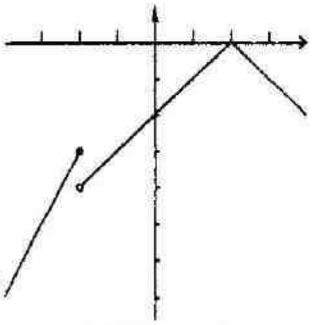


FIGURA 2-59

Existe uma quebra no gráfico em -2.

$\lim\limits_{x\to -2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} (2x + 1) = -3$; $\lim\limits_{x\to -2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} (x - 2) = -4$;

portanto, $\lim\limits_{x\to -2} g(x)$ não existe. Assim, (ii) da Definição

2.6.1 não é verificada em -2; logo, g é descontínua em -2;

mas é contínua em 2, pois $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = 0 = g(2)$.

61. $h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \le 1 \\ x^2 - 1 & \text{se} \quad 1 < x \end{cases}$

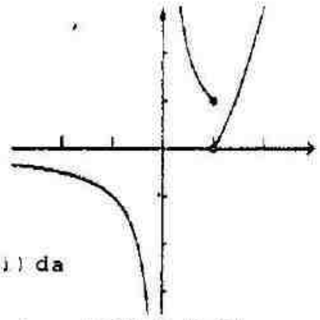


FIGURA 2-61

Existem quebras no gráfico em 0 e 1. f(0) não existe.

Logo, a condição (i) da Definição 2.6.1 não é verificada em 0, e f é descontínua em 0.

$\lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} x^2 - 1 = 0$; $h(1) = \dfrac{1}{1} = 1$; logo, a condição (iii) da Definição 2.6.1 não é verificada em 1, e h é descontínua em 1.

63. e 69. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = 25 - x^2$; $(f \circ g)(x) = \sqrt{25 - x^2}$

$f \circ g$ é contínua para $g(x) > 0$. g é contínua para todo x e $g(x) > 0$ para $-5 < x < 5$.

Logo, pelo Teorema 2.7.2, $f \circ g$ é contínua para todo x em $(-5, 5)$.

Como $\lim\limits_{x\to -5^+} f(x) = 0 = f(-5)$ e $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 0 = f(5)$; $f \circ g$ é contínua em $[-5, 5]$.

65. e 71. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{3 - x}}$; $g(x) = |x|$; $(f \circ g)(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{3 - |x|}}$

$\sqrt{x^2 - 4}$ é contínua para x em $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$; $\sqrt{3 - |x|}$ é contínua para x em $(-3, 3)$.

Pelo Teorema 2.6.2(iv), $f \circ g$ é contínua para x em $(-3, -2) \cup (2, 3)$.

Como $\lim\limits_{x\to -2^-} (f \circ g)(x) = 0 = (f \circ g)(-2)$ e $\lim\limits_{x\to 2^+} (x) = 0 = (f \circ g)(2)$,

$f \circ g$ é contínua em $(-3, -2] \cup [2, 3)$.

67. $f(x) = \operatorname{sgn} x$; $g(x) = x^2 - 1$; $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \operatorname{sgn}(g(x)) = \operatorname{sgn}(x^2 - 1)$.

$f \circ g$ é contínua para $g(x) \neq 0$, g é contínua para todo x e $g(x) = 0$ para $x = \pm 1$.

Logo, pelo Teorema 1.7.2 $f \circ g$ é contínua para $x \neq \pm 1$.

Como $\lim\limits_{x \to -1^-} \operatorname{sgn}(x^2 - 1) = 1$ e $\lim\limits_{x \to -1^+} \operatorname{sgn}(x^2 - 1) = -1$, $f \circ g$ é descontínua em -1.

Como $\lim\limits_{x \to 1^-} \operatorname{sgn}(x^2 - 1) = -1$ e $\lim\limits_{x \to 1^+} \operatorname{sgn}(x^2 - 1) = 1$, $f \circ g$ é descontínua em 1.

Portanto, $f \circ g$ é contínua em todos os números reais, exceto -1 e 1.

69. Veja o Exercício 63. 71. Veja o Exercício 65.

73. $\begin{cases} -x - 6 & \text{se } x < -4 \\ \sqrt{16 - x^2} & \text{se } -4 \leq x \leq 4 \\ x - 6 & \text{se } 4 \leq x \end{cases}$

Como $f(-4) = 0$, $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x) = -10$, $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = 0$; e $f(4) = 0$, $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = -2$,

f é contínua em $(-\infty, -4) \cup [-4, 4] \cup (4, +\infty)$.

75. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 3x - 4} = \dfrac{(x + 4)(x - 2)}{(x + 4)(x - 1)} = \dfrac{x - 2}{x - 1}$ ou $x \neq -4$.

$f(-4)$ não existe. Logo, f é descontínua em -4.

$\lim\limits_{x \to -4} f(x) = \lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x - 2}{x - 1} = \dfrac{-6}{-5} = \dfrac{6}{5}$. A descontinuidade é removível se redefinirmos $f(-4) = \dfrac{6}{5}$.

77. $f(x) = \dfrac{|2x - 1|}{2x - 1}$

$f(\frac{1}{2})$ não existe. Logo, f é descontínua em $\frac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x \to 1/2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1/2^-} \dfrac{-(2x - 1)}{2x - 1} = \lim\limits_{x \to 1/2^-} (-1) = -1$; $\lim\limits_{x \to 1/2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1/2^+} \dfrac{2x - 1}{2x - 1} = \lim\limits_{x \to 1/2^+} 1 = 1$

Como $\lim\limits_{x \to 1/2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1/2^+} f(x)$, então $\lim\limits_{x \to 1/2} f(x)$ não existe. Logo, a descontinuidade é essencial.

79. Queremos encontrar $\lim\limits_{x \to 1} (x - 1)^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x - 1}}$. Como $-1 \leq \operatorname{sen} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x - 1}} \leq 1$, então

$$-(x - 1)^2 \leq (x - 1)^2 \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt[3]{x - 1}} \leq (x - 1)^2 \qquad (1)$$

Como $\lim\limits_{x \to 1} (x - 1)^2 = 0$, segue de (1) e do teorema do "sanduíche" que

$$\lim_{x \to 1} (x - 1)^2 \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt[3]{x - 1}} = 0$$

81. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 \text{ se } & x \leq 3 \\ ax + b \text{ se } & 3 < x < 5. \\ x^2 + 2 \text{ se } & 5 \leq x \end{cases}$

f é contínua em $(-\infty, 3)$, $(3, 5)$ e $(5, +\infty)$.

Para f ser contínua em 3,

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 3^-} (2x + 1) = \lim_{x\to 3^+} (ax + b)$$

$$7 = 3a + b$$

Para f ser contínua em 5,

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 5^-} (ax + b) = \lim_{x\to 5^+} (x^2 + 2)$$

$$5a + b = 27$$

Resolvendo simultaneamente, obtemos $a = 10$ e $b = -23$.

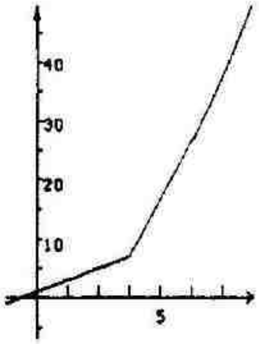


FIGURA 2-81

83. $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \text{ for um inteiro} \\ 0 \text{ se } x \text{ não for um inteiro} \end{cases}$

(b) Se a for um inteiro, então para todo x, nos intervalos abertos $(a - 1, a)$, $(a, a + 1)$, $f(x) = 0$. Assim, $\lim_{x\to a^-} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a^+} f(x) = 0$.

Logo, $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

Se a não for um inteiro, a estará no intervalo aberto $(k, k + 1)$ para algum inteiro k. Então, para todo x nos intervalos abertos (k, a) e $(a, k + 1)$, $f(x) = 0$.

Assim, $\lim_{x\to a^-} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a^+} f(x) = 0$. Logo, $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

Portanto, $\lim_{x\to a} f(x)$ existe para todos os valores de a.

(c) f é descontínua para todo inteiro k, pois $\lim_{x\to k} f(x) = 0$, mas, $f(k) = 1$. Entretanto, para qualquer a que não seja um inteiro $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $f(a) = 0$.

Logo, f é contínua em todos os não-inteiros.

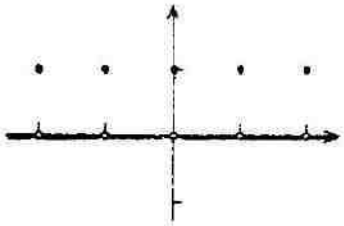


FIGURA 2-83

85. $f(x) = [\![1 - x^2]\!]$, $-2 \leq x \leq 2$

(a) $\lim_{x\to 0^-} [\![1 - x^2]\!] = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} [\![1 - x^2]\!] = 0$.

Logo, $\lim_{x\to 0} [\![1 - x^2]\!] = 0$.

(b) $f(0) = [\![1 - 0^2]\!] = 1$, mas, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Logo, f é descontínua em 0.

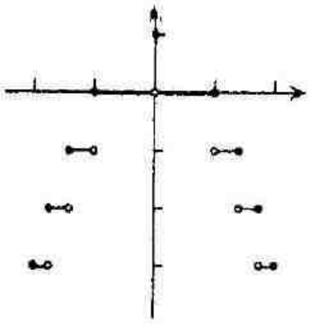


FIGURA 2-85

87. $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0; \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$ $|\operatorname{sgn} x| = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1$ e $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1$. Assim, $\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$ não existe.

Entretanto, $\lim_{x \to 0} |\operatorname{sgn} x| = 1$.

89. $f(x) = x^2 + 3$; $[a, b] = [2, 4]$, $c = 10$ está entre $f(2) = (2)^2 + 3 = 7$

e $f(4) = (4)^2 + 3 = 19$ e f é contínua em $[2, 4]$.

Entretanto, o teorema do valor intermediário é verificado,

e existe um número c entre 2 e 4 tal que $f(c) = 10$:

$c^2 + 3 = 10$; $c^2 = 7$; $c = \pm\sqrt{7}$; $c = \sqrt{7}$ está em $[2, 4]$

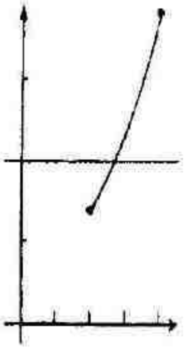


FIGURA 2-89

91. (a) Sabemos que $\lim_{h \to 0} f(x + h) = f(x)$. Seja $h = -k$. Então, $\lim_{-k \to 0} f(x - k) = f(x)$.

mas, $-k \to 0$ é equivalente a $k \to 0$. Portanto, $\lim_{k \to 0} f(x - k) = f(x)$.

(b) Seja $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Então, $\lim_{h \to 0} f(0 + h) = \lim_{h \to 0} 1 = 1$; $\lim_{h \to 0} f(0 - h) = \lim_{h \to 0} 1 = 1$; mas, $f(0) = 0$. Assim, $\lim_{h \to 0} f(0 + h) \neq f(0)$.

93. Se t for qualquer número real, então, f(t) existirá por hipótese. Para provar que f é contínua em t, devemos mostrar que $\lim_{x \to t} f(x) = f(t)$.

Como $f(a + b) = f(a) + f(b)$, segue que $f(x) = f[t + (x - t)] = f(t) + f(x - t)$. Assim, se o limite existir, $\lim_{x \to t} f(x) = \lim_{x \to t} f(t) + \lim_{x \to t} f(x - t)$

$$\lim_{x \to t} f(x) = f(t) + \lim_{x \to t} f(x - t) \qquad (1)$$

Como f é contínua em 0, segue do Teorema 2.7.1 que

$$\lim_{x \to t} f(x - t) = f[\lim_{x \to t}(x - t)] = f(0)$$

substituindo em (1), obtemos

$$\lim_{x \to t} f(x) = f(t) + f(0) \qquad (2)$$

Para achar f(0) aplicamos f(a+b) = f(a) + f(b) com a=b=0. Então, temos

$$f(0) = f(0) + f(0); \quad f(0) = 0$$

Substituindo em (2), obtemos $\lim_{x \to t} f(x) = f(t)$ o que prova que f é contínua em t.

95. $\lim_{x \to -1} \frac{5 - 3x}{3 - x}$. Seja $f(x) = 5 - 3x$, $g(x) = 3 - x$, $h(x) = \frac{1}{x}$. Então,

$\lim_{x \to -1} f(x) = 5 - 3(-1) = 8$, $\lim_{x \to -1} g(x) = 3 - (-1) = 4$. Pelo Teorema 2.9.1, h é contínua em 4.

Logo, pelo Teorema 2.7.1, $\lim_{x \to -1} h(g(x)) = h(\lim_{x \to -1} g(x)) = h(4) = \frac{1}{4}$. Então, pelo T.L.6,

$$\lim_{x \to -1} \frac{5 - 3x}{3 - x} = \lim_{x \to -1} f(x) \cdot h(g(x)) = \lim_{x \to -1} f(x) \cdot \lim_{x \to -1} h(g(x)) = 8 \cdot \tfrac{1}{4} = 2.$$

97. $\lim_{x \to 3} \sqrt{2x^2 - 9}$. Seja $h(x) = \sqrt{x}$ e $f(x) = 2x^2 - 9$. Então, $\lim_{x \to 3} f(x) = 2(3)^2 - 9 = 9$.

Pelo Teorema 2.6.5, h é contínua em 9; assim, pelo Teorema 2.7.1,

$$\lim_{x \to 3} \sqrt{2x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} h(f(x)) = h(\lim_{x \to 3} f(x)) = h(9) = \sqrt{9} = 3.$$

99. $f(x) = \frac{4x^2 - 9}{2x^2 + 7x + 6} = \frac{(2x + 3)(2x - 3)}{(2x + 3)(x + 2)} = \frac{2x - 3}{x + 2}$ se $x \neq -\frac{3}{2}$.

(a) $\lim_{x \to -3/2} f(x) = \lim_{x \to -3/2} \frac{2x - 3}{x + 2} = \frac{-6}{\frac{1}{2}} = -12 < 0$

(b) Para achar os valores de x para os quais $f(x) < 0$, considere a tabela a seguir:

	$2x - 3$	$x + 2$	$\frac{2x - 3}{x + 2}$
$x < -2$	−	−	+
$-2 < x < \frac{3}{2}$	−	+	−
$\frac{3}{2} < x$	+	+	+

Logo, $f(x) < 0$ p/ todos os valores de x no intervalo aberto $(-2, \frac{3}{2})$ Assim, se $-2 \leq a < -\frac{3}{2} < b \leq \frac{3}{2}$ então, $f(x) < 0$ para $x \in (a, b)$, $x \neq -\frac{3}{2}$.

CAPÍTULO TRÊS

A DERIVADA E A DERIVAÇÃO

EXERCÍCIOS 3.1 A Reta Tangente e a Derivada

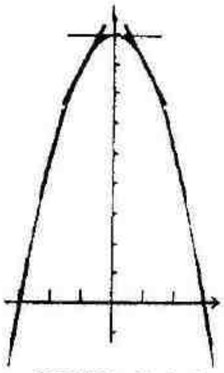


FIGURA 3.1-1

1. Seja $f(x) = 9 - x^2$.

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[9 - (x_1 + \Delta x)^2] - (9 - x_1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{9 - x_1^2 - 2x_1\Delta x - (\Delta x)^2 - 9 + x_1^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2x_1\Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (-2x_1 + \Delta x) = -2x_1$$

$m(x_1) = 0$ qdo $x_1 = 0$ e $f(0) = 9$,

assim, o grafico tem uma tangente horizontal em **(0, 9)**.

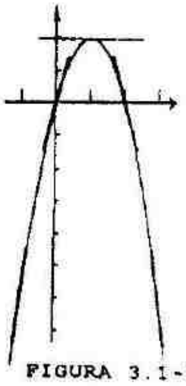


FIGURA 3.1-3

3. Seja $f(x) = -2x^2 + 4x$.

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[-2(x_1 + \Delta x)^2 + 4(x_1 + \Delta x)] - (-2x_1^2 + 4x_1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-4x_1\Delta x - 2(\Delta x)^2 + 4\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (-4x_1 - 2\Delta x + 4) = -4x_1 + 4$$

$m(x_1) = 0$ qdo $x_1 = 1$ e $f(1) = 2$;

assim, o gráfico tem uma tangente horizontal em (1, 2).

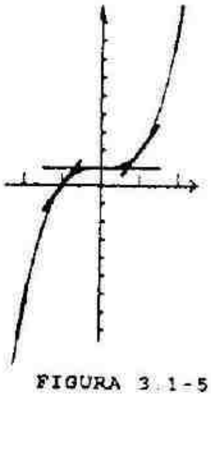


FIGURA 3.1-5

5. Seja $f(x) = x^3 + 1$.

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x_1 + \Delta x)^3 + 1] - (x_1^3 + 1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x_1^2\Delta x + 3x_1(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [3x_1^2 + 3x_1\Delta x + (\Delta x)^2]$$

$$= 3x_1^2$$

$m(x_1) = 0$ qdo $x_1 = 0$ e $f(0) = 1$;

assim, o gráfico tem uma tangente horizontal em (0, 1).

7. Seja $f(x) = 3x^2 - 12x + 8$.

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[3(x_1 + \Delta x)^2 - 12(x_1 + \Delta x) + 8] - (3x_1^2 - 12x_1 + 8)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x_1\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 12\Delta x}{\Delta x} = 6x_1 - 12 = 6(x_1 - 2)$$

$m(x_1) = 0$ qdo $x_1 = 2$ e $f(2) = -4$;

assim, o gráfico tem uma tangente horizontal em $(2, -4)$.

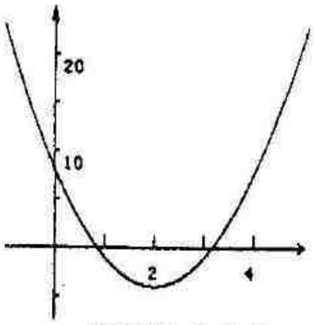


FIGURA 3.1-7

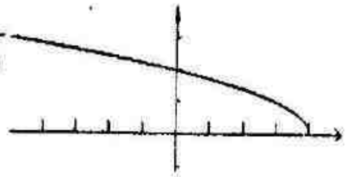
9. Seja $f(x) = \sqrt{4 - x}$.

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{4 - (x_1 + \Delta x)} - \sqrt{4 - x_1}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{4 - x_1 - \Delta x} - \sqrt{4 - x_1})(\sqrt{4 - x_1 - \Delta x} + \sqrt{4 - x_1})}{\Delta x(\sqrt{4 - x_1 - \Delta x} + \sqrt{4 - x_1})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(4 - x_1 - \Delta x) - (4 - x_1)}{\Delta x(\sqrt{4 - x_1 - \Delta x} + \sqrt{4 - x_1})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x(\sqrt{4 - x_1 - \Delta x} + \sqrt{4 - x_1})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{\sqrt{4 - x_1 - \Delta x} + \sqrt{4 - x_1}} = \frac{-1}{2\sqrt{4 - x_1}}$$



$m(x_1)$ nunca é zero; assim, o gráfico não tem tangente horizontal.

FIGURA 3.1-9

11. Seja $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$.

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x_1 + \Delta x)^3 - 6(x_1 + \Delta x)^2 + 9(x_1 + \Delta x) - 2] - (x_1^3 - 6x_1 + 9x_1 - 2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1^3 + 3x_1^2\Delta x + 3x_1(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 6[x_1^2 - 12x_1\Delta x - 6(\Delta x)^2 + 9x_1 + 9\Delta x - x_1^2 + 6x_1 - x_1 + 2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x_1^2\Delta x + 3x_1(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 12x_1\Delta x - 6(\Delta x)^2 + 9\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} [3x_1^2 + 3x_1\Delta x + (\Delta x)^2 - 12x_1 - 6\Delta x + 9]$$

$$= 3x_1^2 - 12x_1 + 9$$

$$= 3(x_1 - 1)(x_1 - 3)$$

$m(x_1) = 0$ qdo $x_1 = 1$ e qdo $x_1 = 3$, e $f(1) = 2$, $f(3) = -2$;

Assim, o gráfico tem tangentes horizontais em $(1, 2)$ e $(3, -2)$.

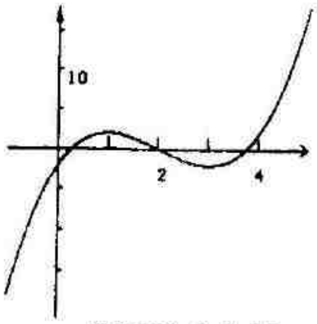


FIGURA 3.1-11

Nota: A inclinação de uma reta normal é a recíproca negativa da inclinação de uma reta tangente.

13. Seja $f(x) = x^2 - 4x - 5$. O ponto é $(-2, 7)$.

$$m(-2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-2+\Delta x) - f(-2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(-2+\Delta x)^2 - 4(-2+\Delta x) - 5] - (4+8-5)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 - 4\Delta x + (\Delta x)^2 + 8 - 4\Delta x - 5 - 7}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-8\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (-8 + \Delta x) = -8$$

A reta tangente tem como equação $y - 7 = -8(x+2)$; $8x + y + 9 = 0$.

A reta normal tem como equação $y - 7 = \frac{1}{8}(x+2)$; $x - 8y + 58 = 0$.

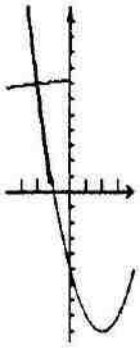


FIGURA 3.1-13

15. Seja $f(x) = \frac{1}{8}x^3$. O ponto é $(4, 8)$.

$$m(4) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(4+\Delta x) - f(4)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{8}(4+\Delta x)^3 - \frac{1}{8}(4)^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{64 + 48\Delta x + 12(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 64}{8\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{48 + 12\Delta x + (\Delta x)^2}{8} = 6$$

A reta tangente tem como equação $y - 8 = 6(x-4)$; $6x - y - 16 = 0$.

A reta normal tem como equação $y - 8 = -\frac{1}{6}(x-4)$; $x + 6y - 52 = 0$.

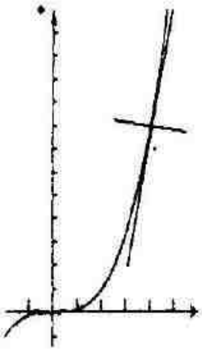


FIGURA 3.1-15

17. Seja $f(x) = \frac{6}{x}$. O ponto é $(3, 2)$.

$$m(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{6}{3+\Delta x} - 2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6 - 2(3+\Delta x)}{\Delta x(3+\Delta x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\Delta x}{\Delta x(3+\Delta x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2}{3+\Delta x} = -\frac{2}{3}$$

A reta tangente tem como equação $y - 2 = -\frac{2}{3}(x-3)$; $2x + 3y - 12 = 0$.

A reta normal tem como equação $y - 2 = \frac{3}{2}(x-3)$; $3x - 2y - 5 = 0$.

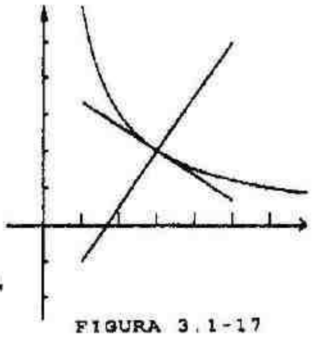


FIGURA 3.1-17

19. Seja $f(x) = x^4 - 4x$. O ponto é $(0, 0)$.

$$m(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^4 - 4\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} [(\Delta x)^3 - 4] = -4.$$

A reta tangente tem como equação $y = -4x$; $4x + y = 0$.

A reta normal tem como equação $y = \frac{1}{4}x$; $x - 4y = 0$.

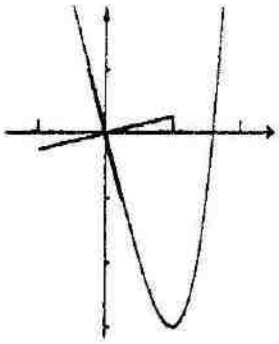


FIGURA 3.1-19

21. A reta $8x - y + 3 = 0$, ou $y = 8x + 3$, tem 8 de inclinação. Seja $f(x) = 2x^2 + 3$. Queremos encontrar um x_1 para o qual $m(x_1) = 8$.

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[2(x_1 + \Delta x)^2 + 3] - (2x_1^2 + 3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x_1\Delta x + 2(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (4x_1 + 2\Delta x) = 4x_1$$

Logo, temos $4x_1 = 8$; $x_1 = 2$. Então, uma equação da reta tangente em $(2, 11)$ é $y - 11 = 8(x - 2)$, ou $8x - y - 5 = 0$.

23. A reta $x - y = 0$, ou $y = x$, tem 1 de inclinação; logo, uma reta perpendicular a ela terá inclinação de -1.
Seja $f(x) = 2 - \frac{1}{3}x^2$. Desejamos encontrar um x_1 para o qual $m(x_1) = -1$.

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[2 - \frac{1}{3}(x_1 + \Delta x)^2] - (2 - \frac{1}{3}x_1^2)}{\Delta x},$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2x_1\Delta x - (\Delta x)^2}{3\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2x_1 - \Delta x}{3} = -\frac{2}{3}x_1$$

Temos $-\frac{2}{3}x_1 = -1$ qdo $x_1 = \frac{3}{2}$ e $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{4}$. Assim, a reta tangente requerida está em $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)$ e uma equação é $y - \frac{5}{4} = -\left(x - \frac{3}{2}\right)$, ou $4x + 4y - 11 = 0$.

25. $f(x) = 7x + 3$. $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[7(x + \Delta x) + 3] - (7x + 3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{7\Delta x}{\Delta x} = 7$

27. $f(x) = -4$. $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-4 - (-4)}{\Delta x} = 0$

29. $f(x) = 4 - 2x^2$. $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[4 - 2(x + \Delta x)^2] - (4 - 2x^2)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-4x\Delta x - 2(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [-4x - 2(\Delta x)] = -4x$$

31. $$\frac{d}{dx}(8 - x^3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[8 - (x + \Delta x)^3] - (8 - x^3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[8 - x^3 - 3x^2\Delta x - 3x(\Delta x)^2 - (\Delta x)^3] - (8 - x^3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-3x^2\Delta x - 3x(\Delta x)^2 - (\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [-3x^2 - 3x\Delta x - (\Delta x)^2] = -3x^2$$

33. $$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

35. $$\frac{d}{dx}\frac{2x + 3}{3x - 2} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{2(x + \Delta x) + 3}{3(x + \Delta x) - 2} - \frac{2x + 3}{3x - 2}\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(2x + 3) + 2Dx](3x - 2) - (2x + 3)[(3x - 2) + 3\Delta x]}{\Delta x[3(x + \Delta x) - 2](3x - 2)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x(3x - 2) - 3\Delta x(2x + 3)}{\Delta x[3(x + \Delta x) - 2](3x - 2)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-13\Delta x}{\Delta x[3(x + \Delta x) - 2](3x - 2)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-13}{[3(x + \Delta x) - 2](3x - 2)}$$

$$= \frac{-13}{(3x - 2)^2}$$

37. $D_x\left(\frac{1}{x^2}-x\right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\left[\frac{1}{(x+\Delta x)^2}-(x+\Delta x)\right]-\left(\frac{1}{x^2}-x\right)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left[-\Delta x+\dfrac{x^2-(x+\Delta x)^2}{(x+\Delta x)^2x^2}\right]\dfrac{1}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left[-\Delta x+\dfrac{-2x\Delta x-(\Delta x)^2}{(x+\Delta x)^2x^2}\right]\dfrac{1}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left[-1-\dfrac{2x+\Delta x}{(x+\Delta x)^2x^2}\right] = -1-\dfrac{2x}{x^4} = -1-\dfrac{2}{x^3}$

39. $f(x) = x^2$

(a) Δx	1	0,5	0,1	0,01	0,001	−1	−0,5	−0,1	−0,01	−0,001
(c) $x = 3 + \Delta x$	4	3,5	3,1	3,01	3,001	2	2,5	2,9	2,99	2,999
$\dfrac{(3+\Delta x)-3^2}{\Delta x} = \dfrac{x^2-3^2}{x-3}$	7	6,5	6,1	6,01	6,001	5	5,5	5,9	5,99	5,999

(b) $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{(3+\Delta x)-3^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{[9+6\Delta x+(\Delta x)^2]-9}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(6+\Delta x) = 6$

(d) $f'(3) = \lim\limits_{x \to 3}\dfrac{x^2-3^2}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3}(x+3) = 6$

41. $f(x) = \sqrt{x-3}$

(a) Δx	1	0,5	0,1	0,01	0,001	−1	−0,5	−0,1	−0,01	−0,001
(c) $x = 7 + \Delta x$	8	7,5	7,1	7,01	7,001	6	6,5	6,9	6,99	6,999
$\dfrac{\sqrt{4+\Delta x}-2}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{x-3}-2}{x-7}$	0,2361	0,2426	0,2485	0,2498	0,2499	0,2679	0,2583	0,2515	0,2502	0,2500

(b) $f'(7) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\sqrt{4+\Delta x}-2}{\Delta x}\cdot\dfrac{\sqrt{4+\Delta x}+2}{\sqrt{4+\Delta x}+2} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{(4+\Delta x)-4}{\Delta x(\sqrt{4+\Delta x}+2)} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{1}{\sqrt{4+\Delta x}+2} = \dfrac{1}{2+2} = \dfrac{1}{4}$

(d) $f'(7) = \lim\limits_{x \to 7}\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{x-7}\cdot\dfrac{\sqrt{x-3}+2}{\sqrt{x-3}+2} = \lim\limits_{x \to 7}\dfrac{(x-3)-4}{(x-7)(\sqrt{x-3}+2} = \lim\limits_{x \to 7}\dfrac{1}{\sqrt{x-3}+2} = \dfrac{1}{2+2} = \dfrac{1}{4}$

43. $f(x) = 4-x^2,\ f'(5) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(5+\Delta x)-f(5)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{[4-(5+\Delta x)^2]-(4-5^2)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{-10\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0}(-10+\Delta x) = -10$

45. $f(x) = \dfrac{2}{x^3}.\ f'(4) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\frac{2}{(4+\Delta x)^3}-\frac{2}{4^3}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{2[64-(4+\Delta x)^3]}{64(4+\Delta x)^3\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{2[64-64-48\Delta x-12(\Delta x)^2-(\Delta x)^3]}{64(4+\Delta x)^3\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{-48-12\Delta x-(\Delta x)^2}{32(4+\Delta x)^3} = \dfrac{-48}{32\cdot 64} = \dfrac{-3}{128}$

47. $f'(-2) = \lim\limits_{x \to -2}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = \lim\limits_{x \to -2}\dfrac{(2-x^3)-[2-(-2)^3]}{x+2} = \lim\limits_{x \to -2}\dfrac{-(x^3+8)}{x+2} = \lim\limits_{x \to -2}\dfrac{-(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}$

$= \lim\limits_{x \to -2}-(x^2-2x+4) = -[(-2)^2-2(-2)+4] = -12$

49. $f'(3) = \lim\limits_{x \to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2x+3}}-\frac{1}{3}}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3}\dfrac{3-\sqrt{2x+3}}{3\sqrt{2x+3}(x-3)} = \lim\limits_{x \to 3}\dfrac{(3-\sqrt{2x+3})(3+\sqrt{2x+3})}{3\sqrt{2x+3}(x-3)(3+\sqrt{2x+3})}$

$= \lim\limits_{x \to 3}\dfrac{9-(2x+3)}{3\sqrt{2x+3}(x-3)(3+\sqrt{2x+3})} = \lim\limits_{x \to 3}\dfrac{-2x+6}{3\sqrt{x+3}(x-3)(3+\sqrt{2x+3})} = \lim\limits_{x \to 3}\dfrac{-2}{3\sqrt{2x+3}(3+\sqrt{2x+3})}$

$= \dfrac{-2}{(3)(3)(3+3)} = -\dfrac{2}{54} = -\dfrac{1}{27}$

51. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{x^2} + 3x\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[\frac{4}{(x+\Delta x)^2} - 3(x+\Delta x)\right] - \left(\frac{4}{x^2} + 3x\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{4}{(x+\Delta x)^2} - \frac{4}{x^2} + 3\Delta x\right]\frac{1}{\Delta x}$

$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{4x^2 - 4(x+\Delta x)^2}{(x+\Delta x)^2 x^2} + 3\Delta x\right]\frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{-8x\Delta x - 4(\Delta x)^2}{(x+\Delta x)^2 x^2}\right]\frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{-8x - 4\Delta x}{(x+\Delta x)^2 x^2} + 3\right] = \frac{-8x}{x^4} + 3$

$= -\frac{8}{x^3} + 3$

53. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sqrt{2-7x}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{2-7(x+\Delta x)} - \sqrt{2-7x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{2-7x-7\Delta x} - \sqrt{2-7x})(\sqrt{2-7x-7\Delta x} + \sqrt{2-7x})}{\Delta x(\sqrt{2-7x-7\Delta x} + \sqrt{2-7x})}$

$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2-7x-7\Delta x) - (2-7x)}{\Delta x(\sqrt{2-7x-7\Delta x} + \sqrt{2-7x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-7\Delta x}{\Delta x(\sqrt{2-7x-7\Delta x} + \sqrt{2-7x})}$

$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-7}{\sqrt{-7x-7\Delta x} + \sqrt{2-7x}} = \frac{-7}{2\sqrt{2-7x}}$

55. Seja $x + \Delta x = z$. $\frac{d}{dx}x^{1/3} = \lim_{z \to x} \frac{z^{1/3} - x^{1/3}}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{z^{1/3} - x^{1/3}}{(z^{1/3})^3 - (x^{1/3})^3}$

$= \lim_{z \to x} \frac{z^{1/3} - x^{1/3}}{(z^{1/3} - x^{1/3})[(z^{1/3})^2 + (z^{1/3})(x^{1/3}) + (x^{1/3})^2} = \lim_{z \to x} \frac{1}{(z^{1/3})^2 + (z^{1/3})(x^{1/3}) + (x^{1/3})^2}$

$= \frac{1}{x^{2/3} + x^{2/3} + x^{2/3}} = \frac{1}{3x^{2/3}} = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, se $x \neq 0$

57. $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)g(x) - (a-a)g(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$,

desde que g seja contínua em a.

59. Em qualquer ponto (x_1, y_1) sobre a curva, temos $y_1 = 4x_1^2$. Como uma reta tangente em $(x_1, 4x_1^2)$ tem $8x_1$ de inclinação, enquanto que a reta que passa pelos pontos $(x_1, 4x_1^2)$ e $(1,5)$ tem uma inclinação de $\frac{4x_1^2 - 5}{x_1 - 1}$, devemos ter

$$\frac{4x_1^2 - 5}{x_1 - 1} = 8x_1;\quad 4x_1^2 - 5 = 8x_1^2 - 8x_1;\quad 4x_1^2 - 8x_1 + 4 = -1;\quad 4(x_1 - 1)^2 = -1$$

Como a última equação não tem solução, não pode haver reta que passe por $(1,5)$ e seja tangente à curva $y = 4x^2$.

61. $f(x) = ax^2 + bx$. $f'(x) =$

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[a(x+\Delta x)^2 + b(x+\Delta x)] - (ax^2 + bx)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(2x\Delta x + \Delta x^2) + b\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a(2x + \Delta x) + b = 2ax + b$

$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[2a(x+\Delta x) + b] - (2ax + b)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2a\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2a = 2a$

63. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a-\Delta x)}{2\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a) + f(a) - f(a-\Delta x)}{2\Delta x}$

$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{2\Delta x} + \frac{f(a) - f(a-\Delta x)}{2\Delta x}\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{2\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a) - f(a-\Delta x)}{2\Delta x}$

$= \frac{1}{2}\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} + \frac{1}{2}\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a-\Delta x) - f(a)}{-\Delta x} = \frac{1}{2}f'(a) + \frac{1}{2}\lim_{(-\Delta x) \to 0} \frac{f(a+(-\Delta x)) - f(a)}{(-\Delta x)}$

$= \frac{1}{2}f'(a) + \frac{1}{2}f'(a) = f'(a)$, conforme desejado.

EXERCÍCIOS 3.2 Diferenciabilidade e Continuidade

1. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \leq -4 \\ -x - 6 & \text{se } -4 < x \end{cases}$, $f(-4) = -4 + 2 = -2$.

(b) $\lim_{x \to -4^+} f(x) = \lim_{x \to -4^+} (-x - 6) = -2$; $\lim_{x \to -4^-} f(x) = \lim_{x \to -4^-} (x + 2) = -2$

Logo, $\lim_{x \to -4} f(x) = -2 = f(-4)$. Assim, f é contínua em -4.

(c) $f'_-(-4) = \lim_{x \to -4^-} \frac{f(x) - f(-4)}{x - (-4)} = \lim_{x \to -4^-} \frac{(x + 2) - (-2)}{x + 4} = 1$

$f'_+(-4) = \lim_{x \to -4^+} \frac{f(x) - f(-4)}{x - (-4)} = \lim_{x \to -4^+} \frac{(-x - 6) - (-2)}{x + 4} = -1$

(d) Como $f'_-(-4) \neq f'_+(-4)$, $f'(-4)$ não existe;

logo, f não é derivável em -4.

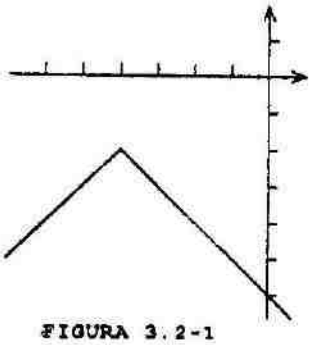


FIGURA 3.2-1

3. $f(x) = |x - 3|$, $f(3) = 0$.

(b) $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} [-(x - 3)] = 0$; $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (x - 3) = 0$

Logo, $\lim_{x \to 3} f(x) = 0 = f(3)$. Assim, f é contínua em 3.

(c) $f'_-(3) = \lim_{x \to 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{-(x - 3) - 0}{x - 3} = \lim_{x \to 3^-} (-1) = -1$

$f'_+(3) = \lim_{x \to 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{(x - 3) - 0}{x - 3} = \lim_{x \to 3^+} 1 = 1$

(d) Como $f'_-(3) \neq f'_+(3)$, $f'(3)$ não existe;

logo, f não é derivável em 3.

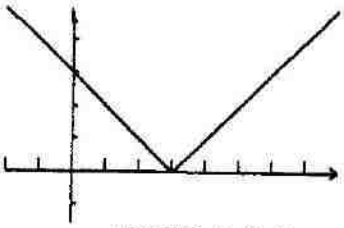


FIGURA 3.2-3

5. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ x - 1 & \text{se } 0 \leq x \end{cases}$, $f(0) = 0 - 1 = -1$.

(b) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x - 1) = -1$

Logo, $\lim_{x \to 0} f(x) = -1 = f(0)$. Assim, f é contínua em 0.

(c) $f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-1 - (-1)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{0}{x} = 0$

$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(x - 1) - (-1)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$

(d) Como $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, $f'(0)$ não existe;

logo, f não é derivável em 0.

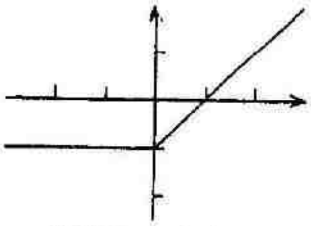


FIGURA 3.2-5

7. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \le 0 \\ -x^2 & \text{se } 0 < x \end{cases}$, $f(0) = 0^2 = 0$

(b) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (-x^2) = 0$

Logo, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Assim, f é contínua em 0.

(c) $f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 - 0}{x} = \lim_{x\to 0^-} x = 0$

$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2 - 0}{x} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$

(d) Como $f'_+(0) = f'_-(0) = 0$, $f'(0) = 0$;

logo, f é derivável em 0.

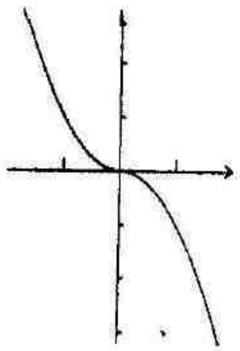


FIGURA 3.2-7

9. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x} & \text{se } x < 1 \\ (1 - x)^2 & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$, $f(1) = (1 - 1)^2 = 0$.

(b) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \sqrt{1 - x} = 0$; $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (1 - x)^2 = 0$

Logo, $\lim_{x\to 1} f(x) = 0 = f(1)$. Assim, f é contínua em 0.

(c) $f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1 - x} - 0}{-(1 - x)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{\sqrt{1 - x}} = -\infty$

$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(1 - x)^2 - 0}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} (x - 1) = 0$

(d) Como $f'_-(1) \ne f'_+(1)$, $f'(1)$ não existe;

logo, f não é derivável em 1.

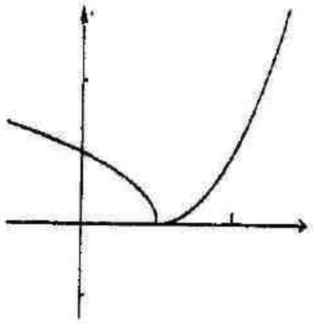


FIGURA 3.2-9

11. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3 & \text{se } x \le 2 \\ 8x - 11 & \text{se } 2 < x \end{cases}$, $f(2) = 2(2)^2 - 3 = 5$.

(b) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (2x^2 - 3) = 5$; $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (8x - 11) = 5$

Logo $\lim_{x\to 2} f(x) = 5 = f(2)$. Assim, f é contínua em 2.

(c) $f'_-(2) = \lim_{x\to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(2x^2 - 3) - 5}{x - 2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{2(x - 2)(x + 2)}{x - 2}$

$= \lim_{x\to 2^-} 2(x + 2) = 8$

$f'_+(2) = \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(8x - 11) - 5}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{8(x - 2)}{x - 2} = 8$

(d) Como $f'_-(2) = f'_+(2) = 8$, $f'(2) = 8$;

logo, f é derivável em 2.

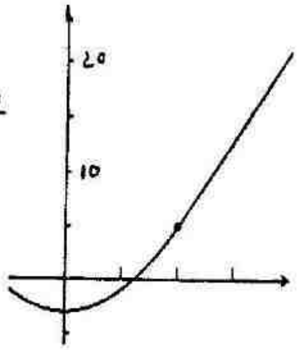


FIGURA 3.2-11

13. $f(x) = (x+1)^{1/3}$

(b) $\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} (x+1)^{1/3} = 0 = f(-1)$; logo, f é contínua em -1.

(c) $f'_-(-1) = f'_+(-1)$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)^{1/3} - 0}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{1}{(x+1)^{2/3}} = +\infty$$

(d) $f'_-(-1)$, $f'_+(-1)$ e, então, $f'(-1)$, não existe;

logo, f não é derivável em -1.

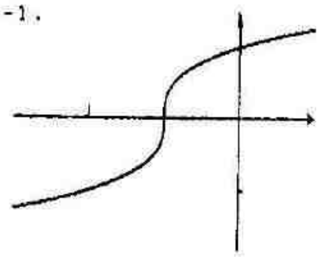


FIGURA 3.2-13

15. $f(x) = \begin{cases} 5 - 6x & \text{se } x \le 3 \\ -4 - x^2 & \text{se } 3 < x \end{cases}$, $f(3) = 5 - 6(3) = -13$.

(b) $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (5 - 6x) = -13$; $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (-4 - x^2) = -13$

Logo, $\lim_{x \to 3} f(x) = -13 = f(3)$. Assim, f é contínua em 3.

(c) $$f'_-(3) = \lim_{x \to 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{(5-6x) - (-13)}{x-3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{-6x+18}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3^-} \frac{-6(x-3)}{x-3} = \lim_{x \to 3^-} (-6) = -6$$

$$f'_+(3) = \lim_{x \to 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{(-4-x^2) - (-13)}{x-3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{-x^2+9}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3^+} \frac{-(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x \to 3^+} [-(x+3)] = -6$$

(d) Como $f'_-(3) = f'_+(3) = -6$, $f'(3) = -6$;

logo, f é derivável em 3.

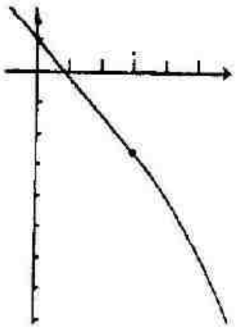


FIGURA 3.2-15

17. $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } 0 \le x \end{cases}$. $f(0) = 0^2 = 0$

(b) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x - 2) = -2$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 = 0$

Como $\lim_{x \to 0^-} f(x) \ne \lim_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim_{x \to 0}$ não existe;

logo, f não é contínua em 0.

(c) $$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{(x-2) - 0}{x} = -\infty$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

(d) f não é contínua em 0, logo, f não é derivável em 0.

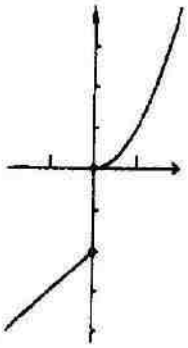


FIGURA 3.2-17

19. $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } x \leq 2 \\ x^3 & \text{se } 2 < x \end{cases}$, $f(2) = 3(2)^2 = 12$

(b) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 3x^2 = 12$; $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x^3 = 8$

Como $\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+}$, f não é contínua em 2.

(c) $f'_-(2) = \lim_{x \to 2^-} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \dfrac{3x^2 - 12}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \dfrac{3(x - 2)(x + 2)}{x - 2}$

$= \lim_{x \to 2^-} 3(x + 2) = 12$

$f'_+(2) = \lim_{x \to 2^+} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \dfrac{x^3 - 12}{x - 2} = -\infty$

(d) f não é contínua em 2, logo f não é derivável em 2.

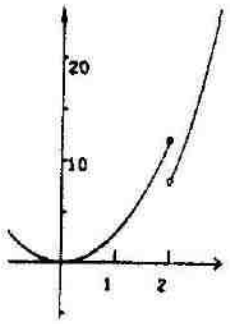


FIGURA 3.2-19

21. (a) $\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} \sqrt{x - 4} = 0 = f(4)$;

logo, f é contínua à direita.

(b) $f'_+(4) = \lim_{x \to 4^+} \dfrac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4^+} \dfrac{\sqrt{x - 4} - 0}{x - 4} = \lim_{x \to 4^+} \dfrac{1}{\sqrt{x - 4}} = +\infty$;

logo, $f'_+(4)$ não existe.

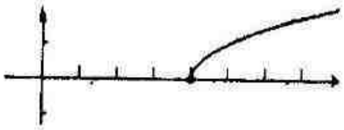


FIGURA 3.2-21

23. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$. O domínio de f é $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$.

f é contínua quando $x^2 - 9 > 0$, isto é, qdo $x < -3$ e $x > 3$.

$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} \sqrt{x^2 - 9} = 0 = f(-3)$

Assim, f é contínua à esquerda em -3.

Logo, f é contínua em $(-\infty, -3]$.

$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \sqrt{x^2 - 9} = 0 = f(3)$

Assim, f é contínua à direita em 3.

Logo, f é contínua em $[3, \infty)$.

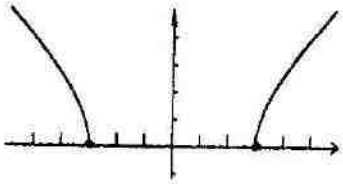


FIGURA 3.2-23

$f'_-(-3) = \lim_{x \to -3^-} \dfrac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} = \lim_{x \to -3^-} \dfrac{\sqrt{x^2 - 9} - 0}{-|x + 3|} = \lim_{x \to -3^-} -\sqrt{\dfrac{(x - 3)(x + 3)}{(x + 3)^2}} = \lim_{x \to -3^-} -\sqrt{\dfrac{x - 3}{x + 3}} = -\infty$

$f'_+(3) = \lim_{x \to 3^+} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^+} \dfrac{\sqrt{x^2 - 9} - 0}{|x - 3|} = \lim_{x \to 3^+} \sqrt{\dfrac{(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)^2}} = \lim_{x \to 3^+} \sqrt{\dfrac{x + 3}{x - 3}} = +\infty$

Portanto, nem $f'_-(-3)$ nem $f'_+(3)$ existem.

25. $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ +1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

(a) $f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{-1 - 0}{x} = +\infty;$

$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1 - 0}{x} = +\infty$

(b) $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \left[\dfrac{d}{dx}(-1)\right] = \lim_{x\to 0^-} \left[\lim_{\Delta x\to 0} \dfrac{(-1) - (-1)}{\Delta x}\right] = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$

$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \left[\dfrac{d}{dx}(1)\right] = \lim_{x\to 0^+} \left[\lim_{\Delta x\to 0} \dfrac{1 - 1}{\Delta x}\right] = \lim_{x\to 0^+} = 0$

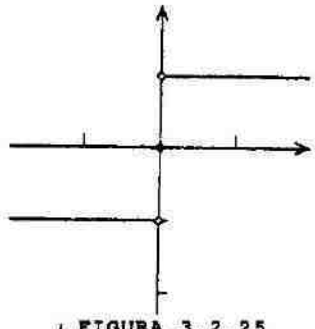


FIGURA 3.2.25

27. $f(x) = x^{3/2}$

(a) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^{3/2} = 0^{3/2} = 0 = f(0);$

logo, f é contínua à direita em 0.

(b) $f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^{3/2}}{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{1/2} = 0$

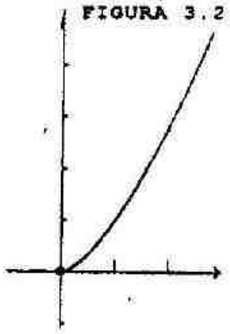


FIGURA 3.2.27

29. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 7 & \text{se } 0 < x \le b \\ \dfrac{6}{x} & \text{se } b < x \end{cases}$

(a) $f(b) = b^2 - 7;\ \lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-} (x^2 - 7) = b^2 - 7;\ \lim_{x\to b^+} f(x) = \lim_{x\to b^+} \dfrac{6}{x} = \dfrac{6}{b}$

Logo, f será contínua em b se $\dfrac{6}{b} = b^2 - 7;\ b^3 - 7b - 6 = 0;\ (b - 3)(b + 1)(b + 2) = 0.$

Assim, f é contínua em b se b=3, −1, ou −2; como b > 0, apenas b=3 é admissível.

(b) $f'_-(3) = \lim_{x\to 3^-} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x\to 3^-} \dfrac{x^2 - 7 - 2}{x - 3} = \lim_{x\to 3^-} \dfrac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = \lim_{x\to 3^-} (x + 3) = 6$

$f'_+(3) = \lim_{x\to 3^+} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x\to 3^+} \dfrac{\frac{6}{x} - 2}{x - 3} = \lim_{x\to 3^+} \dfrac{6 - 2x}{x(x - 3)} = \lim_{x\to 3^+} \dfrac{-2}{x} = -\dfrac{2}{3}$

Logo, $f'(3)$ não existe, e f não é derivável em 3.

31. $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se } x < 2 \\ 2x^2 - 1 & \text{se } 2 \le x \end{cases}$

$f(2) = 2(2)^2 - 1 = 7;\ \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} ax + b = 2a + b;\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 2x^2 - 1 = 7$

Para f ser derivável em 2, f deve ser contínua em 2; logo, $2a + b = 7$.

$f'_-(2) = \lim_{x\to 2^-} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^-} \dfrac{(ax + b) - 7}{x - 2} = \lim_{x\to 2^-} \dfrac{(ax + b) - (2a + b)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^-} \dfrac{a(x - 2)}{x - 2} = a$

$f'_+(2) = \lim_{x\to 2^+} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+} \dfrac{(2x^2 - 1) - 7}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+} \dfrac{2(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+} 2(x + 2) = 8$

f será derivável em 2 se $f'_-(2) = f'_+(2)$; logo, a = 8. Como 2a + b = 7, b = − 9.

33. $f(x) = (x-1)[\![x]\!]$

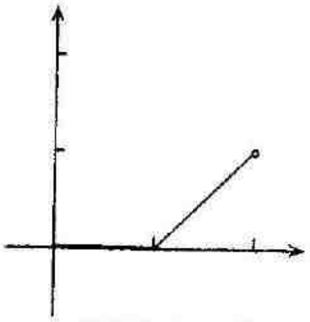


FIGURA 3.2-33

(a) $f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)[\![x]\!]-0}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} [\![x]\!] = 0$

(b) $f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} [\![x]\!] = 1$

(c) $f'_-(1) \neq f'_+(1)$; logo, $f'(1)$ não existe.

35. $f(x) = (x-a)[\![x]\!]$; é qualquer inteiro.

$f'_-(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^-} \frac{(x-a)[\![x]\!]-0}{x-a} = \lim_{x\to a^-} [\![x]\!] = a-1$

$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^+} [\![x]\!] = a$; logo, $f'_-(a) + 1 = f'_+(a)$.

37. Se $x \neq 0$, então, como $|x| = \sqrt{x^2}$ temos $|x|^2 = x^2$; logo

$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{|x+\Delta x|-|x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(|x+\Delta x|-|x|)(|x+\Delta x|+|x|)}{\Delta x(|x+\Delta x|+|x|)}$

$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x(|x+\Delta x|+|x|)} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x(|x+\Delta x|+|x|)} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2x+\Delta x}{|x+\Delta x|+|x|} = \frac{2x}{2|x|} = \frac{|x|}{x}$

39. (a) Seja $f(x)$ de uma moeda imaginária a renda bruta se x estudantes fizerem uma viagem

$$f(x) = \begin{cases} 15x & \text{se } 0 \le x \le 150 \\ [15 - 0{,}05(x-150)]x & \text{se } 150 < x \le 250 \end{cases} = \begin{cases} 15x & \text{se } 0 \le x \le 150 \\ 22{,}5x - 0{,}05x^2 & \text{se } 150 < x \le 250 \end{cases}$$

(b) $f(150) = 15(150) = 2.250$; $\lim_{x\to 150^-} f(x) = \lim_{x\to 150^-} 15x = 15(150) = 2.250$

$\lim_{x\to 150^+} f(x) = \lim_{x\to 150^+} [15 - 0{,}05(x-150)]x = 15(150) = 2.250$

Portanto, $\lim_{x\to 150} f(x) = 2.250 = f(150)$. Assim, f é contínua em 150.

$f'_-(150) = \lim_{x\to 150^-} \frac{f(x)-f(150)}{x-150} = \lim_{x\to 150^-} \frac{15x - 2.250}{x-150} = \lim_{x\to 150^-} \frac{15(x-150)}{x-150} = \lim_{x\to 150^-} 15 = 15$

$f'_+(150) = \lim_{x\to 150^+} \frac{f(x)-f(150)}{x-150} = \lim_{x\to 150^+} \frac{22{,}5x - 0{,}05x^2 - 2.250}{x-150} = \lim_{x\to 150^+} \frac{-0{,}05(x^2 - 450x + 45.000)}{x-150}$

$= \lim_{x\to 150^+} \frac{-0{,}05(x-150)(x-300)}{x-150} = \lim_{x\to 150^+} -0{,}05(x-300) = 7{,}5$

Como $f'_-(150) \neq f'_+(150)$, $f'(150)$ não existe.

41. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ x^n & \text{se } x > 0 \end{cases}$

Caso 1: $n > 1$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{0 - 0}{x} = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0; \quad f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^n - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} x^{n-1} = 0$$

Portanto, $f'(0) = 0$.

se $x_1 < 0$, $f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \lim_{x \to x_1} \frac{0 - 0}{x - x_1} = \lim_{x \to x_1} 0 = 0.$

se $x_1 > 0$, $f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \lim_{x \to x_1} \frac{x^n - x_1^n}{x - x_1}$

$$= \lim_{x \to x_1} \frac{(x - x_1)(x^{n-1} + x^{n-2}x_1 + x^{n-3}x_1^2 + x^{n-3}x_1^2 + \dots + xx_1^{n-2} + x_1^{n-1})}{x - x_1}.$$

$$= \lim_{x \to x_1} (x^{n-1} + x^{n-2}x_1 + x^{n-3}x_1^2 + \dots + xx_1^{n-2} + x_1^{n-1})$$

$= x_1^{n-1} + x_1^{n-1} + x_1^{n-1} + \dots + x_1^{n-1} + x_1^{n-1}$ (n termos)

$= nx_1^{n-1}$

(a) Logo, se $n > 1$, $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ nx^{n-1} & \text{se } x > 0 \end{cases}$ e f é derivável para todos os valores de x.

(b) $f'(0) = 0$; $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0$; $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} nx^{n-1} = 0$, como $n > 1$ logo, $n - 1 > 0$.

Portanto, f' é contínua em x=0, e, então, f' é contínua para todos os valores de x.

Caso 2: $n = 1$ logo, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ x & \text{se } x > 0 \end{cases}$. $f'_-(0) = 0$ como no Caso 1. No entanto,

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

Como $f'_-(0) \ne f'_+(0)$, $f'(0)$ não existe. Então, se $n = 1$

(a) f não é derivável para todos os valores de x, e

(b) f não é contínua para todos os valores de x.

EXERCÍCIOS 3.3 Teoremas sobre Derivação de Funções Algébricas

1. $f'(x) = D_x(7x - 5) = D_x(7x) - D_x(5) = 7$

3. $g'(x) = D_x(1 - 2x - x^2) = D_x(1) + D_x(-2x) + D_x(-x^2) = -2 - 2x$

5. $f'(x) = D_x(x^3 - 3x^2 + 5x - 2) = D_x(x^3) + D_x(-3x^2) + D_x(5x) + D_x(-2) = 3x^2 - 6x + 5$

7. $f'(x) = D_x(\frac{1}{8}x^8 - x^4) = D_x(\frac{1}{8}x^8) + D_x(-x^4) = x^7 - 4x^3$

9. $F'(t) = D_t(\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2) = D_t(\frac{1}{4}t^4) + D_t(-\frac{1}{2}t^2) = t^3 - t$

11. $v'(r) = D_r(\frac{4}{3}\pi r^3) = 4\pi r^2$

13. $F'(x) = D_x\left[x^2 + 3x + \frac{1}{x^2}\right] = D_x(x^2) + D_x(3x) + D_x(x^{-2}) = 2x + 3 - 2x^{-3} = 2x + 3 - \frac{2}{x^3}$

15. $g'(x) = D_x\left[4x^4 - \frac{1}{4x^4}\right] = D_x(4x^4) + D_x\left[-\frac{1}{4}x^{-4}\right] = 16x^3 + x^{-5} = 16x^3 + \frac{1}{x^5}$

17. $g'(x) = D_x\left[\frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^4}\right] = D_x(3x^{-2}) + D_x(5x^{-4}) = -6x^{-3} - 20x^{-4} = -\frac{6}{x^3} - \frac{20}{x^5}$

19. $f'(s) = D_s[\sqrt{3}(s^3 - s^2)] = \sqrt{3}D_s(s^3 - s^2) = \sqrt{3}(3s^2 - 2s)$

21. $f'(x) = D_x[(2x^4 - 1)(5x^3 + 6x)] = (2x^4 - 1)D_x(5x^3 + 6x) + (5x^3 + 6x)D_x(2x^4 - 1)$

$= (2x^4 - 1)(15x^2 + 6) + (5x^3 + 6x)(8x^3) = 30x^6 + 12x^4 - 15x^2 - 6 + 40x^6 + 48x^4$

$= 70x^6 + 60x^4 - 15x^2 - 6$

23. $G'(y) = D_y[(7 - 3y^3)^2] = D_y[(7 - 3y^3)(7 - 3y^3)] = (7 - 3y^3)D_y(7 - 3y^3) + (7 - 3y^3)D_y(7 - 3y^3)$

$= (7 - 3y^3)(-9y^2) + (7 - 3y^3)(-9y^2) = -18y^2(7 - 3y^3)$

25. $D_x[(x^2 - 3x + 2)(2x^3 + 1)] = (x^2 - 3x + 2)D_x(2x^3 + 1) + (2x^3 + 1)D_x(x^2 - 3x + 2)$

$= (x^2 - 3x + 2)(6x^2) + (2x^3 + 1)(2x - 3) = 6x^4 - 18x^3 + 12x^2 + 4x^4 - 6x^3 + 2x - 3$

$= 10x^4 - 24x^3 + 12x^2 + 2x - 3$

27. $D_x\left(\frac{x}{x - 1}\right) = \frac{(x - 1)D_x - xD_x(x - 1)}{(x - 1)^2} = \frac{(x - 1)(1) - x(1)}{(x - 1)^2} = \frac{-1}{(x - 1)^2}$

29. $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1}\right) = \frac{(x^2 - 2x + 1)D_x(x^2 + 2x + 1) - (x^2 + 2x + 1)D_x(x^2 - 2x + 1)}{(x^2 - 2x + 1)^2}$

$= \frac{(x^2 - 2x + 1)(2x + 2) - (x^2 + 2x + 1)(2x - 2)}{(x^2 - 2x + 1)^2} = \frac{2(x - 1)^2(x + 1) - 2(x + 1)^2(x - 1)}{[(x - 1)^2]^2}$

$= \frac{2(x - 1)(x + 1)[(x - 1) - (x + 1)]}{(x - 1)^4} = \frac{2(x + 1)(-2)}{(x - 1)^3} = -\frac{4(x + 1)}{(x - 1)^3}$

31. $\frac{d}{dx}\left[\frac{5t}{1 + 2t^2}\right] = \frac{(1 + 2t^2)D_t(5t) - (5t)D_t(1 + 2t^2)}{(1 + 2t^2)^2} = \frac{(1 + 2t^2)(5) - (5t)(4t)}{(1 + 2t^2)^2} = \frac{5 + 10t^2 - 20t^2}{(1 + 2t^2)^2}$

$= \frac{5 - 10t^2}{(1 + 2t^2)^2}$

33. $\frac{d}{dy}\left(\frac{y^3 - 8}{y^3 + 8}\right) = \frac{(y^3 + 8)(3y^2) - (y^3 - 8)(3y^2)}{(y^3 + 8)^2} = \frac{3y^2(y^3 + 8 - y^3 + 8)}{(y^3 + 8)^2} = \frac{48y^2}{(y^3 + 8)^2}$

35. $D_x\left[\frac{2x+1}{x+5}(3x-1)\right] = \left(\frac{2x+1}{x+5}\right)D_x(3x-1) + (3x-1)D_x\left(\frac{2x+1}{x+5}\right)$

$= \left(\frac{2x+1}{x+5}\right)(3) + (3x-1)\left[\frac{(x+5)(2)-(2x+1)(1)}{(x+5)^2}\right] = \frac{6x+3}{x+5} + (3x-1)\left[\frac{2x+10-2x-1}{(x+5)^2}\right]$

$= \frac{(6x+3)(x+5)}{(x+5)^2} + \frac{(3x-1)(9)}{(x+5)^2} = \frac{6x^2+33x+15+27x-9}{(x+5)^2} = \frac{6x^2+60x+6}{(x+5)^2} = \frac{6(x^2+10x+1)}{(x+5)^2}$

37. Seja $f(x) = x^3 - 4$. Então, $f'(x) = 3x^2$, logo, $f'(2) = 12$. Portanto, a reta tangente tem inclinação igual a 12; logo, uma equação da reta tangente é $y - 4 = 12(x-2)$ ou $12x - y - 20 = 0$.

39. Seja $f(x) = \frac{10}{14-x^2}$. Então, $f'(x) = \frac{(14-x^2)(0)-10(-2x)}{(14-x^2)^2} = \frac{20x}{(14-x^2)^2}$; logo, $f'(4) = \frac{80}{(-2)^2}$. Assim, a reta normal em $(4,-5)$ tem inclinação $-\frac{1}{20}$; logo, sua equação é $y + 5 = -\frac{1}{20}(x-4)$ ou $x + 20y + 96 = 0$.

41. Seja $f(x) = 3x^2 - 4x$. Então, $f'(x) = 6x - 4$. A reta dada tem a equação $y = 2x + 3$, sua inclinação é 2. $f'(x) = 2$ quando $6x - 4 = 2$ logo, $x = 1$. como $f(1) = -1$, a reta tangente desejada passa por $(1,-1)$ e sua inclinação é 2; logo, sua equação é $y + 1 = 2(x-1)$ ou $2x - y - 3 = 0$.

43. Seja $f(x) = x^3 - 4x$. Então, $f'(x) = 3x^2 - 4$. No ponto $(x, f(x))$ sobre a curva, a inclinação da reta normal é $\frac{-1}{f'(x)} = \frac{-1}{3x^2-4}$. A reta dada tem a equação $y = -\frac{1}{8}x + 1$ e, então, sua inclinação é $-\frac{1}{8}$. Como as retas normais são paralelas à reta dada, devemos ter

$$\frac{-1}{3x^2-4} = -\frac{1}{8};\quad 3x^2 - 4 = 8;\quad x = \pm 2$$

Agora, $f(2) = 0$ e $f(-2) = 0$; logo, as retas normais requeridas estão em $(2,0)$ e $(-2,0)$ e cada reta tem inclinação $-\frac{1}{8}$. Logo, suas equações são

$$y = -\tfrac{1}{8}(x-2);\quad x + 8y - 2 = 0 \quad \text{e} \quad y = -\tfrac{1}{8}(x+2);\quad x + 8y + 2 = 0$$

45. Seja $f(x) = 2x^2 - 1$. Então, $f'(x) = 4x$. Uma reta que passe pelos pontos $P(x_1, 2x_1^2 - 1)$ e $(4, 13)$ tem inclinação $\frac{(2x_1^2-1)-13}{x_1-4}$. Essa reta será tangente em P se sua inclinação for $f'(x_1) = 4x_1$.

Então, $\frac{(2x_1^2-1)-13}{x_1-4} = 4x_1$; $2x_1^2 - 14 = 4x_1^2 - 16x_1$; $2x_1^2 - 16x_1 + 14 = 0$; $2(x_1-7)(x_1-1) = 0$

assim, $x_1 = 7$ ou $x_1 = 1$. Agora, $f(7) = 97$ e $f'(7) = 28$ enquanto $f(1) = 1$ e $f'(1) = 4$. Logo, as equações das retas tangentes são

$$y - 97 = 28(x-7);\quad 28x - y - 99 = 0 \quad \text{e} \quad y - 1 = 4(x-1);\quad 4x - y - 3 = 0$$

47. $\phi'(x) = D_x([f(x)\cdot g(x)]\cdot h(x)) = [f(x)\cdot g(x)]'\cdot h(x) + [f(x)\cdot g(x)]\cdot h'(x)$

$= [f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)]\cdot h(x) + [f(x)\cdot g(x)]\cdot h'(x)$

$= f'(x)\cdot g(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g'(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g(x)\cdot h'(x)$

49. $h'(x) = D_x[(3x+2)^2(x^2-1)] = D_x[(3x+2)(3x+2)(x^2-1)]$

$= (3x+2)'(3x+2)(x^2-1) + (3x+2)(3x+2)'(x^2-1) + (3x+2)(3x+2)(x^2-1)'$

$= 3(3x+2)(x^2-1) + (3x+2)(3)(x^2-1) + (3x+2)(3x+2)(2x)$

$= (3x+2)(3x^2-3+3x^2-3+6x^2+4x) = (3x+2)(12x^2+4x-6) = 2(3x+2)(6x^2+2x-3)$

51. $\phi'(x) = D_x[(2x^2+x+1)^3] = D_x[(2x^2+x+1)(2x^2+x+1)(2x^2+x+1)]$

$= (2x^2+x+1)'(2x^2+x+1)(2x^2+x+1) + (2x^2+x+1)(2x^2+x+1)'(2x^2+x+1)$

$+ (2x^2+x+1)(2x^2+x+1)(2x^2+x+1)'$

$= (4x+1)(2x^2+x+1)(2x^2+x+1) + (2x^2+x+1)(4x+1)(2x^2+x+1)$

$+ (2x^2+x+1)(2x^2+x+1)(4x+1)$

$= 3(4x+1)(2x^2+x+1)^2$

EXERCÍCIOS 3.4 Movimento Retilíneo e a Derivada como Taxa de Variação

1. $s = 3t^2 + 1;\ v(t) = \frac{ds}{dt} = 6t;\ v(3) = 18$

3. $s = \frac{1}{4}t^{-1};\ v(t) = \frac{ds}{dt} = -\frac{1}{4}t^{-2};\ v\left(\frac{1}{2}\right) = -1$

5. $s = 2t^3 - t^2 + 5;\ v(t) = \frac{ds}{dt} = 6t^2 - 2t;\ v(-1) = 8$

7. $s = \frac{2t}{4+t};\ v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{2(4+t) - 2t}{(4+t)^2} = \frac{8}{(4+t)^2};\ v(0) = \frac{1}{2}$

9. $s = t^3 + 3t^2 - 9t + 4;\ v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 + 6t - 9 = 3(t^2 + 2t - 3) = 3(t+3)(t-1)$

$v(t) = 0$ qdo $t = -3$ e $t = 1$.

	$t+3$	$t-1$	Conclusão
$t < -3$	−	−	v é positivo e a partícula está se movendo para a direita
$t = -3$	0	−	v é zero e a partícula está mudando de direção, da direita para a esquerda
$-3 < t < 1$	+	−	v é negativo e a partícula está se movendo para a esquerda
$t = 1$	+	0	v é zero e a partícula está mudando de direção, da esquerda para a direita
$1 < t$	+	+	v é positivo e a partícula está se movendo para a direita

11. $s = \frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 2t + 4;\ v(t) = \frac{ds}{dt} = 2t^2 + 3t - 2 = (t+2)(2t-1);\ v(t) = 0$ qdo $t = -2$ e $t = \frac{1}{2}$

	$t+2$	$2t-1$	Conclusão
$t < -2$	−	−	v é positivo e a partícula está se movendo para a direita
$t = -2$	0	−	v é zero e a partícula está mudando de direção, da direita para a esquerda
$-2 < t < \frac{1}{2}$	+	−	v é negativo e a partícula está se movendo para a esquerda
$t = \frac{1}{2}$	+	0	v é zero e a partícula está mudando de direção, da esquerda para a direita
$\frac{1}{2} < t$	+	+	v é positivo e a partícula está se movendo para a direita

13. $s = \dfrac{t}{9 + t^2}$; $v(t) = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{9 + t^2 - 2t \cdot t}{(9 + t^2)^2} = \dfrac{9 - t^2}{(9 + t^2)^2} = \dfrac{(3 + t)(3 - t)}{(9 + t^2)^2}$; $v(t) = 0$ qdo $t = -3$ e $t = 3$

	$3 + t$	$3 - t$	$(9 + t^2)^2$	Conclusão
$t < -3$	−	+	+	v é negativo e a partícula está se movendo para a esquerda
$t = -3$	0	+	+	v é zero e a partícula está mudando de direção, da esquerda para a direita
$-3 < t < 3$	+	+	+	v é positivo e a partícula está se movendo para a direita
$t = 3$	+	0	+	v é zero e a partícula está mudando de direção, da direita para a esquerda
$3 < t$	+	−	+	v é negativo e a partícula está se movendo para a esquerda

15. s cm é a distância da pedra até o ponto inicial em t s.

$$s = -16t^2; \quad v(t) = \frac{ds}{dt} = -32t$$

(a) $v(1) = -32$. Portanto, 1 s depois que a pedra caiu, sua velocidade foi −32 cm/s.

(b) $v(2) = -64$. Assim, 2 s depois que a pedra caiu, sua velocidade foi −64 cm/s.

(c) A pedra atinge o solo quando $s = -256$. Então, $-16t^2 = -256$; $t^2 = 16$; $t = 4$.

Assim, a pedra atinge o solo em 4 s.

(d) $v(4) = 128$. Então, quando a pedra atinge o solo, sua velocidade é −128 cm/s.

17. s cm é a distância da bola, a partir de sua posição inicial em t s.

$$s = 100t^2 + 100t; \quad v(t) = \frac{ds}{dt} = 200t + 100$$

A bola de bilhar atinge a tabela quando $s = 39$; assim, temos

$$100t^2 + 100t = 39; \quad 100t^2 + 100t - 39 = 0; \quad (10t - 3)(10t + 13) = 0; \quad t = \frac{3}{10} \text{ ou } t = -\frac{13}{10}$$

Desprezamos o valor negativo de t. Portanto, a bola de bilhar atinge a tabela em $\frac{3}{10}$ s e $v\left(\frac{3}{10}\right) = 160$. Assim, a velocidade da bola de bilhar é 160 cm/s quando ela atinge a tabela.

19. s cm é a distância da bola até o seu ponto de partida em t/s.

$$s = 24t + 10t^2; \quad v(t) = \frac{ds}{dt} = 24 + 20t$$

(a) $v(t_1) = 24 + 20t_1$. Portanto, em t_1 s a velocidade instantânea da bola é $(24 + 20t_1)$ cm/s.

(b) $v(t) = 48$ qdo $24 + 20t = 48$; $20t = 24$; $t = \frac{6}{5}$

Portanto, leva $\frac{6}{5}$ s para que a velocidade aumente para 48 cm/s.

21. A cm^2 é a área de um quadrado, tendo lado de s cm de comprimento. $A = s^2$; $A'(s) = 2s$

(a) $\dfrac{(4,60)^2 - 4^2}{4,60 - 4} = 8,6$ (b) $\dfrac{(4,30)^2 - 4^2}{4,30 - 4} = 8,3$ (c) $\dfrac{(4,10)^2 - 4^2}{4,10 - 4} = 8,1$ (d) $\dfrac{(4,05)^2 - (4)^2}{4,05 - 4} = 8,05$

(e) $A'(4) = 2(4) = 8$

23. Como $V = CP^{-1}$, então, $dV/dP = -CP^{-2}$. Assim, se P aumenta, então, V decresce a uma taxa proporcional ao inverso do quadrado de P.

25. T graus é a temperatura t horas após a meia-noite. $T = 0,1(400 - 40t + t^2)$, $0 \leq t \leq 12$

(a) A taxa média de variação de T em relação a t entre 5 e 6 horas da manhã é

$$\frac{0,1[400 - 40(6) + (6)^2] - 0,1[400 - 40(5) + (5)^2]}{6 - 5} = \frac{0,1(-204 + 175)}{1} = -2,9$$

Portanto, entre 5 e 6 horas da manhã, a taxa média de variação da temperatura com relação ao tempo terá um decréscimo de 2,9 graus por hora.

(b) $T'(t) = 0,1(-40 + 2t)$; $T'(5) = 0,1[-40 + 2(5)] = -3$. Portanto, a taxa de variação instantânea da temperatura às 5 h, apresentará uma diminuição de 3 graus por hora.

27. O volume de água em uma piscina t min depois que começou a escoar é de V litros

$$V = 250(1.600 - 80t + t^2); \quad V'(t) = 250(-80 + 2t)$$

(a) O número de litros por minuto na taxa média em que o volume de água na piscina está variando durante os 5 primeiros minutos é

$$\frac{250[1.600 - 80(5) + (5)^2] - 250[1.600 - 80(0) + 0^2]}{5 - 0} = \frac{250(-375)}{5} = -18.750$$

Portanto, a taxa média em que a água escoa da piscina durante os 5 primeiros minutos é 18.750 L por minuto.

(b) $V'(5) = 250[-80 + 2(5)] = -17.500$. Portanto, depois de 5 min, a água começa a escoar da piscina à taxa de 17.500 L por minuto.

29. C(x) da quantia do custo total de fabricação de x relógios: $C(x) = 1500 + 3x + x^2$

(a) C′ é a função custo marginal: $C'(x) = 3 + 2x$

(b) $C'(40) = 83$

(c) A importância em dinheiro no custo real da fabricação do quadragésimo primeiro relógio é

$$C(41) - C(40) = [1500 + 3 \cdot 41 + (41)^2] - [1.500 + 3 \cdot 40 + (40)^2] = 84$$

31. R(x) é o rendimento total da venda de x aparelhos de televisão: $R(x) = 600x - \frac{1}{20}x^3$

(a) R′ é a função rendimento marginal: $R'(x) = 600 - \frac{3}{20}x^2$.

(b) $R'(20) = 600 - \frac{3}{20}(20)^2 = 600 - 60 = 540$

Portanto, o rendimento marginal é $540 quando x=20.

(c) A importância em dinheiro no rendimento real da venda do vigésimo primeiro aparelho de televisão é $R(21) - R(20)$.

$$R(21) - R(20) = \left[600(21) - \frac{1}{20}(21)^3\right] - \left[600(20) - \frac{1}{20}(20)^3\right] = 536,95$$

33. p é a quantia em dinheiro correspondente ao rendimento anual bruto da empresa t anos após 1° de janeiro de 1988. $p(t) = 0,4t^2 + 2t + 10$; $p'(t) = 0,8t + 2$

(a) Em 1° de janeiro de 1990, $t = 2$ e $p'(2) = 0,8(2) + 2 = 3,6$. Logo, em 1° de janeiro de 1.990, o rendimento bruto estará crescendo a uma taxa de 3,6 milhões ao ano.

(b) A taxa de crescimento relativo do rendimento bruto em 1° de jan. de 1.990 é $p'(2)/p(2)$.

$p(2) = 0,4(2)^2 + 2(2) + 10 = 15,6$; $\frac{p'(2)}{p(2)} = \frac{3,6}{15,6} = 0,231 = 23,1\%$

(c) Em 1° de janeiro de 1.994, $t = 6$ e $p'(6) = 0,8(6) + 2 = 6,8$. Logo, em 1° de janeiro de 1.994, o rendimento bruto estará crescendo a uma taxa de 6,8 milhões ao ano.

(d) A taxa de crescimento relativo do rendimento bruto em 1° de jan. de 1.994 é $p'(6)/p(6)$.

$p(6) = 0,4(6)^2 + 2(6) + 10 = 36,4$; $\frac{p'(2)}{p(2)} = \frac{6,8}{36,4} = 0,187 = 18,7\%$

35. Seja P(t) o número de pessoas na população t anos após 1° de janeiro de 1986.

$$P(t) = 40t^2 + 200t + 10.000;\ P'(t) = 80t + 200$$

(a) Em 1° de janeiro de 1.995, $t = 9$ e $P'(9) = 80 \cdot 9 + 200 = 920$. Portanto, em 1° de janeiro de 1.995, a população estará crescendo à taxa de 920 pessoas por ano.

(b) A taxa de crescimento relativo da população em 1° de jan. de 1.995 é $P'(9)/P(9)$.

$P(9) = 40(9)^2 + 200(9) + 10.000 = 15.040$; $\frac{P'(9)}{P(9)} = \frac{920}{15.040} = 0,061 = 6,1\%$

(c) Em 1° de janeiro de 2.001, $t = 15$ e $P'(15) = 80 \cdot 15 + 200 = 1.400$. Portanto, em 1° de janeiro de 2.001, a população estará crescendo à taxa de 1.400 pessoas por ano.

(d) A taxa de crescimento relativo da população em 1° de jan. de 2.001 é $P'(15)/P(15)$.

$P(15) = 40(15)^2 + 200(15) + 10.000 = 22.000$; $\frac{P'(15)}{P(15)} = \frac{1.400}{22.000} = 0,064 = 6,4\%$

37. O lucro de um varejista é \$ 100y quando x são gastos diariamente em propaganda e

$$y = 2500 + 36x - 0,2x^2;\ y'(x) = 36 - 0,4x.$$

(a) $y'(60) = 36 - 0,4(60) = 2$

Portanto, a taxa de variação de y em relação a x é positiva quando $x = 60$.

Assim, é lucrativo aumentar a verba para propaganda diária quando $x = 60$.

(b) $y'(300) = 36 - 0,4(300) = -84$

Como a taxa de variação de y em relação a x é negativa quando $x = 300$, não é lucrativo aumentar a verba para propaganda diária quando $x = 300$.

(c) O valor máximo para x, abaixo do qual é lucrativo aumentar a verba para propaganda ocorre quando $y'(x) = 0$. Assim, $36 - 0,4 = 0$; $0,4x = 36$; $x = 90$.

EXERCÍCIOS 3.5 Derivadas das Funções Trigonométricas

1. $D_x(\text{cotg}\,x) = D_x\left(\dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x}\right) = \dfrac{(\text{sen}\,x)(-\text{sen}\,x) - (\cos x)(\cos x)}{\text{sen}^2 x} = \dfrac{-(\text{sen}^2 x + \cos^2 x)}{\text{sen}^2 x} = \dfrac{-1}{\text{sen}^2 x} = \text{cosec}^2 x$

3. $f'(x) = D_x(3\,\text{sen}\,x) = 3\cos x$

5. $g'(x) = D_x(\text{tg}\,x + \text{cotg}\,x) = \sec^2 x - \text{cosec}^2 x$

7. $f'(t) = D_t(2t\cos t) = 2\cos t + 2t(-\text{sen}\,t) = 2(\cos t - t\,\text{sen}\,t)$

9. $g'(x) = D_x(x\,\text{sen}\,x + \cos x) = (1\,\text{sen}\,x + x\cos x) - \text{sen}\,x = x\cos x$

11. $h'(x) = D_x(4\,\text{sen}\,x\cos x) = 4[\text{sen}\,x(-\text{sen}\,x) + (\cos x)\cos x] = 4(-\text{sen}^2 x + \cos^2 x) = 4\cos 2x$

13. $f'(x) = D_x(x^2\cos x - 2x\,\text{sen}\,x - 2\cos x) = [x^2(-\text{sen}\,x) + 2x\cos x] - (2x\cos x + 2\,\text{sen}\,x) + 2\,\text{sen}\,x$

$= -x^2\,\text{sen}\,x$

15. $f'(x) = D_x(3\sec x\,\text{tg}\,x) = 3[(\sec x\,\text{tg}\,x)\,\text{tg}\,x + \sec x(\sec^2 x)] = 3\sec x(\text{tg}^2 x + \sec^2 x)$

17. $D_y(\text{cotg}\,y\,\text{cosec}\,y) = \text{cotg}\,y(-\text{cosec}\,y\,\text{cotg}\,y) + \text{cosec}\,y(-\text{cosec}^2 y) = -\text{cosec}\,y(\text{cotg}^2 y + \text{cosec}^2 y)$

19. $D_z\left(\dfrac{2\cos z}{z+1}\right) = \dfrac{(z+1)(-2\,\text{sen}\,z) - 2\cos z(1)}{(z+1)^2} = -2\,\dfrac{(z+1)\,\text{sen}\,z + \cos z}{(z+1)^2}$

21. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\text{sen}\,x}{1-\cos x}\right) = \dfrac{(1-\cos x)(\cos x) - \text{sen}\,x(\text{sen}\,x)}{(1-\cos x)^2} = \dfrac{\cos x - \cos^2 x - \text{sen}^2 x}{(1-\cos x)^2} = \dfrac{\cos x - 1}{(\cos x - 1)^2} = \dfrac{1}{\cos x - 1}$

23. $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\text{tg}\,t}{\cos t - 4}\right) = \dfrac{(\cos t - 4)(\sec^2 t) - (\text{tg}\,t)(-\text{sen}\,t)}{(\cos t - 4)^2} = \dfrac{\sec t - 4\sec^2 t + \text{tg}\,t\,\text{sen}\,t}{(\cos t - 4)^2}$

$= \dfrac{1 - 4\sec t - \text{sen}^2 t}{\cos t(\cos t - 4)^2}$

25. $\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{1+\text{sen}\,y}{1-\text{sen}\,y}\right) = \dfrac{(1-\text{sen}\,y)(\cos y) - (1+\text{sen}\,y)(-\cos y)}{(1-\text{sen}\,y)^2} = \dfrac{\cos y - \text{sen}\,y\cos y + \cos y + \text{sen}\,y\cos y}{(1-\text{sen}\,y)^2}$

$= \dfrac{2\cos y}{(1-\text{sen}\,y)^2}$

27. $D_x[(x - \text{sen}\,x)(x + \cos x)] = (1 - \cos x)(x + \cos x) + (x - \text{sen}\,x)(1 - \text{sen}\,x)$

29. $D_t\left(\dfrac{2\,\text{cosec}\,t - 1}{\text{cosec}\,t + 2}\right) = \dfrac{(\text{cosec}\,t + 2)(-2\,\text{cosec}\,t\,\text{cotg}\,t) - (2\,\text{cosec}\,t - 1)(-\text{cosec}\,t\,\text{cotg}\,t)}{(\text{cosec}\,t + 2)^2}$

$= \dfrac{-2\,\text{cosec}^2 t\,\text{cotg}\,t - 4\,\text{cosec}\,t\,\text{cotg}\,t + 2\,\text{cosec}^2 t\,\text{cotg}\,t - \text{cosec}\,t\,\text{cotg}\,t}{(\text{cosec}\,t + 2)^2} = \dfrac{-5\,\text{cosec}\,t\,\text{cotg}\,t}{(\text{cosec}\,t + 2)^2}$

De outro modo, $D_t\left(\dfrac{2\,\text{cosec}\,t - 1}{\text{cosec}\,t + 2}\right) = D_t\left(\dfrac{2 - \text{sen}\,t}{1 + 2\,\text{sen}\,t}\right) = \dfrac{(1 + 2\,\text{sen}\,t)(-\cos t) - (2 - \text{sen}\,t)(2\cos t)}{(1 + 2\,\text{sen}\,t)^2}$

$= \dfrac{-\cos t - 2\,\text{sen}\,t\cos t - 4\cos t + 2\,\text{sen}\,t\cos t}{(1 + 2\,\text{sen}\,t)^2} = \dfrac{-5\cos t}{(1 + 2\,\text{sen}\,t)^2}$

31. $f(x) = x \cos x$; $f'(x) = \cos x - x \operatorname{sen} x$; assim, $f'(0) = \cos 0 - 0 \operatorname{sen} 0 = 1$

33. $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$; $f'(x) = \dfrac{(x)(-\operatorname{sen} x) - (\cos x)(1)}{x^2}$; assim $f'(\frac{1}{2}\pi) = \dfrac{(\frac{1}{2}\pi)(-1) - 0}{(\frac{1}{2}\pi)^2} = \dfrac{-1}{\frac{1}{2}\pi} = -\dfrac{2}{\pi}$

35. $f(x) = x^2 \operatorname{tg} x$; $f'(x) = 2x \operatorname{tg} x + x^2 \sec^2 x$; assim $f'(\pi) = 2\pi \operatorname{tg} \pi + \pi^2 \sec^2 \pi = 2\pi(0) + \pi^2(-1)^2 = \pi^2$

37. $f(x) = \operatorname{sen} x(\cos x - 1)$; $f'(x) = \cos x(\cos x - 1) + \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)$; assim $f'(\pi) = (-1)(-2) + 0(0) = 2$

39. $f(x) = x \cos x + x \operatorname{sen} x$; $f'(x) = \cos x - x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x + x \cos x$

assim, $f'(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2} - (\frac{1}{4}\pi)(\frac{1}{2}\sqrt{2}) + \frac{1}{2}\sqrt{2} + (\frac{1}{4}\pi)(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

41. $f(x) = 2 \operatorname{cotg} x - \operatorname{cosec} x$; $f'(x) = -2\operatorname{cosec}^2 x + \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$; assim $f'\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{10}{3}$

43. Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$. Então, $f'(x) = \cos x$.

43. (a)

	1	0,5	0,1	0,01	0,001	-1	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001
$\dfrac{\operatorname{sen}(\frac{1}{3}\pi + h) - \operatorname{sen} \frac{1}{3}\pi}{h}$	0,0226	0,2674	0,4559	0,4956	0,4995	0,8188	0,6915	0,5424	0,5043	0,500

(b) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{3}\pi + h) - \operatorname{sen} \frac{1}{3}\pi}{h} = \frac{d}{dx} \operatorname{sen} x \Big|_{x=\pi/3} = \cos \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$

45.

h	0,1	0,01	0,001	0,0001	10^{-5}	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001	-10^{-5}
$\dfrac{\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi + h) - \operatorname{tg} \frac{1}{4}\pi}{h}$	2,2305	2,0203	2,0020	2,0002	2	1,8237	1,9803	1,9980	1,9998	2

(b) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi + h) - \operatorname{tg} \frac{1}{4}\pi}{h} = \frac{d}{dx} \operatorname{tg} x \Big|_{x=\pi/4} = \sec^2 \frac{1}{4}\pi = 2$

47.

x	$\frac{3}{20}\pi$	$\frac{19}{120}\pi$	$\frac{33}{200}\pi$	$\frac{199}{1200}\pi$	$\frac{333}{2000}\pi$	$\frac{11}{60}\pi$	$\frac{7}{40}\pi$	$\frac{101}{600}\pi$	$\frac{67}{400}\pi$	$\frac{1001}{6000}\pi$	
$x - \frac{1}{6}\pi$	$-\frac{1}{60}\pi$	$-\frac{1}{120}\pi$	$-\frac{1}{600}\pi$	$-\frac{1}{1200}\pi$	$-\frac{1}{6000}\pi$	$\frac{1}{60}\pi$	$\frac{1}{120}\pi$	$\frac{1}{600}\pi$	$\frac{1}{1200}\pi$	$\frac{1}{6000}\pi$	
$\dfrac{\cos x - \cos \frac{1}{6}\pi}{x - \frac{1}{6}\pi}$	-0,4771	0,4886	0,4977	0,4989	0,4998	0,5224	0,5113	0,5023	0,5011	0,500	

(b) $\displaystyle\lim_{x \to \pi/6} \frac{\cos x - \cos \frac{1}{6}\pi}{x - \frac{1}{6}\pi} = \frac{d}{dx} \cos x \Big|_{x=\pi/6} = \operatorname{sen} \frac{1}{6}\pi = -\frac{1}{2}$

49.

x	$\frac{3}{5}\pi$	$\frac{19}{30}\pi$	$\frac{33}{50}\pi$	$\frac{199}{300}\pi$	$\frac{333}{500}\pi$	$\frac{11}{15}\pi$	$\frac{7}{10}\pi$	$\frac{101}{150}\pi$	$\frac{67}{100}\pi$	$\frac{1001}{1500}\pi$
$x - \frac{2}{3}\pi$	$-\frac{1}{15}\pi$	$-\frac{1}{30}\pi$	$-\frac{1}{150}\pi$	$-\frac{1}{300}\pi$	$-\frac{1}{1500}\pi$	$\frac{1}{15}\pi$	$\frac{1}{30}\pi$	$\frac{1}{150}\pi$	$\frac{1}{300}\pi$	$\frac{1}{1500}\pi$
$\dfrac{\operatorname{cosec} x - \operatorname{cosec} \frac{2}{3}\pi}{x - \frac{2}{3}\pi}$	0,4929	0,5736	0,6468	0,6567	0,6647	0,9116	0,7770	0,6872	0,6768	0,6687

(b) $\displaystyle\lim_{x \to 2\pi/3} \frac{\operatorname{cosec} - \operatorname{cosec} \frac{2}{3}\pi}{x - \frac{2}{3}\pi} = \frac{d}{dx} \operatorname{cosec} x \Big|_{x=2\pi/3} = -\operatorname{cosec}\frac{2}{3}\pi \operatorname{cotg}\frac{2}{3}\pi = -\frac{2}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3}$

51. Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$. Então, $f'(x) = \cos x$.

(a) Se $x = 0$, $y = 0$, e a inclinação da reta tangente é $f'(0) = \cos 0 = 1$; assim, uma equação da reta tangente em $(0, 0)$ é $y = x$.

(b) Se $x = \frac{1}{3}\pi$, $y = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, e a inclinação da reta tangente é $f'(\frac{1}{3}\pi) = \cos(\frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}$; assim, uma equação da reta tangente em $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ é $y - \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{3}\pi)$; $3x - 6y - \pi + 3\sqrt{3} = 0$.

(c) Se $x = \pi$, $y = 0$, e a inclinação da reta tangente é $f'(\pi) = -1$; assim, uma equação da reta tangente em $(\pi, 0)$ é $y = -1(x - \pi)$; $x + y - \pi = 0$.

53. Seja $f(x) = \operatorname{tg} x$. Então, $f'(x) = \sec^2 x$.

(a) Quando $x = 0$, $y = 0$, e a inclinação da reta tangente é $f'(0) = \sec^2 0 = 1$; assim, uma equação da reta tangente em $(0, 0)$ é $y = x$.

(b) Quando $x = \frac{1}{4}\pi$, $y = 1$, e a inclinação da reta tangente é $f'(\frac{1}{4}\pi) = \sec^2(\frac{1}{4}\pi) = 2$; assim, uma equação da reta tangente em $(\frac{1}{4}\pi, 1)$ é $y - 1 = 2(x - \frac{1}{4}\pi)$; $4x - 2y + 2 - \pi = 0$.

(c) Quando $x = -\frac{1}{4}\pi$, $y = -1$, e a inclinação da reta tangente é $f'(-\frac{1}{4}\pi) = \sec^2(-\frac{1}{4}\pi) = 2$; assim, uma equação da reta tangente em $(-\frac{1}{4}\pi, -1)$ é $y + 1 = 2(x + \frac{1}{4}\pi)$; $4x - 2y - 2 + \pi = 0$.

55. $s = 4 \operatorname{sen} t$. (a) A velocidade instantânea é dada por $v(t) = \frac{ds}{dt} = 4 \cos t$.

(b) $v(0) = 4 \cos 0 = 4$ $\quad v(\frac{1}{3}\pi) = 4 \cos(\frac{1}{3}\pi) = 4(\frac{1}{2}) = 2$ $\quad v(\frac{1}{2}\pi) = 4 \cos(\frac{1}{2}\pi) = 4(0) = 0$

$v(\frac{2}{3}\pi) = 4 \cos(\frac{2}{3}\pi) = 4(-\frac{1}{2}) = -2$ $\quad v(\pi) = 4 \cos \pi = 4(-1) = -4$

57. $s = -3 \cos t$ (a) A velocidade instantânea é dada por $v(t) = \frac{ds}{dt} = 3 \operatorname{sen} t$.

(b) $v(0) = 3(0) = 0$ $\quad v\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$ $\quad v\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 3\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ $\quad v\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 3(1) = 3$

$v\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 3\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ $\quad v\left(\frac{5}{6}\pi\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$ $\quad v(\pi) = 3(0) = 0$

59. $F = \dfrac{kW}{k \operatorname{sen} \theta + \cos \theta} = \dfrac{\frac{1}{2}W}{\frac{1}{2}\operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$

A taxa de variação instantânea de F em relação a θ é $F'(\theta) = \dfrac{\frac{1}{2}W(\frac{1}{2}\cos \theta - \operatorname{sen} \theta)}{(\frac{1}{2}\operatorname{sen} \theta + \cos \theta)^2}$.

(a) $F'(\frac{1}{4}\pi) = \dfrac{-\frac{1}{2}W(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2})}{(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2})^2} = \dfrac{-\frac{1}{2}W(-\frac{1}{4}\sqrt{2})}{(\frac{3}{4}\sqrt{2})^2} = \dfrac{\frac{1}{8}\sqrt{2}W}{\frac{9}{8}} = \dfrac{\sqrt{2}}{9}W$ (b) $F'(\frac{1}{2}\pi) = \dfrac{-\frac{1}{2}W(\frac{1}{2}\cdot 0 - 1)}{(\frac{1}{2}\cdot 1 + 0)^2} = 2W$

EXERCÍCIOS 3.6 A Derivada de uma Função Composta e a Regra da Cadeia

1. $f'(x) = D_x(2x+1)^3 = 3(2x+1)^2 D_x(2x+1) = 3(2x+1)^2(2) = 6(2x+1)^2$

3. $F'(x) = D_x(x^2+4x-5)^4 = 4(x^2+4x-5)^3 D_x(x^2+4x-5) = 4(x^2+4x-5)^3(2x+4)$

$= 8(x+2)(x^2+4x-5)^3$

5. $f'(t) = D_t(2t^4-7t^3+2t-1)^2 = 2(2t^4-7t^3+2t-1)D_t(2t^4-7t^3+2t-1)$

$= 2(2t^4-7t^3+2t-1)(8t^3-21t^2+2)$

7. $f'(x) = D_x[(x^2+4)^{-2}] = -2(x^2+4)^{-3}D_x(x^2+4) = -2(x^2+4)^{-3}(2x) = -4x(x^2+4)^{-3}$

9. $f'(x) = D_x(4\cos 3x - 3\,\text{sen}\,4x) = -4(\text{sen}\,3x)(3) - 3(\cos 4x)(4) = -12(\text{sen}\,3x + \cos 4x)$

11. $h'(x) = D_x(\frac{1}{3}\sec^3 2x - \sec 2x) = \sec^2 2x\, D_x(\sec 2x) - D_x(\sec 2x) = (\sec^2 2x - 1)(\sec 2x\ \text{tg}\ 2x)(2)$

$= (\text{tg}^2 2x)(2\sec 2x\ \text{tg}\ 2x) = 2\sec 2x\ \text{tg}^3 2x$

13. $\frac{d}{dx}(\sec^2 x\ \text{tg}^2 x) = D_x(\sec^2 x)\ \text{tg}^2 x + \sec^2 x\ D_x(\text{tg}^2 x)$

$= 2\sec x(\sec x\ \text{tg}\ x)\ \text{tg}^2 x + \sec^2 x(2\ \text{tg}\ x\sec^2 x) = 2\sec^2 x\ \text{tg}^3 x + 2\sec^2 x\ \text{tg}\ x$

$= 2\sec^2 x\ \text{tg}\ x(\text{tg}^2 x + \sec^2 x)$

15. $\frac{d}{dt}(\text{cotg}^4 t - \text{cosec}^4 t) = 4\,\text{cotg}^3 t(-\text{cosec}^2 t) - 4\,\text{cosec}^3 t(-\text{cosec}\,t\,\text{cotg}\,t) = -4\,\text{cotg}\,t\,\text{cosec}^2 t(\text{cotg}^2 t - \text{cosec}^2 t)$

$= -4\,\text{cotg}\,t\,\text{cosec}^2 t(-1) = 4\,\text{cotg}\,t\,\text{cosec}^2 t.$ De outro modo,

$\frac{d}{dt}(\text{cotg}^4 t - \text{cosec}^4 t) = \frac{d}{dt}[(\text{cotg}^2 t - \text{cosec}^2 t)(\text{cotg}^2 t + \text{cosec}^2 t)] = \frac{d}{dt}[-(2\,\text{cotg}^2 t - 1)] = 4\,\text{cotg}\,t\,\text{cosec}^2 t$

17. $D_u[(3u^2+5)^3(3u-1)^2] = D_u(3u^2+5)^3\cdot(3u-1) + (3u^2+5)^3 D_u(3u-1)^2$

$= 3(3u^2+5)^2(6u)(3u-1)^2 + (3u^2+5)^3[2(3u-1)(3)] = 18u(3u^2+5)^2(3u-1)^2 + 6(3u^2+5)^3(3\mu-1)$

$= 6(3u^2+5)^2(3u-1)[3u(3u-1) + (3u^2+5)] = 6(3u^2+5)^2(3u-1)(12u^2-3u+5)$

19. $D_x[(2x-5)^{-1}(4x+3)^{-2}] = D_x(2x-5)^{-1}\cdot(4x+3)^{-2} + (2x-5)^{-1}D_x(4x+3)^{-2}$

$= -(2x-5)^{-2}(2)(4x+3)^{-2} + (2x-5)^{-1}(-2)(4x+3)^{-3}(4)$

$= -2(2x-5)^{-2}(4x+3)^{-3}[(4x+3) + 4(2x-5)] = -2(2x-5)^{-2}(4x+3)^{-3}(12x-17)$

21. $D_r[(r^2+1)^3(2r^2+5r-3)^2] = D_r(r^2+1)^3\cdot(2r^2+5r-3)^2 + (r^2+1)D_r(2r^2+5r-3)^2$

$= 3(r^2+1)^2(2r)(2r^2+5r-3)^2 + (r^2+1)^3(2)(2r^2+5r-3)(4r+5)$

$= 2(r^2+1)^2(2r^2+5r-3)[3r(2r^2+5r-3) + (r^2+1)(4r+5)]$

$= 2(r^2+1)^2(2r^2+5r-3)(6r^3+15r^2-9r+4r^3+5r^2+4r+5)$

$= 2(r^2+1)^2(2r^2+5r-3)(10r^3+20r^2-5r+5) = 10(r^2+1)^2(2r-1)(r+3)(2r^3+4r^2-r+1)$

23. $\frac{d}{dy}\left[\left(\frac{y-7}{y+2}\right)^2\right] = 2\left(\frac{y-7}{y+2}\right)^1\frac{d}{dy}\left(\frac{y-7}{y+2}\right) = 2\left(\frac{y-7}{y+2}\right)\frac{(y+2)(1)-(y-7)(1)}{(y+2)^2} = \frac{2(y-7)(9)}{(y+2)^2} = \frac{18(y-7)}{(y+2)^3}$

25. $f'(x) = D_x\left(\frac{2x-1}{3x^2+x-2}\right)^3 = 3\left(\frac{2x-1}{3x^2+x-2}\right)^3 D_x\left(\frac{2x-1}{3x^2+x-2}\right)$

$= 3\left(\frac{2x-1}{3x^2+x-2}\right)^2\left[\frac{(3x^2+x-2)(2)-(2x-1)(6x+1)}{(3x^2+x-2)^2}\right] = \frac{(2x-1)^2(6x^2+2x-4-12x^2+4x+1)}{(3x^2+x-2)^4}$

$= \frac{3(2x-1)^2(-6x^2+6x-3)}{(3x^2+x-2)^4} = \frac{-9(2x-1)^2(2x^2-2x+1)}{(3x^2+x-2)^4}$

27. $f'(z) = D_z\frac{(z^2-5)^3}{(z^2+4)^2} = \frac{(z^2+4)^2 D_z(z^2-5)^3 - (z^2-5)^3 D_z(z^2+4)^2}{(z^2+4)^4}$

$= \frac{(z^2+4)^2[3(z^2-5)^2(2z)] - (z^2-5)^3[2(z^2+4)(2z)]}{(z^2+4)^4}$

$= \frac{(z^2+4)(z^2-5)^2[(z^2+4)(6z)-(z^2-5)(4z)]}{(z^2+4)^4} = \frac{(z^2-5)^2(6z^3+24z-4z^3+20z)}{(z^2+4)^3}$

$= \frac{2z(z^2-5)^2(z^2+22)}{(z^2+4)^3}$

29. $g'(t) = D_t\,\text{sen}^2(3t^2-1) = 2\,\text{sen}(3t^2-1)D_t\,\text{sen}(3t^2-1) = 2\,\text{sen}(3t^2-1)\cos(3t^2-1)(6t)$

$= 6t\,\text{sen}(6t^2-2)$

31. $f'(x) = D_x(\text{tg}^2 x - x^2)^3 = 3(\text{tg}^2 x - x^2)^2 D_x(\text{tg}^2 x - x^2) = 3(\text{tg}^2 x - x^2)^2[2\,\text{tg}\,x(\sec^2 x) - 2x]$

$= 6(\text{tg}^2 x - x^2)^2(\text{tg}\,x\sec^2 x - x)$

33. $f'(y) = D_y\left(\frac{3\,\text{sen}\,2y}{\cos^2 2y+1}\right) = \frac{(\cos^2 2y+1)D_y(3\,\text{sen}\,2y) - (3\,\text{sen}\,2y)D_y(\cos^2 2y+1)}{(\cos^2 2y+1)^2}$

$= \frac{(\cos^2 2y+1)(6\cos 2y) - (3\,\text{sen}\,2y)[2\cos 2y(-\text{sen}\,2y)(2)]}{(\cos^2 2y+1)^2}$

$= \frac{6\cos 2y(\cos^2 2y + 1 + 2\,\text{sen}^2 2y)}{(\cos^2 2y+1)^2} = \frac{6\cos 2y(2+\text{sen}^2 2y)}{(\cos^2 2y+1)^2}$

35. $F'(x) = D_x[4\cos(\text{sen}\,3x)] = -4\,\text{sen}(\text{sen}\,3x)D_x(\text{sen}\,3x) = -4\,\text{sen}(\text{sen}\,3x)\cos 3x(3)$

$= -12\cos 3x\,\text{sen}(\text{sen}\,3x)$

37. $y = (x^2-1)^2$; $y'(x) = 2(x^2-1)D_x(x^2-1) = 2(x^2-1)(2x) = 4x(x^2-1)$

Ponto	Inclinação	Equação da reta tangente
$(-2, 9)$	$y'(-2) = -24$	$y - 9 = -24(x+2)$; $24x + y + 39 = 0$
$(-1, 0)$	$y'(-1) = 0$	$y - 0 = 0(x+1)$; $y = 0$
$(0, 1)$	$y'(0) = 0$	$y - 1 = 0(x-0)$; $y = 1$
$(1, 0)$	$y'(1) = 0$	$y - 0 = 0(x-1)$; $y = 0$
$(2, 9)$	$y'(2) = 24$	$y - 9 = 24(x-2)$; $24x - y - 39 = 0$

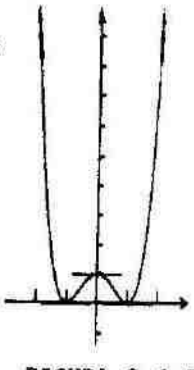


FIGURA 3.6-37

39. $s = \dfrac{(t^2 - 1)^2}{(t^2 + 1)^2}$

(a) $v(t) = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{D_t(t^2 - 1)^2 \cdot (t^2 + 1)^2 - D_t(t^2 + 1)^2 \cdot (t^2 - 1)^2}{(t^2 + 1)^4}$

$= \dfrac{2(t^2 - 1)(2t)(t^2 + 1)^2 - 2(t^2 + 1)(2t)(t^2 - 1)^2}{(t^2 + 1)^4} = \dfrac{4t(t^2 - 1)(t^2 + 1)[(t^2 + 1) - (t^2 - 1)]}{(t^2 + 1)^4}$

$= \dfrac{8t(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^3}$

Portanto, em t s a velocidade instantânea é $\dfrac{8t(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^3}$ cm/s.

(b) $v(1) = 0$. Logo, quando t=1, a velocidade instantânea é 0 cm/s.

$v(2) = \dfrac{16(3)}{(5)^3} = \dfrac{48}{125}$. Logo, quando t=1, a velocidade instantânea é $\dfrac{48}{125}$ cm/s.

41. $s = 5 \operatorname{sen} \pi t + 3 \cos \pi t$; $v(t) = \dfrac{ds}{dt} = 5\pi \cos \pi t + 3\pi \operatorname{sen} \pi t$

Portanto, em t s a velocidade instantânea é $(5\pi \cos \pi t - 3\pi \operatorname{sen} \pi t)$ cm/s.

$v(\tfrac{1}{4}) = 5\pi \cos \tfrac{1}{4}\pi - 3\pi \operatorname{sen} \tfrac{1}{4}\pi = 5\pi(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) - 3\pi(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) = \sqrt{2}\pi$

Logo, qdo $t = \tfrac{1}{4}$, a velocidade instantânea é $\sqrt{2}\,\pi$ cm/s.

$v(\tfrac{3}{2}) = 5\pi \cos \tfrac{3}{2}\pi - 3\pi \operatorname{sen} \tfrac{3}{2}\pi = 5\pi(0) - 3\pi(-1) = 3\pi$

Logo, qdo $t = \tfrac{3}{2}$, a velocidade instantânea é 3π cm/s.

43. $E(t) = 50 \operatorname{sen} 120\pi t$; $E'(t) = 50 \cos 120\pi t(120\pi) = 6.000\pi \cos 120\pi t$

(a) $E'(0{,}02) = 6.000\pi \cos 2{,}4\pi = 6.000\pi \cos .4\pi \approx 5824{,}8$. Logo, a taxa de variação instantânea de $E(t)$ em relação a t em $t = 0{,}02$ s 5824,8 volts/s.

(b) $E'(0{,}2) = 6.000\pi \cos 24\pi = 6.000\pi \approx 18.850$. Logo, a taxa de variação instantânea de $E(t)$ em relação a t em $t = 0{,}2$ s é 18.850 volts/s.

45. $h(\theta) = 20 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\theta$; $h'(\theta) = 2(20) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\theta \cos \tfrac{1}{2}\theta(\tfrac{1}{2}) = 10(2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\theta \cos \tfrac{1}{2}\theta) = 10 \operatorname{sen} \theta$

(a) $h'(\tfrac{1}{3}\pi) = 10 \operatorname{sen} \tfrac{1}{3}\pi = 10(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}) = 5\sqrt{3}$

Logo, a taxa de variação instantânea de $h(\theta)$ em $\theta = \tfrac{1}{3}\pi$ é $5\sqrt{3}$ cm/rad.

(b) $h'(\tfrac{1}{2}\pi) = 10 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\pi = 10$

Logo, a taxa de variação instantânea de $h(\theta)$ em $\theta = \tfrac{1}{2}\pi$ é 10 cm/rad.

47. Após t semanas haverá x presas e y predadores qdo $y = \tfrac{1}{6}x^2 + 90$ e $x = 7t + 85$.

Se $t = 8$, $x = 7(8) + 85 = 141$ e $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{3}x(7) = \dfrac{1}{3}(141)7 = 329$. Assim, após 8 semanas a população de predadores estará crescendo à taxa de 329 predadores por semana.

49. $f(x) = x^3$; $g(x) = f(x^2)$

(a) $f'(x) = 3x^2$, assim $f'(x^2) = 3(x^2)^2 = 3x^4$ (b) $g'(x) = D_x[f(x^2)] = f'(x^2)(2x) = 3x^4(2x) = 6x^5$

51. $D_x(\cos x) = D_x[\operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\pi - x)] = \cos(\tfrac{1}{2}\pi - x)(-1) = -\cos(\tfrac{1}{2}\pi - x) = -\operatorname{sen} x$

53. Se g for uma função par, então pelo Exerc. 52(a), g' será uma função ímpar; então $g(-x) = g(x)$ e $g'(-x) = -g'(x)$ para todo x no domínio de g'. Se $h(x) = (f\circ g)(x)$, então, $h'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$, assim $h'(-x) = f'(g(-x))\cdot g'(-x) = f'(g(x))(-g'(x)) = -h'(x)$

Substituindo $x = 0$ temos $h'(0) = -h'(0)$; $2h'(0) = 0$; $h'(0) = 0$.

55. $f(x) = x^4$; $g(x) = [\![x]\!]$. Veja a Figura 9 da Secção 1.5 no texto.

A função g não satisfaz a condição (ii), já que para qualquer inteiro n, e para qualquer $x \neq x_1$ no intervalo $(n, n+1)$, temos $g(x) = n = g(x_1)$, logo $g(x) - g(x_1) = 0$.

57. $f(x) = x^2$; $g(x) = |x| + |x-1| = \begin{cases} -x-(x-1) = -2x+1 & \text{se } x < 0 \\ x-(x-1) = 1 & \text{se } 0 \le x \le 1. \\ x+(x-1) = 2x-1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ Veja a Figura 1.5-37.

A função g não satisfaz a condição (ii), já que para qualquer $x \neq x_1$ no intervalo $[0, 1]$ temos $g(x) - g(x_1) = 1 - 1 = 0$.

59. $f'(x) = \dfrac{1}{x}$; $f(g(x)) = x$. Derivando cada lado da segunda equação, obtemos

$f'(g(x))\cdot g'(x) = 1$; $\dfrac{1}{g(x)}\cdot g'(x) = 1$. Logo, $g'(x) = g(x)$.

EXERCÍCIOS 3.7 A Derivada da Função Potência para Expoentes Racionais

1. $f'(x) = D_x(4x^{1/2} + 5x^{-1/2}) = \frac{1}{2}\cdot 4x^{-1/2} - \frac{1}{2}\cdot 5x^{-3/2} = 2x^{-1/2} - \frac{5}{2}x^{-3/2}$

3. $g'(x) = D_x(\sqrt{1+4x^2}) = D_x(1+4x^2)^{1/2} = \frac{1}{2}(1+4x^2)^{-1/2}(8x) = 4x(1+4x^2)^{-1/2} = \dfrac{4x}{\sqrt{1+4x^2}}$

5. $f'(x) = D_x(5-3x)^{2/3} = \frac{2}{3}(5-3x)^{-1/3}(-3) = -2(5-3x)^{-1/3}$

7. $g'(y) = D_y\left(\dfrac{1}{\sqrt{25-y^2}}\right) = D_y(25-y^2)^{-1/2} = -\dfrac{1}{2}(25-y^2)^{-3/2}(-2y) = \dfrac{y}{(25-y^2)^{3/2}}$

9. $h'(t) = D_t(2\cos\sqrt{t}) = D_t[2\cos(t^{1/2})] = -2\,\text{sen}(t^{1/2})(\frac{1}{2}t^{-1/2}) = -t^{-1/2}\text{sen}(t^{1/2}) = \dfrac{-1}{\sqrt{t}}\,\text{sen}\sqrt{t}$

11. $g'(r) = D_r(\text{cotg}\sqrt{3r}) = D_r[\text{cotg}(\sqrt{3}r^{1/2})] = -\text{cossec}^2(\sqrt{3}r^{1/2})(\frac{1}{2}\sqrt{3}r^{-1/2}) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{r}}\text{cossec}^2\sqrt{3r}$

13. $f'(x) = D_x(\text{sen } 3x)^{-1/2} = -\dfrac{1}{2}(\text{sen } 3x)^{-3/2}(\cos 3x)(3) = -\dfrac{3}{2}\cos 3x(\text{sen } 3x)^{-3/2} = -\dfrac{3\cos 3x}{2(\text{sen } 3x)^{3/2}}$

15. $f'(x) = D_x(\text{tg}\sqrt{x^2+1}) = D_x[\text{tg}(x^2+1)^{1/2}] = \sec^2(x^2+1)^{1/2}[\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}(2x)]$

$= \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\sec^2\sqrt{x^2+1}$

17. $g'(x) = D_x\sqrt{\dfrac{2x-5}{3x+1}} = D_x\left(\dfrac{2x-5}{3x+1}\right)^{1/2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2x-5}{3x+1}\right)^{-1/2}D_x\left(\dfrac{2x-5}{3x+1}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2x-5}{3x+1}\right)^{-1/2}\left[\dfrac{3x+1(2)-2x-5(3)}{(3x+1)^2}\right]$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3x+1}{2x-5}\right)^{1/2}\left[\dfrac{6x+2-6x+15}{(3x+1)^2}\right] = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3x+1}{2x-5}\right)^{1/2}\dfrac{17}{(3x+1)^2} = \dfrac{17}{2[(2x-5)(3x+1)^3]^{1/2}}$

19. $f'(x) = D_x(\sqrt[3]{2x^3 - 5x^2 + x}) = D_x(2x^3 - 5x^2 + x)^{1/3} = \frac{1}{3}(2x^3 - 5x^2 + x)^{-2/3}(6x^2 - 10x + 1)$

$= \dfrac{6x^2 - 10x + 1}{3\sqrt[3]{(2x^3 - 5x^2 + x)^2}}$

21. $g'(t) = D_t\left(\sqrt{2t} + \sqrt{\frac{2}{t}}\right) = D_t[\sqrt{2}(t^{1/2} + t^{-1/2})] = \sqrt{2}(\frac{1}{2}t^{-1/2} - \frac{1}{2}t^{-3/2}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}t^{-3/2}(t - 1)$

23. $f'(x) = D_x[(5 - x^2)^{1/2}(x^3 + 1)^{1/4}] = \frac{1}{2}(5 - x^2)^{-1/2}(-2x)(x^3 + 1)^{1/4} + (5 - x^2)^{1/2}[\frac{1}{4}(x^3 + 1)^{-3/4}(3x^2)]$

$= \frac{1}{4}x(5 - x^2)^{-1/2}(x^3 + 1)^{-3/4}[-4(x^3 + 1) + 3x(5 - x^2)]$

$= \frac{1}{4}x(5 - x^2)^{-1/2}(x^3 + 1)^{-3/4}(-4x^3 - 4 + 15x - 3x^3) = \frac{1}{4}x(5 - x^2)^{-1/2}(x^3 + 1)^{-3/4}(-7x^3 + 15x - 4)$

25. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}\right) = \dfrac{x[\frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-1/2}(2x)] - (x^2 - 1)^{1/2}(1)}{x^2} = \dfrac{(x^2 - 1)^{-1/2}[x^2 - (x^2 - 1)]}{x^2} = \dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2 - 1}}$

27. $\dfrac{d}{dt}\left(\sqrt{\dfrac{\text{sen}\, t + 1}{1 - \text{sen}\, t}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1 + \text{sen}\, t}{1 - \text{sen}\, t}\right)^{-1/2} \dfrac{(1 - \text{sen}\, t)(\cos t) - (1 + \text{sen}\, t)(-\cos t)}{(1 - \text{sen}\, t)^2}$

$= \dfrac{1}{2}\dfrac{(1 - \text{sen}\, t)^{1/2}}{(1 + \text{sen}\, t)^{1/2}}\dfrac{2\cos t}{(1 - \text{sen}\, t)^2} = \dfrac{\cos t}{(1 + \text{sen}\, t)^{1/2}(1 - \text{sen}\, t)^{3/2}}$

$= \dfrac{\cos t}{(1 - \text{sen}^2 t)^{1/2}(1 - \text{sen}\, t)} = \dfrac{\text{sgn}(\cos t)}{1 - \text{sen}\, t}$

29. $\dfrac{d}{dy}(\text{tg}\sqrt{y}\sec\sqrt{y}) = [\sec^2\sqrt{y}(\frac{1}{2}y^{-1/2})]\sec\sqrt{y} + \text{tg}\sqrt{y}[\sec\sqrt{y}\,\text{tg}\sqrt{y}(\frac{1}{2}y^{-1/2})] = \dfrac{\sec\sqrt{y}(\sec^2\sqrt{y} + \text{tg}^2\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$

31. $D_x\left(\dfrac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt[3]{x + 1}}\right) = D_x[(x - 1)^{1/2}(x + 1)^{-1/3}] = \dfrac{1}{2}(x - 1)^{-1/2}(x + 1)^{-1/3} - \dfrac{1}{3}(x - 1)^{1/2}(x + 1)^{-4/3}$

$= \dfrac{1}{6}(x - 1)^{-1/2}(x + 1)^{-4/3}[3(x + 1) - 2(x - 1)] = \dfrac{1}{6}(x - 1)^{-1/2}(x + 1)^{-4/3}(x + 5) = \dfrac{x + 5}{6\sqrt[3]{(x + 1)^4}\sqrt{x - 1}}$

33. $D_x(\sqrt{9 + \sqrt{9 - x}}) = D_x([9 + (9 - x)^{1/2}]^{1/2}) = \frac{1}{2}[9 + (9 - x)^{1/2}]^{-1/2}D_x[9 + (9 - x)^{1/2}]$

$= \frac{1}{2}[9 + (9 - x)^{1/2}]^{-1/2}[\frac{1}{2}(9 - x)^{-1/2}(-1)] = \dfrac{-1}{4\sqrt{9 + \sqrt{9 - x}}\sqrt{9 - x}}$

35. $D_z\left(\dfrac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 2z}}\right) = D_z[(1 + \cos^2 2z)^{-1/2}] = -\frac{1}{2}(1 + \cos^2 2z)^{-3/3}[(2\cos 2z)(-\text{sen}\, 2z)(2)]$

$= 2\cos 2z\,\text{sen}\, 2z(1 + \cos^2 2z)^{-3/2} = \dfrac{\text{sen}\, 4z}{(1 + \cos^2 2z)^{3/2}}$

37. $y = (2x-2)^{2/3}$; $y'(x) = \frac{2}{3}(2x-2)^{-1/3}(2) = \frac{4}{3}(2x-2)^{-1/3}$

Ponto	Inclinação	Equação da reta tangente
$(-3, 4)$	$y'(-3) = -\frac{2}{3}$	$y - 4 = -\frac{2}{3}(x+3)$; $2x + 3y = 6$
$(0, \sqrt[3]{4})$	$y'(\sqrt[3]{4}) = -\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$	$y - \sqrt[3]{4} = -\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}(x - 0)$; $2\sqrt[3]{4}x + 3y = 3\sqrt[3]{4}$
$(1, 0)$	$\lim_{x\to 1^-} y'(x) = -\infty$,	$\lim_{x \to 1^+} y'(x) = +\infty$, $x = 1$
$(2, \sqrt[3]{4})$	$y'(2) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$	$y - \sqrt[3]{4} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{4}(x-2)$; $2\sqrt[3]{4}x - 3y = \sqrt[3]{4}$
$(5, 4)$	$y'(5) = \frac{2}{3}$	$y - 4 = \frac{2}{3}(x-5)$; $2x - 3y = -2$

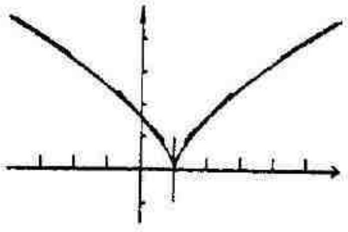


FIGURA 3.7-37

39. $y = \sqrt{x^2+9} = (x^2+9)^{1/2}$; $y'(x) = \frac{1}{2}(x^2+9)^{-1/2}(2x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$

Em $(4,5)$: $y'(4) = \frac{4}{5}$ Equação da reta tangente: $y - 5 = \frac{4}{5}(x-4)$; $4x - 5y = -9$

41. $y = x\sqrt{16+x^2} = x(16+x^2)^{1/2}$

$y'(x) = (16+x^2)^{1/2} + x[\frac{1}{2}(16+x^2)^{-1/2}(2x)] = (16+x^2)^{-1/2}[16+x^2+x^2] = \dfrac{2x^2+16}{\sqrt{16+x^2}}$

Em $(0,0)$: $\dfrac{-1}{y'(0)} = \dfrac{-1}{4}$ Equação da reta normal: $y = -\frac{1}{4}x$; $x + 4y = 0$.

43. $s = \sqrt{4t^2+3}$, $t \geq 0$; $v = \dfrac{ds}{dt} = \frac{1}{2}(4t^2+3)^{-1/2}(8t) = \dfrac{4t}{\sqrt{4t^2+3}}$

(a) $v = 0$ qdo $\dfrac{4t}{\sqrt{4t^2+3}} = 0$; $t = 0$

(b) $v = 1$ qdo $\dfrac{4t}{\sqrt{4t^2+3}} = 1$; $4t = \sqrt{4t^2+3}$; $16t^2 = 4t^2+3$; $12t^2 = 3$; $t^2 = \frac{1}{4}$; $t = \frac{1}{2}$

(c) $v = 2$ qdo $\dfrac{4t}{\sqrt{4t^2+3}} = 2$; $2t = \sqrt{4t^2+3}$; $4t^2 = 4t^2 + 3$. Não há valor de t.

45. C(x) é a quantia correspondente ao custo total da produção de x litros de um líquido $C(x) = 6 + 4\sqrt{x}$.

(a) C' é a função custo marginal: $C'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$; $C'(16) = \dfrac{2}{\sqrt{16}} = \dfrac{1}{2}$.

Assim, o custo marginal quando 16 litros são produzidos é 50 centavos por litro.

(b) Queremos encontrar x para cada $C'(x) = 0{,}40$: $\dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0{,}40$; $\sqrt{x} = 5$; $x = 25$

Portanto, 25 litros são produzidos quando o custo marginal é 0,40 por litro.

47. $R = px = (30\sqrt{300-2x}) = 30x(300-2x)^{1/2}$, $x \in [0, 150]$.

$R'(x) = 30(300-2x)^{1/2} + 30x[\frac{1}{2}(300-2x)^{-1/2}(-2)] = 30(300-2x)^{-1/2}[300 - 2x - x]$

$= \dfrac{30(300-3x)}{\sqrt{300-2x}} = \dfrac{90(100-x)}{\sqrt{300-2x}}$

$R'(x) = 0$ quando $x = 100$; portanto, 100 apartamentos devem ser alugados.

49. t minutos depois que o avião passou sobre a estátua, a distância horizontal percorrida foi de $\frac{9}{2}t$ km e s km é a distância da linha de visão entre o avião e a estátua. Então, do Teorema de Pitágoras,

$$s^2 = 4 + \left(\frac{9}{2}t\right)^2; \quad s = \left(4 + \frac{81}{4}t^2\right)^{1/2} = \frac{1}{2}(16 + 81t^2)^{1/2}; \quad \frac{ds}{dt} = \frac{1}{4}(16 + 81t^2)^{-1/2}(162t) = \frac{81t}{2\sqrt{16 + 81t^2}}$$

Queremos encontrar $\frac{ds}{dt}$ qdo $t = \frac{1}{3}$. $\left.\frac{ds}{dt}\right]_{t=1/3} = \frac{81(\frac{1}{3})}{2\sqrt{16 + 81(\frac{1}{3})^2}} = \frac{27}{2\sqrt{25}} = 2,7$

Portanto, a distância da linha de visão entre o avião e a estátua está variando à taxa de **2,7 km/min, 20 s** depois que o avião passou por ela.

51. $f'(x) = D_x|x^2 - 4| = [(x^2 - 4)^2]^{1/2} = \frac{1}{2}[(x^2 - 4)^2]^{-1/2}[2(x^2 - 4)(2x)]$

$$= \frac{2x(x^2 - 4)}{[(x^2 - 4)^2]^{1/2}} = \frac{2x(x^2 - 4)}{|x^2 - 4|}$$

De outro modo, $D_x|x^2 - 4| = \text{sgn}(x^2 - 4)D_x(x^2 - 4) = 2x\,\text{sgn}(x^2 - 4)$, $x \neq \pm 2$.

53. $g'(x) = D_x(|x|^3) = D_x(x^2)^{3/2} = \frac{3}{2}(x^2)^{1/2}(2x) = 3x|x|$

55. $g(x) = |f(x)|$. Então, $g'(x) = D_x[f(x)^2]^{1/2} = \frac{1}{2}[f(x)^2]^{-1/2}D_x[f(x)^2] = |f(x)|^{-1}f(x)f'(x)$ e $|g'(x)| = |f(x)|^{-1}|f(x)||f'(x)| = |f'(x)|$, se $f(x) \neq 0$. Suponhamos que $f(a) = 0$. Então,

$$g_+'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{|f(x)| - |f(a)|}{x - a} = \lim_{x \to a^+} \frac{|f(x)|}{x - a} \geq 0 \quad \text{e} \quad g_-'(x) = \lim_{x \to a^-} \frac{|f(x)| - |f(a)|}{x - a} = \lim_{x \to a^-} \frac{|f(x)|}{x - a} \leq 0$$

Como $g'(a)$ existe, então $g'(a) = 0$ e $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{x - a} = 0$. Portanto,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{x - a} = 0 \text{ e assim } |g'(a)| = |f'(a)|.$$

EXERCÍCIOS 3.8 Derivação Implícita

1. $x^2 + y^2 = 16; \quad 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

3. $x^3 + y^3 = 8xy; \quad 3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 8y + 8x\frac{dy}{dx}; \quad \frac{dy}{dx}(3y^2 - 8x) = 8y - 3x^2; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{8y - 3x^2}{3y^2 - 8x}$

5. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1; \quad -x^{-2} - y^{-2}\frac{dy}{dx} = 0; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x^{-2}}{y^{-2}} = -\frac{y^2}{x^2}$

7. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4; \quad \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{2}y^{-1/2}\frac{dy}{dx} = 0; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x^{-1/2}}{y^{-1/2}} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

9. $x^2y^2 = x^2 + y^2; \quad 2xy^2 + 2x^2y\frac{dy}{dx} = 2x + 2y\frac{dy}{dx}; \quad \frac{dy}{dx}(2x^2y - 2y) = 2x - 2xy^2; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x - 2xy^2}{2x^2y - 2y} = \frac{x - xy^2}{x^2y - y}$

11. $x^2 = \frac{x + 2y}{x - 2y}; \quad x^3 - 2x^2y = x + 2y; \quad 3x^2 - 2x^2\frac{dy}{dx} - 4xy = 1 + 2\frac{dy}{dx}; \quad (2x^2 + 2)\frac{dy}{dx} = x^2 - 4xy - 1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 4xy - 1}{2x^2 + 2}$. Usando a regra do quociente você obtém a forma $\frac{dy}{dx} = \frac{x(x - 2y)^2 + 2y}{2x}$.

13. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{xy} = 4y^2$; $\frac{1}{3}x^{-2/3} + \frac{1}{3}(xy)^{-2/3}\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) = 8y\frac{dy}{dx}$; $\frac{dy}{dx}[8y - \frac{1}{3}x(xy)^{-2/3}] = \frac{1}{3}x^{-2/3} + \frac{1}{3}(xy)^{-2/3}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{3}x^{-2/3} + \frac{1}{3}y(xy)^{-2/3}}{8y - \frac{1}{3}x(xy)^{-2/3}} = \frac{y^{2/3} + y}{24x^{2/3}y^{5/3} - x}$

15. $\sqrt{xy} + 2x = \sqrt{y}$; $x^{1/2}y^{1/2} + 2x = y^{1/2}$, então $y \geq 0$; $\frac{1}{2}x^{-1/2}y^{1/2} + \frac{1}{2}x^{1/2}y^{-1/2}\frac{dy}{dx} + 2 = \frac{1}{2}y^{-1/2}\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx}(\frac{1}{2}x^{1/2}y^{-1/2} - \frac{1}{2}y^{1/2}) = -2 - \frac{1}{2}x^{-1/2}y^{1/2}$; $\frac{dy}{dx}(x - \sqrt{x}) = -4\sqrt{xy} - y^2$; $\frac{dy}{dx} = \frac{y + 4\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - x}$

17. $\frac{y}{\sqrt{x} - y} = 2 + x^2$; $y = 2x^{1/2} + x^{5/2} - 2y - x^2y$; $\frac{dy}{dx} = x^{-1/2} + \frac{5}{2}x^{3/2} - 2\frac{dy}{dx} - 2xy - x^2\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx}(3 + x^2) = x^{-1/2} + \frac{5}{2}x^{3/2} - 2xy$; $\frac{dy}{dx}(3 + x^2)2x^{1/2} = 2 + 5x^2 - 4x^{3/2}y$; $\frac{dy}{dx} = \frac{2 + 5x^2 - 4x^{3/2}y}{2x^{1/2}(3 + x^2)}$

19. $y = \cos(x - y)$; $\frac{dy}{dx} = -\text{sen}(x - y)\left(1 - \frac{dy}{dx}\right) = -\text{sen}(x - y) + \text{sen}(x - y)\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx}[1 - \text{sen}(x - y)] = -\text{sen}(x - y)$; $\frac{dy}{dx} = \frac{-\text{sen}(x - y)}{1 - \text{sen}(x - y)} = \frac{\text{sen}(x - y)}{\text{sen}(x - y) - 1}$

21. $\sec^2 x + \text{cosec}^2 y = 4$; $2\sec x(\sec x\ \text{tg}\ x) + 2\,\text{cosec}\,y(-\text{cosec}\,y\,\text{cotg}\,y)\frac{dy}{dx} = 0$; $\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 x\ \text{tg}\ x}{\text{cosec}^2 y\ \text{cotg}\,y}$

23. $x\,\text{sen}\,y + y\cos x = 1$; $\text{sen}\,y + x\cos y\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx}\cos x - y\,\text{sen}\,x = 0$; $\frac{dy}{dx}(x\cos y + \cos x) = y\,\text{sen}\,x - \text{sen}\,y$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y\,\text{sen}\,x - \text{sen}\,y}{x\cos y + \cos x}$

25. $\sec^2 y + \text{cotg}(x - y) = \text{tg}^2 x$; $2\sec y(\sec y\ \text{tg}\ y)\frac{dy}{dx} - \text{cosec}^2(x - y)\left(1 - \frac{dy}{dx}\right) = 2\,\text{tg}\ x\sec^2 x$

$\frac{dy}{dx}[2\sec^2 y\ \text{tg}\ y + \text{cosec}^2(x - y)] = 2\ \text{tg}\ x\sec^2 x + \text{cosec}^2(x - y)$; $\frac{dy}{dx} = \frac{2\ \text{tg}\ x\sec^2 x + \text{cosec}^2(x - y)}{2\cdot\text{tg}\ y\sec^2 y + \text{cosec}^2(x - y)}$

27. $(x + y)^2 - (x - y)^2 = x^3 + y^3$; $4xy = x^3 + y^3$; $4y + 4x\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx}$; $\frac{dy}{dx}(4x - 3y^2) = 3x^2 - 4y$

$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 4y}{4x - 3y^2}$

29. $x^4 + y^4 = 12x^2y$; $4x^3\frac{dx}{dy} + 4y^3 = 24xy\frac{dx}{dy} + 12x^2$; $\frac{dx}{dy}(4x^3 - 24xy) = 12x^2 - 4y^3$; $\frac{dx}{dy} = \frac{4(3x^2 - y^3)}{4(x^3 - 6xy)} = \frac{3x^2 - y^3}{x^3 - 6xy}$

31. $x^3y + 2y^4 - x^4 = 0$; $3x^2y\frac{dx}{dy} + x^3 + 8y^3 - 4x^3\frac{dx}{dy} = 0$; $\frac{dx}{dy}(3x^2y - 4x^3) = -8y^3 - x^3$; $\frac{dx}{dy} = \frac{8y^3 + x^3}{4x^3 - 3x^2y}$

33. $16x^4 + y^4 = 32$; $64x^3 + 4y^3\frac{dy}{dx} = 0$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{64x^3}{4y^3} = -\frac{16x^3}{y^3}$

Em $(1, 2)$: $\frac{dy}{dx} = -\frac{16}{8} = -2$ Equação da reta tangente: $y - 2 = -2(x - 1)$; $2x + y - 4 = 0$

Exercícios 3.8

35. $x^2 + xy + y^2 - 3y = 10$; $2x + y + x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} - 3\frac{dy}{dx} = 0$; $\frac{dy}{dx}(x + 2y - 3) = -2x - y$; $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y}{x + 2y - 3}$

Em (2, 3): $\frac{-1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{-1}{-\frac{7}{5}} = \frac{5}{7}$ Equação da reta normal: $y - 3 = \frac{5}{7}(x - 2)$; $5x - 7y + 11 = 0$

37. $7y^2 - xy^3 = 4$; $14y\frac{dy}{dx} - y^3 - 3xy^2\frac{dy}{dx} = 0$; $\frac{dy}{dx}(14y - 3xy^2) = y^3$; $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{14y - 3xy^2} = \frac{y^2}{14 - 3xy}$

Em (3,2), a taxa de variação de y em relação a x é $\frac{(2)^2}{14 - 3(3)(2)} = \frac{4}{-4} = -1$.

39. $xy = (1 - x - y)^2$; $y + x\frac{dy}{dx} = 2(1 - x - y)\left(-1 - \frac{dy}{dx}\right)$. A reta tangente é paralela ao eixo x qdo $\frac{dy}{dx} = 0$. Tomando $\frac{dy}{dx} = 0$, temos $y = 2(x + y - 1)$; $y = 2 - 2x$. Substituindo, resulta $x(2 - 2x) = (x - 1)^2$; $0 = 3x^2 - 4x + 1 = (3x - 1)(x - 1)$. Nos pontos $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ e $(1, 0)$, a reta tangente é paralela ao eixo x. O gráfico é uma elipse no primeiro quadrante tangente ao eixo y em (0,1) e ao eixo x em (1,0).

41. $y^2 = 4x - 8$; $y = \pm 2\sqrt{x - 2}$

(a) $f_1(x) = 2\sqrt{x - 2}$, domínio: $x \geq 2$; $f_2(x) = -2\sqrt{x - 2}$, domínio: $x \geq 2$

(d) $f_1'(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 2}}$, domínio: $x > 2$; $f_2'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x - 2}}$, domínio: $x > 2$

(e) $y^2 = 4x - 8$; $2y\frac{dy}{dx} = 4$; $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}$

Se $y = f_1(x) = 2\sqrt{x - 2}$, então $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y} = \frac{2}{2\sqrt{x - 2}} = \frac{1}{\sqrt{x - 2}} = f_1'(x)$

Se $y = f_2(x) = -2\sqrt{x - 2}$, então $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y} = \frac{2}{-2\sqrt{x - 2}} = -\frac{1}{\sqrt{x - 2}} = f_2'(x)$

Portanto, o resultado na parte (e) está de acordo com os resultados na parte (d).

(f) $f_1(3) = 2$, $f_1'(3) = 1$. A reta tangente ao gráfico de f_1: $y - 2 = 1(x - 3)$; $x - y - 1 = 0$

$f_2(3) = -2$, $f_2'(3) = -1$. A reta tangente ao gráfico de f_2: $y + 2 = -1(x - 3)$; $x + y - 1 = 0$

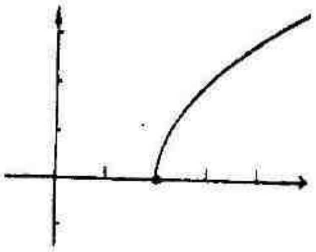


FIGURA 3.8-41(a)

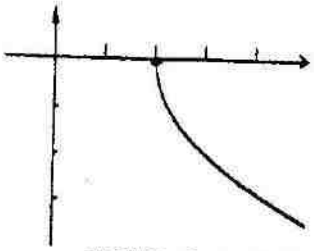


FIGURA 3.8-41(b)

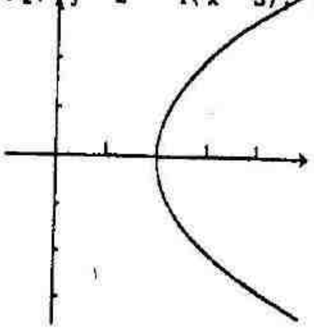


FIGURA 3.8-41(c)

43. $x^2 - y^2 = 9;\ y^2 = x^2 - 9;\ y = \pm\sqrt{x^2 - 9}$

(a) $f_1(x) = \sqrt{x^2 - 9}$, domínio: $|x| \geq 3$; $f_2(x) = -\sqrt{x^2 - 9}$, domínio: $|x| \geq 3$

(d) $f_1'(x) = x(x^2 - 9)^{-1/2}$, domínio: $|x| > 3$; $f_2'(x) = -x(x^2 - 9)^{-1/2}$, domínio: $|x| > 3$

(e) $x^2 - y^2 = 9;\ 2x - 2y\dfrac{dy}{dx} = 0;\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$

Se $y = f_1(x) = \sqrt{x^2 - 9}$, então $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 9}} = f_1'(x)$

Se $y = f_2(x) = \sqrt{x^2 - 9}$, então $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y} = \dfrac{x}{-\sqrt{x^2 - 9}} = f_2'(x)$

Portanto, o resultado na parte (e) está de acordo com os resultados na parte (d).

(f) $f_1(-5) = 4$, $f_1'(-5) = -\frac{5}{4}$. A reta tangente ao gráfico de f_1: $y - 4 = -\frac{5}{4}(x + 5)$; $5x + 4y + 9 = 0$

$f_2(-5) = -4$, $f_2'(-5) = \frac{5}{4}$. A reta tangente ao gráfico de f_2: $y + 4 = \frac{5}{4}(x + 5)$; $5x - 4y + 9 = 0$

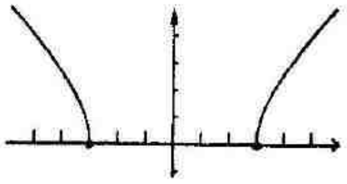


FIGURA 3.8-43(a)

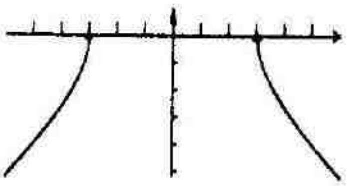


FIGURA 3.8-43(b)

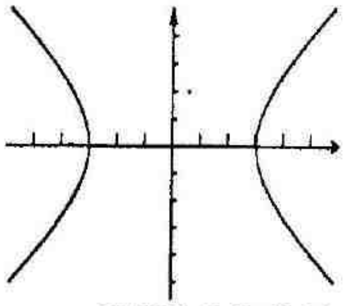


FIGURA 3.8-43(c)

45. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0;\ y^2 - 4y = -x^2 + 2x + 4;\ y^2 - 4y + 4 = -x^2 + 2x + 8;\ (y - 2)^2 = -x^2 + x + 8$

$y - 2 = \pm\sqrt{-x^2 + 2x + 8};\ y = 2 \pm \sqrt{-x^2 + 2x + 8}$

(a) $f_1(x) = 2 + \sqrt{-x^2 + 2x + 8}$; $f_2(x) = 2 - \sqrt{-x^2 + 2x + 8}$. O domínio de f_1 e f_2 satisfaz

$-x^2 + 2x + 8 \geq 0;\ x^2 - 2x + 1 \leq 9;\ (x - 1)^2 \leq 9;\ -3 \leq x - 1 \leq 3$; domínio: $-2 \leq x \leq 4$

(d) $f_1'(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 2x + 8)^{-1/2}(-2x + 2) = (1 - x)(-x^2 + 2x + 8)^{-1/2}$, domínio: $-2 < x < 4$

$f_2'(x) = -\frac{1}{2}(-x^2 + 2x + 8)^{-1/2}(-2x + 2) = (1 - x)(-x^2 + 2x + 8)^{-1/2}$, domínio: $-2 < x < 4$

(e) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0;\ 2x + 2y\dfrac{dy}{dx} - 2 - 4\dfrac{dy}{dx} = 0;\ (2y - 4)\dfrac{dy}{dx} = 2 - 2x;\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - x}{y - 2}$

Se $y = f_1(x) = 2 + \sqrt{-x^2 + 2x + 8}$, então $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - x}{y - 2} = \dfrac{1 - x}{\sqrt{-x^2 + 2x + 8}} = f_1'(x)$

Se $y = f_2(x) = 2 - \sqrt{-x^2 + 2x + 8}$, então $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - x}{y - 2} = \dfrac{1 - x}{-\sqrt{-x^2 + 2x + 8}} = f_2'(x)$

Portanto, o resultado na parte (e) está de acordo com os resultados na parte (d).

(f) $f_1(1) = 5$, $f_1'(1) = 0$. A reta tangente ao gráfico de f_1: $y - 5 = 0$

$f_2(1) = -1$, $f_2'(1) = 0$. A reta tangente ao gráfico de f_2: $y + 1 = 0$

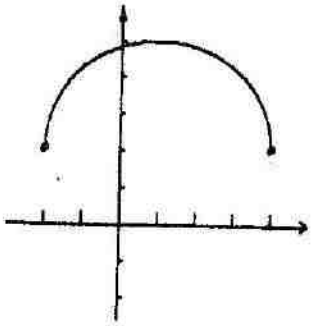


FIGURA 3.8-45(a)

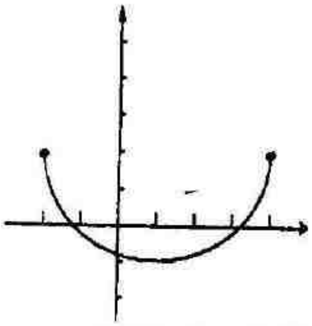


FIGURA 3.8-45(b)

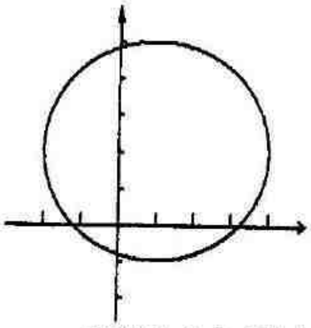


FIGURA 3.8-45(c)

47. Em t horas após as 8 h da manhã, o primeiro navio está a 24 t nós ao norte de P, o segundo navio está a 32(t - 2) nós a leste de P e a distância entre eles é s nós. Então, $s^2 = (24t)^2 + [32(t-2)]^2$. Derivando implicitamente,

$$2s\frac{ds}{dt} = 2(24t)24 + 2[32(t-2)]32, \quad \frac{ds}{dt} = \frac{24^2t + 32^2(t-2)}{s}$$

(a) Às 9 h, $t = 1$, $s^2 = 24^2 + (-32)^2 = 1600$, $s = 40$, $\frac{ds}{dt} = \frac{24^2(1) + 32^2(-1)}{40} = -11,2$.

Assim, às 9 h a distância entre os navios estará decrescendo em 11,2 nós.

(b) Às 11 h, $t = 3$, $s^2 = (24\cdot 3)^2 + (32\cdot 1)^2 = 6.208$, $s = \sqrt{6.208}$, $\frac{ds}{dt} = \frac{24^2(3) + 32^2(1)}{\sqrt{6.208}} = \frac{2.752}{\sqrt{6.208}} \approx 34,9$

Assim, às 11 h a distância entre os navios estará decrescendo em 34,9 nós.

49. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$. Derivando implicitamente, $\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}\frac{dy}{dx} = 0$; $\frac{2}{3}y^{-1/3}\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}x^{-1/3}$;

$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$. Se $x = -\frac{1}{8}$ então $(-\frac{1}{8})^{2/3} + y^{2/3} = 1$; $y^{2/3} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Portanto,

(i) $y^{1/3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ e $y = \frac{3}{8}\sqrt{3}$. $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{(-\frac{1}{8})^{1/3}} = -\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

Uma equação da reta tangente é $y - \frac{3}{8}\sqrt{3} = \sqrt{3}(x + \frac{1}{8})$; $\sqrt{3}x - y + \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0$ ou

(ii) $y^{1/3} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ e $y = -\frac{3}{8}\sqrt{3}$. $\frac{dy}{dx} = -\frac{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{(-\frac{1}{8})^{1/3}} = -\frac{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$.

Uma equação da reta tangente é $y + \frac{3}{8}\sqrt{3} = -\sqrt{3}(x + \frac{1}{8})$; $\sqrt{3}x + y + \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0$.

51. $f(x) = x^r$. Seja $r = \frac{p}{q}$, $q > 0$ com p e q inteiros, e seja $y = f(x)$. Então, $y = x^{p/q}$ torna-se $y^q = x^p$. Derivando implicitamente, temos

$$qy^{q-1}\frac{dy}{dx} = px^{p-1}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} = \frac{p}{q}\left(\frac{x^p y}{y^q x}\right) = r\left(\frac{x^p x^{p/q}}{x^p x}\right) = rx^{p/q-1} = rx^{r-1}$$

Portanto, $f'(x) = rx^{r-1}$.

EXERCÍCIOS 3.9 Taxas Relacionadas

1. $2x + 3y = 8$; $2\frac{dx}{dt} + 3\frac{dy}{dt} = 0$; $\frac{dx}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{dy}{dt}$. Como $\frac{dy}{dt} = 2$, então $\frac{dx}{dt} = -\frac{3}{2}(2) = -3$.

3. $xy = 20$; $x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} = 0$; $\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dy}{dt}$. Qdo $x = 2$, $y = 10$. Como $\frac{dy}{dt} = 10$, então,

$$\left.\frac{dx}{dt}\right]_{x=2} = -\frac{2}{10}(10) = -2$$

5. $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = \frac{5}{4}$; $2\operatorname{sen} x \cos x\frac{dx}{dt} + 2\cos y(-\operatorname{sen} y)\frac{dy}{dt} = 0$; $\operatorname{sen} 2x\frac{dx}{dt} - \operatorname{sen} 2y\frac{dy}{dt} = 0$

$\frac{dy}{dt} = \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 2y}\frac{dx}{dt}$. Seja $\frac{dx}{dt} = -1$, $x = \frac{2}{3}\pi$, $y = \frac{3}{4}\pi$. Então, $\left.\frac{dy}{dt}\right]_{y=3\pi/4} = \frac{\operatorname{sen}(4\pi/3)}{\operatorname{sen}(3\pi/2)}(-1) = -\frac{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{-1} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

7. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$; $x^{1/2} + y^{1/2} = 5$; $\frac{1}{2}x^{-1/2}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{2}y^{-1/2}\frac{dy}{dt} = 0$; $\frac{1}{x^{1/2}}\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{y^{1/2}}\frac{dy}{dt}$; $\frac{dx}{dt} = -\frac{x^{1/2}}{y^{1/2}}\frac{dy}{dt}$

Como $\frac{dy}{dt} = 3$ e qdo $x = 1$, $y = 16$, então $\left.\frac{dx}{dt}\right]_{x=1} = -\frac{(1)^{1/2}}{(16)^{1/2}}(3) = -\frac{3}{4}$.

9. Em t s, seja x m a distância horizontal da criança até a pipa, $x > 0$, e seja S m o comprimento da linha. Então, do teorema de Pitágoras,

$S^2 = 40^2 + x^2$; $2S\frac{dS}{dt} = 2x$; $\frac{dS}{dt} = \frac{x}{S}$. Qdo $S = 50$ temos $2500 = 1.600 + x^2$; $x^2 = 900$; $x = 30$.

Como $\frac{dx}{dt} = 3$, temos $\left.\frac{dS}{dt}\right]_{S=50} = \frac{30}{50}(3) = \frac{9}{5}$. Logo, quando o comprimento da linha solta é 50 m, a linha estará sendo "dada" à taxa de $\frac{9}{5}$ m/s.

11. Em t min, seja r cm o raio e V cm^3 o volume da bola de neve.

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$; $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt}$. Como $\frac{dV}{dt} = 8$, $\frac{dr}{dt} = \frac{8}{4\pi r^2} = \frac{2}{\pi r^2}$. Portanto, $\left.\frac{dr}{dt}\right]_{r=2} = \frac{2}{\pi(4)} = \frac{1}{2\pi}$.

Logo, quando a bola de neve tiver 4 cm de diâmetro, o raio estará crescendo à taxa de $\frac{1}{2\pi}$ cm/min.

13. Em t min, seja V m^3 o volume do monte cônico, seja r m o raio da base do monte, e seja h m a altura do monte.

Como $r = \frac{1}{2}h$, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}h\right)^2 = \frac{1}{12}\pi h$; $\frac{dV}{dt} = \frac{1}{4}\pi h^2\frac{dh}{dt}$; $\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}$

Como $\frac{dV}{dt} = 10$, então $\left.\frac{dh}{dt}\right]_{h=8} = \frac{4(10)}{\pi(8)^2} = \frac{5}{8\pi}$. Assim, quando o monte for de 8 m de altura, a altura estará crescendo à taxa de $\frac{5}{8\pi}$ m/min.

15. Em t s, seja x m a distância do homem até a lâmpada e seja y m a distância horizontal da ponta da sombra do homem até a base do poste em que a lâmpada está pendurada. Veja a Figura 3.9.15.

Dos triângulos semelhantes,

$\frac{y-x}{6} = \frac{y}{15}$; $5y - 5x = 2y$; $3y = 5x$; $\frac{dy}{dt} = \frac{5}{3}\frac{dx}{dt}$.

Como $\frac{dx}{dt} = 5$, $\frac{dy}{dt} = \frac{5}{3}(5) = \frac{25}{3}$.

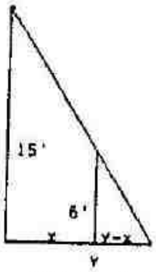


FIGURA 3.9.15

Portanto, a ponta da sombra do homem está se movendo à taxa de $\frac{25}{3}$ m/s.

17. Em t dias, r cm é o raio e V cm^3 é o volume do tumor esférico. Quando $r = 0,5$, $\frac{dr}{dt} = 0,001$. $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; $\left.\frac{dV}{dt}\right]_{r=0,5} = 4\pi r^2 \left.\frac{dr}{dt}\right]_{r=0,5} = 4\pi(0,5)^2(0,001) = 0,001\pi$

Portanto, quando o raio do tumor é 0,5 cm seu volume está crescendo à taxa de $0,001\pi \approx 0,003$ cm^3 por dia.

19. Em t dias, r cm é o raio e S cm^2 é a superfície da área do tumor esférico. Quando $r = 0,5$, $\frac{dr}{dt} = 0,001$. $S = 4\pi r^2$; $\left.\frac{dS}{dt}\right]_{r=0,5} = 8\pi r \left.\frac{dr}{dt}\right]_{r=0,5} = 8\pi(0,5)(0,001) = 0,004\pi$.

Portanto, quando o raio do tumor é 0,5 cm sua superfície da área está crescendo à taxa de $0,004\pi \approx 0,012$ cm^2 por dia.

21. Em t min, seja V m^3 o volume da água no tanque, seja r m o raio da superfície da água, e seja h m a profundidade da água. Veja a Figura 3.9.21.

Dos triângulos semelhantes, $\frac{h}{r} = \frac{24}{12}$; $r = \frac{1}{2}h$.

O volume da água no tanque pode ser expresso em termos do volume de um cone.

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}h\right)^2 h = \frac{1}{12}\pi h^3$; $\frac{dV}{dt} = \frac{1}{4}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$; $\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}$

Como $\frac{dV}{dt} = -6$, temos $\left.\frac{dh}{dt}\right]_{h=10} = \frac{4(-6)}{\pi(10)^2} = -\frac{6}{25\pi}$.

Logo, quando a água tiver 10 m de profundidade, o seu nível estará baixando à taxa de $\frac{6}{25\pi}$ m/min.

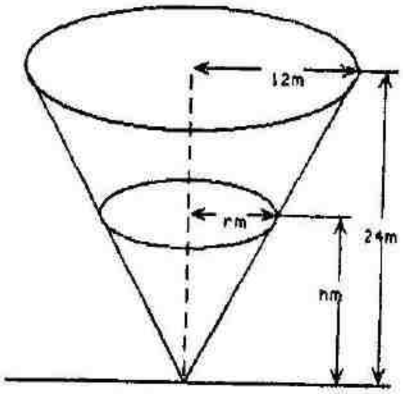


FIGURA 3.9.21

23. Em t min, P é o número de quilos por unidade quadrada de pressão e V é o número de unidades cúbicas do volume do gás. C é uma constante $PV = C$; $P\frac{dV}{dt} + V\frac{dP}{dt} = 0$; $\frac{dP}{dt} = -\frac{P}{V}\frac{dV}{dt}$. Como $\frac{dV}{dt} = 1$ e $P = 150$ qdo $V = 1,5$, temos $\left.\frac{dP}{dt}\right]_{V=1,5} = -\frac{150}{1,5}(1) = -100$. Portanto, no instante em que $V = 1,5$ a pressão está decrescendo à taxa de 100 kg/m^2 por min.

25. Em t s, seja r cm o raio e seja A cm^2 a área da região afetada.
$A = \pi r^2$; $\frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt}$. Como $\frac{dr}{dt} = 16$, $\left.\frac{dA}{dt}\right]_{r=4} = 2\pi(4)16 = 128\pi$. Assim, quando o raio é 4 cm, a área da região afetada estará crescendo à taxa de 128π cm^2/s.

27. Em t s, depois que o caminhão passa pelo cruzamento, seja x m a distância percorrida por ele, seja y m a distância percorrida pelo automóvel, e seja s m a distância entre o automóvel e o caminhão. Então,

$$s = \sqrt{x^2 + (120 - y)^2}; \quad D_t s = \frac{xD_t x + (120 - y)(-D_t y)}{\sqrt{x^2 + (120 - y)^2}}$$

Como $D_t x = 40$, $D_t y = 30$, e qdo $t = 2$, $x = 80$ e $y = 60$, temos

$\left.D_t s\right]_{t=2} = \frac{(40)(80) + (60)(-30)}{\sqrt{(80)^2 + (60)^2}} = \frac{1400}{100} = 14$. Assim, 2 s depois que o caminhão deixou o cruzamento, o automóvel e o caminhão estão se separando à taxa de 14 m/s.

29. C unidades monetárias é o custo da produção de x unidades em t semanas.

$$C = 0,08x^3 - x^2 + 10x + 48; \quad D_t C = 0,24x^2 D_t x - 2xD_t x + 10D_t x$$

Como $D_t x = 2$ e no momento $x = 50$, temos

$$\left.D_t C\right]_{x=50} = 0,24(50)^2(2) - 2(50)(2) + 10(2) = 200 - 200 + 20 = 1.020$$

Assim, o custo está crescendo à taxa de 1.020 por semana.

31. x unidades estão disponíveis por mês quando P unidades monetárias for o preço por unidade.

$$x = 1.000\sqrt{3p^2 + 20p}; \quad \frac{dx}{dt} = \frac{500(6p + 20)}{\sqrt{3p^2 + 20p}}\frac{dP}{dt}$$

Atualmente $p = 20$ e $\frac{dp}{dt} = \frac{1}{4}$. Portanto, $\left.\frac{dx}{dt}\right]_{p=20} = \frac{500(120 + 20)(\frac{1}{4})}{\sqrt{3(20)^2 + 20(20)}} = \frac{35000}{40} = 875$.
Logo, a oferta está aumentando à taxa de 875 unidades por mês.

33. 100x camisas são demandadas por semana quando p for o preço por peca.

$$2px + 65p - 4.950 = 0; \quad x = \frac{2.475}{p} - 32,5; \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{2.475}{p^2}\frac{dp}{dt}$$

Essa semana, $p = 30$ e $\frac{dp}{dt} = \frac{1}{5}$. Portanto, $\left.\frac{dx}{dt}\right]_{p=30} = -\frac{2.475}{(30)^2}\frac{1}{5} = -\frac{11}{20}$.

Como $\frac{dx}{dt} = -\frac{11}{20}$, então, $100\frac{dx}{dt} = -55$. Logo, a procura está crescendo à taxa de 55 camisas por semana.

35. Em t h, seja a distância do cruzamento x km para o primeiro caminhão e y km para o segundo. Veja a Figura 3.9-35. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $D_t z = \dfrac{x D_t x + y D_t y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Como $D_t x = -k$ e $D_t y = -k$, qdo $x = m$ e $y = m$, temos $D_t z = \dfrac{m(-k) + m(-k)}{\sqrt{m^2 + m^2}} = \dfrac{-2mk}{\sqrt{2}m} = -k\sqrt{2}$. Assim, quando os dois caminhões estão a m km do cruzamento, eles estão se aproximando à taxa de $k\sqrt{2}$ km/h.

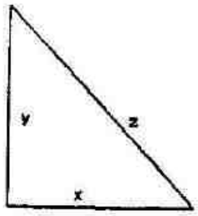


FIGURA 3.9.35

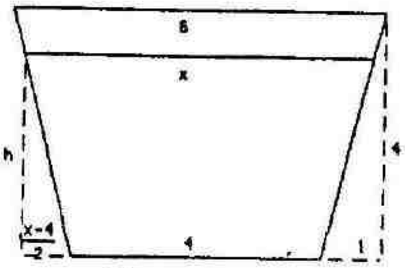


FIGURA 3.9.37

37. Em t min, desde que a água começa a fluir na tina, seja h m a profundidade da água, seja x m a largura da superfície da água e seja V m³ o seu volume na tina. A Figura 3.9.37 mostra a tina.

Dos triângulos semelhantes, temos $\dfrac{\frac{1}{2}(x - 4)}{1} = \dfrac{h}{4}$; $x = \frac{1}{2}h + 4$.

O volume da água no tanque pode ser expresso em termos do volume de um sólido com 16 m de comprimento e uma base na forma de um trapezóide isósceles. Logo,

$$V = \tfrac{1}{2}(x + 4)(h)(16) = 8h(x + 4) = 8h[(\tfrac{1}{2}h + 4) + 4] = 4h^2 + 64h; \quad D_t V = (8h + 64) D_t h$$

Como o nível de água está decrescendo à taxa de 25 cm/min = $\frac{1}{4}$ m/min quando sua profundidade é de 3 m, então, $D_t h = -\frac{1}{4}$ qdo $h = 3$. Portanto, temos $D_t V\Big]_{h=3} = [8(3) + 64](-\tfrac{1}{4}) = -22$.

Assim, a água está saindo da tina à taxa de 22 m³/min.

39. Em t s, desde que a base da viga começou a deslizar em direção ao aterro, seja a base do aterro x m da base da viga e y m de seu topo. Veja a Figura 3.9-39. Da lei dos co-senos, temos

$$x^2 + y^2 - 2xy\cos 120° = 400; \quad x^2 + y^2 - 2xy(-\tfrac{1}{2}) = 400; \quad y^2 + (x)y + (x^2 - 400) = 0$$

$$y = \frac{-x + \sqrt{x^2 - 4(x^2 - 400)}}{2} = \frac{\sqrt{1600 - 3x^2}}{2} - \frac{x}{2}; \quad \frac{dy}{dt} = \left(\frac{-3x}{2\sqrt{1600 - 3x^2}} - \frac{1}{2}\right)\frac{dx}{dt}$$

Como $\dfrac{dx}{dt} = -1$, qdo $x = 4$ obtemos

$$\frac{dy}{dt}\Big]_{x=4} = \left(\frac{-12}{2\sqrt{1600 - 3(4)^2}} - \frac{1}{2}\right)(-1) = \frac{12}{8\sqrt{97}} - \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{97} + 97}{194} \approx 0{,}65$$

Logo, o topo da viga está deslizando à taxa de $\dfrac{3\sqrt{97} + 97}{194}$ m/s ≈ 0,65 m/s no instante dado.

41. Em t s, após decolar, seja x m a distância horizontal do avião ao ponto 3.000 m diretamente acima do observador, e seja θ a medida em radianos do ângulo de elevação do avião. Veja a Figura 3.9-41. Quando $\theta = \pi/3$,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{60}, \quad e \quad x = 3.000 \cot g\,\theta, \quad \frac{dx}{dt} = -3.000 \operatorname{cosec}^2\theta \frac{d\theta}{dt}, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right]_{\theta=\pi/3} = -3.000\left(\frac{4}{3}\right)\frac{1}{60} = -\frac{200}{3}$$

O sinal de menos implica que x está decrescendo. A velocidade escalar do avião é $\frac{200}{3}$ m/s.

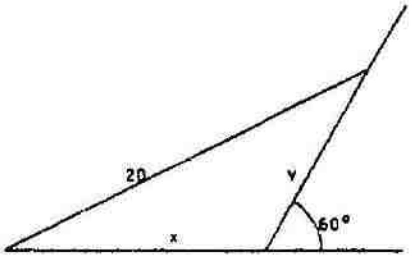


FIGURA 3.9-39

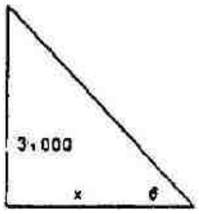


FIGURA 3.9-41

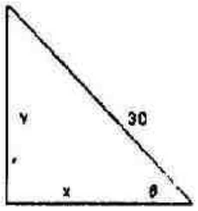


FIGURA 3.9-43

43. Em t s, seja a distância da base da parede até a base da viga x m e o topo da viga y m. Seja θ rad a medida do ângulo agudo formado pela viga com o chão em t s. Veja a Figura 3.9.43.

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{30}; \quad \cos\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{30}\frac{dy}{dt}; \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{30\cos\theta}\frac{dy}{dt}$$

Qdo $y = 18$, $x = \sqrt{30^2 - 18^2} = \sqrt{576} = 24$ então $\cos\theta = \frac{24}{30}$; $30\cos\theta = 24$. Como $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}$, temos $\left.\frac{d\theta}{dt}\right]_{y=18} = \frac{1}{24}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{48}$. Logo, a medida do ângulo agudo formado pela viga com o chão está diminuindo à taxa de $\frac{1}{48}$ **rad/s** no instante dado.

EXERCÍCIOS 3.10 Derivadas de Ordem Superior

1. $f(x) = x^5 - 2x^3 + x$; $f'(x) = 5x^4 - 6x^2 + 1$; $f''(x) = 20x^3 - 2x$

3. $g(s) = 2s^4 - 4s^3 + 7s - 1$; $g'(s) = 8s^3 - 2s^2 + 7$; $g''(s) = 8s^3 - 12s^2 + 7$

5. $F(x) = x^2\sqrt{x} - 5x = x^{5/2} - 5x$; $F'(x) = \frac{5}{2}x^{3/2} - 5$; $F''(x) = \frac{15}{4}x^{1/2}$

7. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} = (x^2 + 1)^{1/2}$; $f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2}(2x) = x(x^2 + 1)^{-1/2}$

$f''(x) = (x^2 + 1)^{-1/2} + x[-\frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-3/2}(2x)] = (x^2 + 1)^{-3/2}[(x^2 + 1) - x^2] = (x^2 + 1)^{-3/2}$

9. $f(t) = 4\cos t^2;\ f'(t) = -4(\text{sen}\, t^2)(2t) = -8t\ \text{sen}\, t^2$

$f''(t) = -8\ \text{sen}\, t^2 - 8t(\cos t^2)(2t) = -8\ \text{sen}\, t^2 - 16t^2 \cos t^2$

11. $G(x) = \text{cotg}^2 x;\ G'(x) = 2\text{cotg}\, x(-\text{cosec}^2 x) = -2\ \text{cotg}\, x\ \text{cosec}^2 x$

$G''(x) = 2\,\text{cosec}^2 x(\text{cosec}^2 x) - 2\,\text{cotg}\, x[2\,\text{cosec}\, x(-\text{cosec}\, x\ \text{cotg}\, x)] = 2\,\text{cosec}^2 x(\text{cosec}^2 x + 2\text{cotg}^2 x)$

13. $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2+4};\ g'(x) = \dfrac{(x^2+4)(2x) - x^2(2x)}{(x^2+4)^2} = \dfrac{8x}{(x^2+4)^2}$

$g''(x) = \dfrac{(x^2+4)^2(8) - 8x[2(x^2+4)(2x)]}{(x^2+4)^4} = \dfrac{8(x^2+4) - 32x^2}{(x^2+4)^3} = \dfrac{32 - 24x^2}{(x^2+4)^3}$

15. $f(x) = \sqrt{\text{sen}\, x + 1}$. Método 1: $f'(x) = \frac{1}{2}(1 + \text{sen}\, x)^{-1/2}\cos x$

$f''(x) = -\frac{1}{4}(1 + \text{sen}\, x)^{-3/2}(\cos x)\cos x + \frac{1}{2}(1 + \text{sen}\, x)^{-1/2}(-\text{sen}\, x)$

$= -\frac{1}{4}(1 + \text{sen}\, x)^{-3/2}[(1 - \text{sen}^2 x) + 2(1 + \text{sen}\, x)\,\text{sen}\, x]$

$= -\frac{1}{4}(1 + \text{sen}\, x)^{-3/2}(1 + \text{sen}\, x)^2 = -\frac{1}{4}(1 + \text{sen}\, x)^{1/2}$

Método 2: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\text{sen}\, x + 1}}(\cos x) = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\text{sen}\, x + 1}} \cdot \dfrac{\sqrt{1 - \text{sen}\, x}}{\sqrt{1 - \text{sen}\, x}} = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{1 - \text{sen}^2 x}}\sqrt{1 - \text{sen}\, x} = \dfrac{s}{2}\sqrt{1 - \text{sen}\, x}$

onde $s = \text{sgn}(\cos x)$; $f''(x) = -\dfrac{s}{4}\dfrac{\cos x}{\sqrt{1 - \text{sen}\, x}} = -\dfrac{s}{4}\dfrac{\cos x}{\sqrt{1 - \text{sen}\, x}} \cdot \dfrac{\sqrt{1 + \text{sen}\, x}}{\sqrt{1 + \text{sen}\, x}} = -\dfrac{1}{4}\sqrt{1 + \text{sen}\, x}$

17. $D_x{}^3(x^4 - 2x^2 + x - 5) = D_x{}^2(4x^3 - 4x + 1) = D_x(12x^2 - 4) = 24x$

19. $\dfrac{d^4}{dx^4}\left(\dfrac{3}{2x-1}\right) = \dfrac{d^4}{dx^4}[3(2x-1)^{-1}] = \dfrac{d^3}{dx^3}[-3(2x-1)^{-2}(2)] = \dfrac{d^3}{dx^3}[-6(2x-1)^{-2}] = \dfrac{d^2}{dx^2}[24(2x-1)^{-3}]$

$= \dfrac{d}{dx}[-144(2x-1)^{-4}] = 1152(2x-1)^{-5}$

21. $D_x{}^3(2\ \text{tg}\ 3x) = D_x{}^2(6\sec^2 3x) = D_x[12\sec 3x(\sec 3x\ \ \text{tg}\ 3x)3] = D_x[36\sec^2 3x\ \text{tg}\ 3x]$

$= D_x[36(\text{tg}^3 3x - \text{tg}\ 3x)] = 36(3\ \text{tg}^2 3x - 1)D_x\ \text{tg}\ 3x = 108(3\ \text{tg}^2 3x - 1)\sec^2 3x$

23. $f(x) = \cos 2x - \text{sen}\, 2x;\ f'(x) = -2\ \text{sen}\, 2x - 2\cos 2x;\ f''(x) = -4\cos 2x + 4\ \text{sen}\, 2x$

$f'''(x) = 8\ \text{sen}\, 2x + 8\cos 2x;\ f^{(iv)}(x) = 16\cos 2x - 16\ \text{sen}\, 2x;\ f^{(v)}(x) = -32\ \text{sen}\, 2x - 32\cos 2x$

25. $x^2 + y^2 = 1;\ 2x + 2y\dfrac{dy}{dx} = 0;\ \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y} = -xy^{-1}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = -y^{-1} + xy^{-2}\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{y} + \dfrac{x}{y^2}\left(-\dfrac{x}{y}\right) = -\dfrac{1}{y^3}(y^2 + x^2) = -\dfrac{1}{y^3}$, desde que $x^2 + y^2 = 1$.

27. $x^3 + y^3 = 1;\ 3x^2 + 3y^2\dfrac{dy}{dx} = 0;\ \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x^2}{y^2} = -x^2y^{-2}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = -2xy^{-2} + 2x^2y^{-3}\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x}{y^2} + \dfrac{2x^2}{y^3}\left(-\dfrac{x^2}{y^2}\right) = -\dfrac{2x}{y^5}(y^3 + x^3) = -\dfrac{2x}{y^5}$, desde que $x^3 + y^3 = 1$.

29. $x^4 + y^4 = a^4;\ 4x^3 + 4y^3\dfrac{dy}{dx} = 0;\ \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x^3}{y^3} = -x^3y^{-3}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = -3x^2y^{-3} + 3x^3y^{-4}\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3x^2}{y^3} + \dfrac{3x^3}{y^4}\left(-\dfrac{x^3}{y^3}\right) = -\dfrac{3x^2}{y^7}(y^4 + x^4) = -\dfrac{3x^2}{y^7}a^4$, desde que $x^4 + y^4 = a^4$.

31. $y = x^4 + x^3 - 3x^2$; $y'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x$; $y''(x) = 12x^2 + 6x - 6 = 6(2x^2 + x - 1) = 6(2x - 1)(x + 1)$

$y''(x) = 0$ qdo $x = \frac{1}{2}$ ou $x = -1$. As inclinações das retas são dadas por

$y'(\frac{1}{2}) = 4(\frac{1}{2})^3 + 3(\frac{1}{2})^2 - 6(\frac{1}{2}) = -\frac{7}{4}$ e $y'(1) = 4(-1)^3 + 3(-1)^2 - 6(-1) = 5$

33. Para $t \geq 0$, $s = t^3 - 9t^2 + 15t = t(t^2 - 9t + 15) = t(t - t_1)(t - t_2)$, onde as raízes de

$t^2 - 9t + 15 = 0$ são $t_1 = \frac{9 - \sqrt{81 - 4\cdot 15}}{2} = \frac{9 - \sqrt{21}}{2} \approx 2,21$ e $t_2 = \frac{9 + \sqrt{21}}{2} \approx 6,79$.

$v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 18t + 15 = 3(t^2 - 6t + 15) = 3(t - 1)(t - 5)$; $a = \frac{ds}{dt} = 6t - 18 = 6(t - 3)$

	s	v	a	Conclusão
$t = 0$	0	+	-	A partícula está na origem e está se movendo para a direita. A velocidade é decrescente. A velocidade escalar é decrescente.
$0 < t < 1$	+	+	-	A partícula está à direita da origem e está se movendo para a direita. A velocidade é decrescente. A velocidade escalar é decrescente.
$t = 1$	7	0	-	A partícula está 7 cm à direita da origem e está variando o sentido de seu movimento da direita para a esquerda. A velocidade é decrescente. A velocidade escalar é crescente.
$1 < t < t_1$	+	-	-	A partícula está à direita da origem, e está se movendo para a esquerda. A velocidade é decrescente. A velocidade escalar é crescente.
$t = t_1$	0	-	-	A partícula está na origem e está se movendo para a esquerda. A velocidade é decrescente. A velocidade escalar é crescente.
$t_1 < t < 3$	-	-	-	A partícula está à esquerda da origem e está se movendo para a esquerda. A velocidade é crescente. A velocidade escalar é decrescente.
$t = 3$	-	-	0	A partícula está à esquerda da origem e está se movendo para a esquerda. A velocidade não está variando; logo, a velocidade escalar não está variando.
$3 < t < 5$	-	-	+	A partícula está à esquerda da origem e está se movendo para a esquerda. A velocidade é crescente. A velocidade escalar é decrescente.
$t = 5$	-25	0	+	A partícula está 25 cm à esquerda da origem e está variando o sentido de seu movimento da esquerda para a direita. A velocidade é crescente. A velocidade escalar é decrescente.
$5 < t < t_2$	-	+	+	A partícula está à esquerda da origem e está se movendo para a direita. A velocidade é crescente. A velocidade escalar é crescente.
$t = t_2$	0	+	+	A partícula está na origem e está se movendo para a direita. A velocidade é crescente. A velocidade escalar é crescente.
$t_2 < t$	+	+	+	A partícula está à direita da origem e está se movendo para a direita. A velocidade é crescente. A velocidade escalar é crescente.

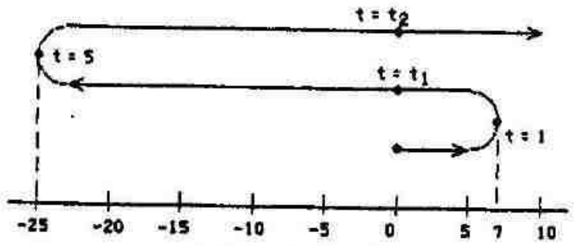


FIGURA 3.10.33

35. Para $t \geq 0$, $s = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t + 1$; $v = \frac{ds}{dt} = t^2 - 3t + 2$; $a = \frac{dv}{dt} = 2t - 3$.

Seja $a = 0$: $2t - 3 = 0$; $t = \frac{3}{2}$.

Qdo $t = \frac{3}{2}$, $s = \frac{1}{3}(\frac{3}{2})^3 - \frac{3}{2}(\frac{3}{2})^2 + 2(\frac{3}{2}) + 1 = \frac{7}{4}$, e $v = (\frac{3}{2})^2 - 3(\frac{3}{2}) + 2 = -\frac{1}{4}$

Portanto, a aceleração instantânea é zero em $\frac{3}{2}$ s qdo a partícula está $\frac{7}{4}$ m à direita da origem e sua velocidade instantânea é $-\frac{1}{4}$ m/s.

37. Para $t \geq 0$, $s = \frac{125}{16t + 32} - \frac{2}{5}t^5$; $v = \frac{ds}{dt} = \frac{-125(16)}{(16t + 32)^2} - 2t^4 = -\frac{2000}{(16t + 32)^2} - 2t^4$

$a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{4000(16)}{(16t + 32)^3} - 8t^3 = \frac{64000}{(16t + 32)^3} - 8t^3$. Seja $a = 0$: $\frac{64000}{(16t + 32)^3} - 8t^3 = 0$

$8000 = t^3(16t + 32)^3$; $20 = t(16t + 32)$; $4t^2 + 8t - 5 = 0$; $(2t + 5)(2t - 1) = 0$; $t = -\frac{5}{2}$, $t = \frac{1}{2}$

$t \geq 0$, logo desprezamos $t = -\frac{5}{2}$. Qdo $t = \frac{1}{2}$, $s = \frac{125}{8 + 32} - \frac{2}{5}.\frac{1}{32} = \frac{249}{80}$ e $v = -\frac{2000}{(8 + 32)^2} - 2\cdot\frac{1}{26} = -\frac{11}{8}$.

Portanto, a aceleração instantânea é zero em $\frac{1}{2}$ s quando a partícula está $\frac{249}{80}$ m à direita da origem e sua velocidade instantânea é $-\frac{11}{8}$ m/s.

39. Para $t \geq 0$, $s = \frac{4}{9}t^{3/2} + 2t^{1/2}$; $v = \frac{ds}{dt} = \frac{2}{3}t^{1/2} + t^{-1/2}$; $a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{1}{3}t^{-1/2} - \frac{1}{2}t^{-3/2}$.

Seja $a = 0$: $\frac{1}{3t^{1/2}} - \frac{1}{2t^{3/2}} = 0$; $2t - 3 = 0$; $t = \frac{3}{2}$.

Qdo $t = \frac{3}{2}$, $s = \frac{4}{9}\left(\frac{6}{4}\right)^{3/2} + 2\left(\frac{6}{4}\right)^{1/2} = \frac{4}{9}.\frac{6\sqrt{6}}{8} + 2.\frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{4}{3}\sqrt{6}$, $v = \frac{2}{3}\left(\frac{6}{4}\right)^{1/2} + \left(\frac{9}{6}\right)^{-1/2} = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$

Portanto, a aceleração instantânea é zero em $\frac{3}{2}$ s quando a partícula está $\frac{4}{3}\sqrt{6}$ m à direita da origem e sua velocidade instantânea é $\frac{2}{3}\sqrt{6}$ m/s.

41. $s = a\cos(kt + \theta)$; $\frac{ds}{dt} = -ak\,\text{sen}(kt + \theta)$; $\frac{d^2s}{dt^2} = -ak^2\cos(kt + \theta)$

Como $\frac{d^2s}{dt^2} = -k^2s$, a medida da aceleração é sempre proporcional à medida do deslocamento e a aceleração e o deslocamento estão em sentidos opostos. Portanto, o movimento é harmônico simples.

43. $s = \text{sen}(6t - \frac{1}{3}\pi) + \text{sen}(6t + \frac{1}{6}\pi)$; $\frac{ds}{dt} = 6\cos(6t - \frac{1}{3}\pi) + 6\cos(6t + \frac{1}{6}\pi)$

$\frac{d^2s}{dt^2} = -36\,\text{sen}(6t - \frac{1}{3}\pi) - 36\,\text{sen}(6t + \frac{1}{6}\pi) = -36[\text{sen}(6t - \frac{1}{3}\pi) + \text{sen}(6t + \frac{1}{6}\pi)] = -36s$

Como: $\frac{d^2s}{dt^2} = -36s$, a medida da aceleração é sempre proporcional à medida do deslocamento e a aceleração e o deslocamento estão em sentidos opostos. Portanto, o movimento é harmônico simples.

45. $s = 5 - 10\,\text{sen}^2 2t = 5 - 10\left[\frac{1 - \cos 2(2t)}{2}\right] = 5\cos 4t$; $\frac{ds}{dt} = -20\,\text{sen}\,4t$; $\frac{d^2s}{dt^2} = -80\cos 4t = -16s$

Como $\frac{d^2s}{dt^2} = -16s$, a medida da aceleração é sempre proporcional à medida do deslocamento e a aceleração e o deslocamento estão em sentidos opostos. Portanto, o movimento é harmônico simples.

47. $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} = x^2 \operatorname{sgn} x = x|x|$ domínio: $(-\infty, +\infty)$

$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x < 0 \\ 2x & \text{se } x \geq 0 \end{cases} = 2x \operatorname{sgn} x = 2|x|$ domínio: $(-\infty, +\infty)$

$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } x > 0 \end{cases} = 2 \operatorname{sgn} x = 2\frac{|x|}{x}$ domínio: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

49. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^5}{|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} = \begin{cases} -x^4 & \text{if } x < 0 \\ x^4 & \text{if } x \geq 0 \end{cases} = x^4 \operatorname{sgn} x = x^3|x|$ domínio: $(-\infty, +\infty)$

$f'(x) = \begin{cases} -4x^3 & \text{se } x < 0 \\ 4x^3 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} = 4x^3 \operatorname{sgn} x = 4|x^3|$ domínio: $(-\infty, +\infty)$

$f''(x) = \begin{cases} -12x^2 & \text{se } x < 0 \\ 12x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} = 12x^2 \operatorname{sgn} x = 12x|x|$ domínio: $(-\infty, +\infty)$

51. $f'''(x) = \begin{cases} -24x & \text{se } x < 0 \\ 24x & \text{se } x \geq 0 \end{cases} = 24x \operatorname{sgn} x = 24|x|$ domínio: $(-\infty, +\infty)$

53. $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$; $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = (f' \circ g)(x) \cdot g'(x)$

$h''(x) = f''(g(x)) \cdot g'(x) \cdot g'(x) + f'(g(x)) \cdot g''(x) = (f'' \circ g)(x) \cdot (g'(x))^2 + (f' \circ g)(x) \cdot g''(x)$

55. $y = x^n$. Se $n = 1$, $y = x$ e $\frac{dy}{dx} = 1 = 1!$. Agora, supomos que a fórmula seja verdadeira para $n = k$. Se $y = x^{k+1}$, então $D_x^{k+1} y = D_x^{k+1}(x^{k+1}) = D_x[(k+1)x^k] = (k+1) D_x(x^k) = (k+1)k! = (k+1)!$. Assim a fórmula será verdadeira para $n = k + 1$ e então, para qualquer inteiro n.

57. Queremos provar por indução matemática que se k for um inteiro positivo qualquer, então

$$D_x^n(\operatorname{sen} x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } n = 4k \\ \cos x & \text{se } n = 4k+1 \\ -\operatorname{sen} x & \text{se } n = 4k+2 \\ -\cos x & \text{se } n = 4k+3 \end{cases} \quad (1)$$

Provamos que (1) é verdadeira quando $k = 1$. $D_x(\operatorname{sen} x) = \cos x$; $D_x^2(\operatorname{sen} x) = -\operatorname{sen} x$; $D_x^3(\operatorname{sen} x) = -\cos x$

Assim, tomando derivadas sucessivas

$$D_x^n(\operatorname{sen} x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } n = 4 \\ \cos x & \text{se } n = 5 \\ -\operatorname{sen} x & \text{se } n = 6 \\ -\cos x & \text{se } n = 7 \end{cases} \quad (2)$$

Como (2) é (1) para $k = 1$, provamos a fórmula (1) para $k = 1$.

Agora queremos mostrar que a fórmula será verdadeira para $k = t + 1$ se for verificada para $k = t$, isto é, se

$$D_x^n(\operatorname{sen} x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } n = 4t \\ \cos x & \text{se } n = 4t+1 \\ -\operatorname{sen} x & \text{se } n = 4t+2 \\ -\cos x & \text{se } n = 4t+3 \end{cases} \quad (3)$$

Quando $k = t + 1$, então $4k = 4t + 4$, $4k + 1 = 4t + 5$, $4k + 2 = 4t + 6$, $4k + 3 = 4t + 7$. De (3) temos

$D_x^n(\operatorname{sen} x) = -\cos x$ se $n = 4t + 3$.

Assim, tomando derivadas sucessivas

$$D_x^n(\operatorname{sen} x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } n = 4t+4 \\ \cos x & \text{se } n = 4t+5 \\ -\operatorname{sen} x & \text{se } n = 4t+6 \\ -\cos x & \text{se } n = 4t+7 \end{cases} \quad (4)$$

Como (4) é (1) quando $k = t + 1$, provamos que se (1) for válida para $k = t$, também será verificada para $k = t + 1$. Logo, (1) é verdadeira para qualquer inteiro positivo k.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 3

1. $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 2x - 3;\ f'(x) = 15x^2 - 14x + 2$

3. $g(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{4}{x^2} = \frac{1}{4}x^2 + 4x^{-2};\ g'(x) = \frac{1}{2}x - 8x^{-3} = \frac{x}{2} - \frac{8}{x^3}$

5. $F(x) = 2x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{-1/2};\ F'(x) = x^{-1/2} + \frac{1}{4}x^{-3/2}$

7. $G(t) = (3t^2 - 4)(4t^3 + t - 1);\ G'(t) = (3t^2 - 4)(12t^2 + 1) + (4t^3 + t - 1)(6t)$

$= 36t^4 - 45t^2 - 4 + 24t^4 + 6t^2 - 6t = 60t^4 - 39t^2 - 6t - 4$

9. $g(x) = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 1};\ g'(x) = \frac{3x^2(x^3 - 1) - 3x^2(x^3 + 1)}{(x^3 - 1)^2} = \frac{-6x^2}{(x^3 - 1)^2}$

11. $f(s) = (2s^3 - 2s + t)^4;\ f'(s) = 4(2s^3 - 3s + 7)(6s^2 - 3)$

13. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{x^3 + 1}} = \left(\frac{x}{x^3 + 1}\right)^{1/3}$

$f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{x}{x^3 + 1}\right)^{-2/3} \cdot \frac{1(x^3 + 1) - 3x^2(x)}{(x^3 + 1)^2} = \frac{(x^3 + 1)^{2/3}}{3x^{2/3}} \cdot \frac{1 - 2x^3}{(x^3 + 1)^2} = \frac{1 - 2x^3}{3x^{2/3}(x^3 + 1)^{4/3}}$

15. $F(x) = (x^2 - 1)^{3/2}(x^2 - 4)^{1/2};\ F'(x) = \frac{3}{2}(x^2 - 1)^{1/2}(2x)(x^2 - 4)^{1/2} + \frac{1}{2}(x^2 - 1)^{3/2}(x^2 - 4)^{-1/2}(2x)$

$= x(x^2 - 1)^{1/2}(x^2 - 4)^{-1/2}[3(x^2 - 4) + (x^2 - 1)] = x(x^2 - 1)^{1/2}(x^2 - 4)^{-1/2}(4x^2 - 13)$

17. $D_x[(x + 1)\text{sen } x - x \cos x] = \text{sen } x + (x + 1)\cos x - \cos x + x\ \text{sen } x = (x + 1)\text{sen } x + x \cos x$

19. $\frac{d}{dx}\left(x \text{ tg } \frac{1}{x}\right) = \text{tg } \frac{1}{x} + x\left(\sec^2\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right) = \text{tg } \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\sec^2\frac{1}{x}$

21. $\frac{d}{dt}\left(\frac{\sec^2 t}{1 + t^2}\right) = \frac{(1 + t^2)[2 \sec t(\sec t \text{ tg } t)] - (\sec^2 t)(2t)}{(1 + t^2)^2} = \frac{2\sec^2 t[(1 + t^2)\text{ tg } t - t]}{(1 + t^2)^2}$

23. $D_w[\text{sen}(\cos 3w) - 3\cos^2 2w] = \cos(\cos 3w)(-\text{sen } 3w)(3) - 6\cos 2w(-\text{sen } 2w)(2)$

$= -3\,\text{sen } 3w \cos(\cos 3w) + 6\,\text{sen } 4w$

25. $4x^2 + 4y^2 - y^3 = 0;\ 8x + 8y\frac{dy}{dx} - 3y^2\frac{dy}{dx} = 0;\ \frac{dy}{dx}(8y - 3y^2) = -8x;\ \frac{dy}{dx} = \frac{-8x}{8y - 3y^2}$

27. $y = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}.\ \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(x - \sqrt{x^2 - 1})^2}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\right) = \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{(x - \sqrt{x^2 - 1})^2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{(x - \sqrt{x^2 - 1})\sqrt{x^2 - 1}}$

De outro modo, $y = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = x + \sqrt{x^2 - 1};\ \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

29. $\text{sen}(x + y) + \text{sen}(x - y) = 1$. Derivando implicitamente, $\cos(x + y)\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) + \cos(x - y)\left(1 - \frac{dy}{dx}\right) = 0;$

$[\cos(x + y) - \cos(x - y)]\frac{dy}{dx} = -\cos(x + y) - \cos(x - y);\ \frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x - y) + \cos(x + y)}{\cos(x - y) - \cos(x + y)} = \frac{\cos x \cos y}{\text{sen } x\ \text{sen } y}$

31. $y = x^2 + [x^3 + (x^4 + x)^2]^3$

$\frac{dy}{dx} = 2x + 3[x^3 + (x^4 + x)^2]^2\frac{d}{dx}[x^3 + (x^4 + x)^2] = 2x + 3[x^3 + (x^4 + x)^2]^2[3x^2 + 2(x^4 + x)(4x^3 + 1)]$

33. $\text{tg } x + \text{tg } y = xy;\ \sec^2 x + \sec^2 y\frac{dy}{dx} = y + x\frac{dy}{dx};\ \frac{dy}{dx}(\sec^2 y - x) = y - \sec^2 x;\ \frac{dy}{dx} = \frac{y - \sec^2 x}{\sec^2 y - x}$

35. $y = 2x^3 + 4x^2 - x$; $y' = 6x^2 + 8x - 1 = \frac{1}{2}$ qdo $0 = 12x^2 + 16x - 3 = (6x - 1)(2x + 3)$; logo $x = \frac{1}{6}$, $x = -\frac{3}{2}$.

Em $x = \frac{1}{6}$, $y = 2\left(\frac{1}{6}\right)^3 + 4\left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{6} = -\frac{5}{108}$ Equação da reta tangente: $y + \frac{5}{108} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}\right)$

Em $x = -\frac{3}{2}$, $y = 2\left(-\frac{3}{2}\right)^3 + 4\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{4}$ Equação da reta tangente: $y - \frac{15}{4} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{2}\right)$

37. $2x^3 + 2y^3 - 9xy = 0$; $6x^2 + 6y^2\frac{dy}{dx} = 9y - 9x\frac{dy}{dx} = 0$; $(6y^2 - 9x)\frac{dy}{dx} = 9y - 6x^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - 2x^2}{2y^2 - 3x}$; $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{(2,1)} = \frac{3(1) - 2(2)^2}{2(1)^2 - 3(2)} = \frac{5}{4}$

Em (2,1), a reta tangente tem inclinação de $\frac{5}{4}$. Sua equação é $y - 1 = \frac{5}{4}(x - 2)$; $5x + 4y - 6 = 0$.

Em (2,1), a reta normal tem inclinação de $-\frac{4}{5}$. Sua equação é $y - 1 = -\frac{4}{5}(x - 2)$; $4x + 5y - 13 = 0$.

39. $y = -x^4 + 2x^2 + x$; $y'(x) = -4x^3 + 4x + 1$; $y'(1) = 1$

Em (1,2), a reta tangente tem inclinação de 1. Sua equação é $y - 2 = 1(x - 1)$; $y = x + 1$.

Para determinar as intersecções entre a reta e a curva original, resolvemos a primeira e a última equações simultaneamente.

$-x^4 + 2x^2 + x = x + 1$; $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$; $(x^2 - 1)^2 = 0$; $(x - 1)^2(x + 1)^2 = 0$; $x = 1, 1, -1, -1$

Qdo $x = -1$, $y = x + 1 = 0$. Há dois procedimentos..

Método 1: $y'(-1) = 1$. Logo, a reta tangente em (-1,0) tem equação $y - 0 = 1(x + 1)$ ou equivalentemente, $y = x + 1$, é a reta tangente em (1,2).

Método 2: Como as raízes 1, -1 são repetidas, a reta é tangente em (1,0) e (-1,0).

41. $y = \sqrt{3 - 2x} = (3 - 2x)^{1/2}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(3 - 2x)^{-1/2}(-2) = -(3 - 2x)^{-1/2}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}(3 - 2x)^{-3/2}(-2) = -(3 - 2x)^{-3/2}$; $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3}{2}(3 - 2x)^{-5/2}(-2) = -3(3 - 2x)^{-5/2}$

43. $f(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 8x + 2$; $f'(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + 8$; $f''(x) = x^2 + 4x + 3$

Queremos encontrar qdo $f''(x) > 0$, isto é, qdo $x^2 + 4x + 3 > 0$; $(x + 3)(x + 1) > 0$.

Caso 1: $x + 3 > 0$ e $x + 1 > 0$; $x > -3$ e $x > -1$. Logo, $x > -1$.

Caso 2: $x + 3 < 0$ e $x + 1 < 0$; $x < -3$ e $x < -1$. Logo, $x < -3$.

Portanto, $f''(x) > 0$ quando $x < -3$ ou $x > -1$.

45. $s = t^3 - 11t^2 + 24t + 100$; $v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 2t + 24$

(a) A partícula está no ponto de partida quando $t=0$; logo, $s=100$. Para determinar os outros valores de t para os quais $s=100$, tomamos $s=100$:

$t^3 - 11t^2 + 24t + 100 = 100$; $t(t^2 - 11t + 24) = 0$; $t(t - 3)(t - 8) = 0$; $t = 0$, $t = 3$, $t = 8$

(b) Quando $t=0$, $v=24$ e a partícula está se movendo para a direita.

Quando $t=3$, $v= -15$ e a partícula está se movendo para a esquerda.

Quando $t=8$, $v=40$ e a partícula está se movendo para a direita..

47. $s = 5 - 2\cos^2 t$; $\cos^2 t = \frac{5-s}{2}$; $\text{sen}^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - \frac{5-s}{2} = \frac{s-3}{2}$

$v = \frac{ds}{dt} = 4\cos t\ \text{sen}\, t$; $v^2 = 16\cos^2 t\ \text{sen}^2 t = 16\left(\frac{5-s}{2}\right)\left(\frac{s-3}{2}\right)$; $v^2 = 4(5-s)(s-3)$

$a = \frac{dv}{dt} = 4\cos^2 t - 4\,\text{sen}^2 t = 4\left(\frac{5-s}{2}\right) - 4\left(\frac{s-3}{2}\right)$; $a = 16 - 4s$

49. s m é a distância orientada da bola até o ponto de partida em t s. Para $t \geq 0$,

$$s = -16t^2 + 96t; \quad v = \frac{ds}{dt} = -32t + 96$$

(a) Quando t=2, v=32. Logo, em 2 s, a velocidade instantânea é 32 m/s.

(b) A bola atingirá seu ponto máximo quando v=0; isto é, quando t=3. Quando t=3, s=144. Como o ponto de partida é 112 m acima do solo, o ponto mais alto é 256 m acima do solo.

(c) A bola estará no solo quando $s = -112$; $-16t^2 + 96 = -112$; $t^2 - 6t - 7 = 0$ $(t+1)(t-7) = 0$; $t = 7$. Portanto, a bola atingirá o solo em 7 s.

(d) Qdo $t = 7$, $v = -32(7) + 96 = -128$. Portanto, quando a bola atinge o solo, a velocidade instantânea é -128 m/s.

51. A unidades quadradas é a área de um triângulo retângulo isósceles, cujo comprimento dos catetos é x unidades. Assim, $A = \frac{1}{2}x^2$; $A'(x) = x$.

(a) A taxa média de variação de A em relação a x, quando x varia de 8 a 8,01 é

$$\frac{\frac{1}{2}(8{,}01)^2 - \frac{1}{2}(8)^2}{8{,}01 - 8} = \frac{32{,}08005 - 32}{0{,}01} = \frac{0{,}08005}{0{,}01} = 8{,}005$$

(b) A taxa instantânea de variação de A em relação a x quando x=8 é A′(8)=8.

53. 100y calculadoras são fornecidas quando m for o preço por unidade. $y = m^2 + \sqrt{m}$

(a) A taxa média de variação de y com respeito a m quando m aumenta de 16 para 17 é

$$\frac{[(17)^2 + \sqrt{17}] - [(16)^2 + \sqrt{16}]}{17 - 16} \approx \frac{(289 + 4{,}123) - (256 + 4)}{1} = 33{,}123$$

Portanto, a taxa média de variação de 100y, com relação a m, quando m aumenta de 16 para 17 é 3.312,3. Assim, a taxa média de variação da oferta quando o preço aumenta de $16 para $17 é 3.312,3 calculadoras por $1 de aumento no preço.

(b) $y'(m) = m + \frac{1}{2}m^{-1/2}$. A taxa de variação instantânea de y em relação a m quando m é 16, é $y'(16) = 2(16) + \frac{1}{2}(16)^{-1/2} = 32{,}125$. Portanto, a taxa de variação instantânea de 100y quando m=16 é 3.212,5. Logo, a taxa de variação instantânea da oferta em relação ao preço, quando este é $16, é 3.212,5 calculadoras por $1 de aumento no preço.

55. $f(x) = \frac{3}{x+2}$; $f'(x) = \lim_{x\to-5} \frac{f(x) - f(-5)}{x+5} = \lim_{x\to-5} \frac{\frac{3}{x+2} - (-1)}{x+5} = \lim_{x\to-5} \frac{x+5}{(x+2)(x+5)} = \lim_{x\to-5} \frac{1}{x+2} = -\frac{1}{3}$

57. $f(x) = \sqrt{4x-3}$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt{4(x+\Delta x) - 3} + \sqrt{4x-3}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(\sqrt{4x+4\Delta x-3} - \sqrt{4x-3})(\sqrt{4x+4\Delta x-3} + \sqrt{4x-3})}{\Delta x(\sqrt{4x+4\Delta x-3} + \sqrt{4x-3})}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{4x + 4\Delta x - 3 - 4x + 3}{\Delta x(\sqrt{4x+4\Delta x-3} + \sqrt{4x-3})} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{4}{\sqrt{4x+4\Delta x-3} + \sqrt{4x-3}} = \frac{2}{\sqrt{4x-3}}$$

59. $f(x) = \sqrt{2+\cos x} = (2+\cos x)^{1/2}$; $f'(x) = \frac{1}{2}(2+\cos x)^{-1/2}(-\text{sen}\, x)$

$f''(x) = \frac{1}{2}[-\frac{1}{2}(2+\cos x)^{-3/2}(-\text{sen}\, x)^2 + (2+\cos x)^{-1/2}(-\cos x)]$

$f''(\pi) = \frac{1}{2}[-\frac{1}{2}(2-1)^{-3/2}(0) + (2-1)^{-1/2}(1)] = \frac{1}{2}$

61. $f(x) = (|x+1| - |x|)^2$; $f'(x) = 2(|x+1| - |x|)D_x(\sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{x^2})$

$= 2(|x+1| - |x|)\left(\frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2}}\right) = 2(|x+1| - |x|)\left(\frac{x+1}{|x+1|} - \frac{x}{|x|}\right)$. De outro modo,

$$f(x) = \begin{cases} (-x-1+x)^2 = 1 & \text{se } x < -1 \\ (x+1+x)^2 = (2x+1)^2 & \text{se } -1 \le x \le 0; \\ (x+1-x)^2 = 1 & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -1 \\ 8x+4 & \text{se } -1 < x < 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

63. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{se } x \le 3 \\ 20 - x^2 & \text{se } 3 < x \end{cases}$

(b) $\lim_{x\to3^-} f(x) = \lim_{x\to3}(x^2+2) = 11$, $\lim_{x\to3^+} f(x) = (20 - x^2) = 11$ então $\lim_{x\to3} f(x) = 11$.

$f(3) = 11$. Como $\lim_{x\to3} f(x) = f(3)$, f é contínua em 3.

(c) $f'_-(3) = \lim_{x\to3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{x\to3^-} \frac{(x^2+2) - 11}{x-3} = \lim_{x\to3^-} \frac{x^2-9}{x-3}$

$= \lim_{x\to3^-} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to3^-}(x+3) = 6$

$f'_+(3) = \lim_{x\to3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{x\to3^+} \frac{(20-x^2) - 11}{x-3} = \lim_{x\to3^+} \frac{9-x^2}{x-3}$

$= \lim_{x\to3^+} \frac{(3-x)(3+x)}{x-3} = \lim_{x\to3^+} -(x+3) = -6$

Como $f'^-(3) \ne f'^+(3)$, $f'(3)$ não existe.

Portanto, f não é derivável em 3.

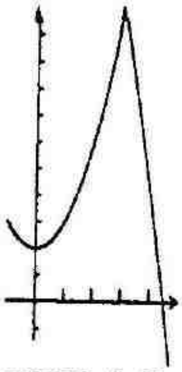


FIGURA 3-63

65. $f(x) = |x|^3$

(b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(-x)^3 = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^3 = 0$.

Portanto, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

(c) $f'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{(-x)^3 - 0}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}(-x^2) = 0$

$f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^3 - 0}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0.$

Portanto, $f'(0) = 0$.

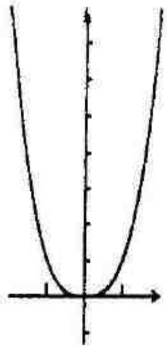


FIGURA 3-65

67. $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{se } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{|x|} & \text{se } x > 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(ax^2 + b) = a + b$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x} = 1.$

Como $f'(1)$ existe, f é contínua em 1 e, portanto, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ e $a + b = 1$.

$f'_-(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{(ax^2 + b) - (a + b)}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{ax^2 - a}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{a(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1^-} a(x + 1) = 2a$

$f'_+(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(1/x) - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1 - x}{x(x - 1)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{-1}{x} = -1.$

Como $f'(1)$ existe, $f'_-(1) = f'_+(1)$. Portanto, $2a = -1$, $a = -\frac{1}{2}$.

Substituindo $a = -\frac{1}{2}$ em $a + b = 1$, obtemos $-\frac{1}{2} + b = 1$, $b = \frac{3}{2}$.

69. C(x) é a quantia em dirheiro correspondente ao custo total de fabricação de x cadeiras: $C(x) = x^2 + 40x + 800$

(a) C' é a função custo marginal $C'(x) = 2x + 40$

(b) $C'(20) = 2(20) + 40 = 80$

(c) A quantia em dinheiro correspondente ao custo de fabricação de 25 cadeiras é

$$C(21) - C(20) = [(21)^2 + 40(2) + 800] - [(20)^2 + 40(20) + 800] = 81$$

71. Após t semanas haverá x presas e y predadores, onde $y = \frac{1}{4}x^2 + 80$ e $x = 8t + 90$.

Se $t = 9$, $x = 8(9) + 90 = 162$ e $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{2}x(8) = \dfrac{1}{2}(162)8 = 648$. Assim, após 9 semanas a população de predadores estará crescendo à taxa de 648 peixes por semana.

73. $s = \operatorname{sen}(4t + \frac{1}{3}\pi) + \operatorname{sen}(4t + \frac{1}{6}\pi)$, $v = \frac{ds}{dt} = 4\cos(4t + \frac{1}{3}\pi) + 4\cos(4t + \frac{1}{6}\pi)$,
$a = \frac{d^2s}{dt^2} = -16\operatorname{sen}(4t + \frac{1}{3}\pi) - 16\operatorname{sen}(4t + \frac{1}{6}\pi)$. Portanto, $a = -16s$.
Como a medida da aceleração é sempre proporcional à medida do deslocamento e a aceleração e o deslocamento têm sentidos opostos, o movimento é harmônico simples.

75. $s = \cos 2t + \cos t$; $v = \frac{ds}{dt} = -2\operatorname{sen} 2t - \operatorname{sen} t$; $a = \frac{d^2s}{dt^2} = -4\cos 2t - \cos t$. Já que a aceleração não é proporcional ao deslocamento, o movimento não é harmônico simples.

77. Em t horas após as 12 horas do segundo dia, sejam x milhas náuticas a distância orientada do primeiro navio até o porto, sejam y milhas náuticas a distância orientada do segundo navio até o porto, e sejam z milhas náuticas a distância entre os dois navios. Então,
$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\frac{1}{4}\pi$; $z = [x^2 + y^2 - 2xy(\frac{1}{2}\sqrt{2})]^{1/2}$; $D_tz = \dfrac{2xD_tx + 2yD_ty - \sqrt{2}yD_tx - \sqrt{2}xD_ty}{2(x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy)^{1/2}}$
Temos $D_tx = 20$ e $D_ty = 15$. No instante em que o segundo navio viajou 90 milhas náuticas, t=6. Para t=6, x=600 e y=90. Logo,

$$D_tz = \frac{2(600)20 + 2(90)15 - \sqrt{2}(90)20 - \sqrt{2}(600)15}{2[(600)^2 + (90)^2 - \sqrt{2}(600)(90)]^{1/2}} = \frac{11,426.49}{1080.24} = 10,58$$

Portanto, quando o segundo navio viajou 90 milhas, os dois navios se separam à taxa de 10,6 nós.

79. A água no funil forma um cone e o volume dessa água está aumentando à taxa de 8 cm³/s. Em t s, seja r cm o raio desse cone e h cm a sua altura.
Então, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, $\frac{dV}{dt} = 8$ e desejamos encontrar $\frac{dh}{dt}$ quando h=5.
Agora, $\frac{r}{h} = \frac{5}{8}$ então, $r = \frac{5}{8}h$. Logo, $V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{5}{8}h\right)^2 h = \frac{25\pi}{192}h^3$; $\frac{dV}{dt} = \frac{25\pi}{64}h^2\frac{dh}{dt}$; $\frac{dh}{dt} = \frac{64}{25\pi h^2}\frac{dV}{dt}$.
Como $\frac{dV}{dt} = 8$, obtemos $\left.\frac{dh}{dt}\right]_{h=5} = \frac{64(8)}{25\pi(5)^2} = \frac{512}{625\pi} \approx 0,26$. Portanto, o nível da água está subindo à taxa de 0,26 cm/s, quando a profundidade é de 5 cm.

81. Em t s, seja y m a altura da sombra do homem e x m sua distância do edifício.
Temos, pela semelhança dos triângulos,

$$\frac{y}{6} = \frac{x}{40 - x} \text{ so } y = \frac{6x}{40 - x};\quad \frac{dy}{dt} = \frac{6(40 - x) - 6x(-1)}{(40 - x)^2}\frac{dx}{dt} = \frac{240}{(40 - x)^2}\frac{dx}{dy}$$

Então, $x = 30$ e $\frac{dx}{dt} = -4$, então $\frac{dy}{dt} = \frac{240(-4)}{(40 - 30)^2} = -\frac{960}{100} = -9,6$.
Portanto, a sombra do homem está diminuindo à taxa de 9,6 m/s.

83. $f(x) = 3x + |x|$ e $g(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}|x|$.

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{(3x - x) - 0}{x} = \lim_{x \to 0^-} 2 = 2$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(3x + x) - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} 4 = 4$$

Como $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, então $f'(0)$ não existe.

$$g'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{(\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}x) - 0}{x} = \lim_{x \to 0^-} 1 = 1$$

$$g'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x) - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Como $g'_-(0) \neq g'_+(0)$, então $g'(0)$ não existe.

$(f \circ g)(x) = 3(\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}|x|) + |\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}|x||$

Se $x < 0$, $(f \circ g)(x) = 3(\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}x) + |\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}x| = 3x + |x| = 3x - x = 2x$;

Se $x \geq 0$, $(f \circ g)(x) = 3(\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x) + |\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x| = \frac{3}{2}x + |\frac{1}{2}x| = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x = 2x$.

Assim, $(f \circ g)(x) = 2x$ para todo x. Logo, $(f \circ g)'(x) = 2$. Portanto, $(f \circ g)'(0) = 2$.

85. Seja $f(x) = |x|$ e $g(x) = x^2$. Então, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = |x^2| = x^2$.

$g(0) = 0$ e $f(x) = |x|$ não é derivável em $g(0)$.

$g'(x) = 2x$. Portanto, $g'(0) = 0$. Assim, g é derivável em 0.

$(f \circ g)(x) = x^2$. Portanto, $f \circ g$ é derivável em 0.

87. $$\lim_{x \to x_1} \frac{xf(x_1) - x_1 f(x)}{x - x_1} = \lim_{x \to x_1} \frac{xf(x_1) - x_1 f(x_1) + x_1 f(x_1) - x_1 f(x)}{x - x_1}$$

$$= \lim_{x \to x_1} \frac{f(x_1)(x - x_1) - x_1[f(x) - f(x_1)]}{x - x_1} = f(x_1) \lim_{x \to x_1} 1 - x_1 \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f(x_1) - x_1 f'(x_1)$$

89. Um contra-exemplo $f(x) = |x|$, $g(x) = -1$, e $x_1 = 1$. Aqui f e g são ambas deriváveis em 1 mas, $(f \circ g)(x) = |x - 1|$; logo $f \circ g$ não é derivável em 1.

91. Queremos provar, por indução matemática que $D_x{}^n(\text{sen } x) = \text{sen}(x + \frac{1}{2}n\pi)$.

Se $n = 1$, temos $D_x(\text{sen } x) = \cos x = \text{sen}(x + \frac{1}{2}\pi)$. Portanto, a fórmula é verdadeira para n=1

Supomos que a fórmula seja verdadeira para n=k, isto é, $D_x{}^k(\text{sen } x) = \text{sen}(x + \frac{1}{2}k\pi)$. Então,

$$D_x{}^{(k+1)}(\text{sen } x) = D_x[D_x{}^k(\text{sen } x)] = D_x[\text{sen}(x + \tfrac{1}{2}k\pi)] = \cos(x + \tfrac{1}{2}k\pi) = \text{sen}[(x + \tfrac{1}{2}k\pi) + \tfrac{1}{2}\pi]$$

$$= \text{sen}[x + \tfrac{1}{2}(k + 1)\pi]$$

Portanto, a fórmula será verificada para $n = k + 1$ se for válida para n=k. Logo, ela é válida para qualquer inteiro positivo n.

CAPÍTULO 4

VALORES EXTREMOS DAS FUNÇÕES, TÉCNICAS DE CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS E A DIFERENCIAL

EXERCÍCIOS 4.1 Valor Funcional Máximo e Mínimo

1. $f(x) = x^3 + 7x^2 - 5x$; $f'(x) = 3x^2 + 14x - 5 = (3x - 1)(x + 5)$

   $f'(x) = 0$ qdo $x = \frac{1}{3}$ e $x = -5$. Assim, $\frac{1}{3}$ e -5 são números críticos de f.

3. $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$; $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 4x - 12 = 4[x^2(x + 3) - (x + 3)] = 4(x - 1)(x + 1)(x + 3)$

   $f'(x) = 0$ qdo $x = 1$, $x = -1$, e $x = -3$. Assim, 1, -1, -3 são números críticos de f.

5. $g(x) = x^{6/5} - 12x^{1/5}$; $g'(x) = \frac{6}{5}x^{1/5} - \frac{12}{5}x^{-4/5} = \frac{6}{5}x^{-4/5}(x - 2)$

   $g'(0)$ não existe e 0 está no domínio de g; $g'(x) = 0$ qdo $x = 2$

   Assim, 0 e 2 são números críticos de g

7. $f(t) = (t^2 - 4)^{2/3}$; $f'(t) = \frac{2}{3}(t^2 - 4)^{-1/3}(2t)$

   $f'(-2)$ e $f'(2)$ não existem e -2 e 2 estão no domínio de f; $f'(t) = 0$ qdo $t = 0$.

   Assim, -2, 2, 0 são números críticos de f.

9. $h(x) = \frac{x - 3}{x + 7}$; $h'(x) = \frac{(x + 7) - (x - 3)}{(x + 7)^2} = \frac{10}{(x + 7)^2}$

   $h'(7)$ não existe, mas -7 não está no domínio de h; $h'(x)$ nunca é 0.

   Assim, h não tem números críticos.

11. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$; $f'(x) = \frac{(x^2 - 9) - x(2x)}{(x^2 - 9)^2} = -\frac{x^2 + 9}{(x^2 - 9)^2}$

   $f'(3)$ e $f'(-3)$ não existem, mas 3 e -3 não estão no domínio de f; $f'(x)$ nunca é 0.

   Assim, f não tem números críticos.

13. $f(x) = \text{sen}^2 3x$; $f'(x) = 6 \text{ sen } 3x \cos 3x = 3 \text{ sen } 6x$

   $f'(x) = 0$ qdo $6x = k\pi$, onde k é qualquer inteiro.

   Assim, os números críticos de f são todos os números $\frac{1}{6}k\pi$, onde k é um inteiro qualquer.

15. $g(t) = \text{sen } 2t \cos 2t = \frac{1}{2} \text{sen } 4t$; $g'(t) = 2 \cos 4t$

   $g'(t) = 0$ quando $4t = \frac{1}{2}(2k + 1)\pi$, onde k é um inteiro qualquer.

   Assim, os números críticos de g são todos os números $\frac{1}{8}(2k + 1)\pi$, onde k é um inteiro qualquer.

17. $f(x) = \text{tg}^2 4x$; $f'(x) = 8\ \text{tg}\ 4x\ \sec^2 4x$

$f'(x)$ não existe quando $4x = \frac{1}{2}(2k+1)\pi$ onde k é qualquer inteiro, mas esses valores de x não estão no domínio de f; $f'(x) = 0$ qdo $4x = k\pi$, onde k é qualquer inteiro.

Assim, os números críticos de f são todos os valores $\frac{1}{4}k\pi$, onde k é qualquer inteiro.

19. $G(x) = (x-2)^3(x+1)^2$; $G'(x) = 3(x-2)^2(x+1)^2 + 2(x-2)^3(x+1) = (x-2)^2(x+1)(5x-1)$

$G'(x) = 0$ qdo $x = 2$, $x = -1$, e $x = \frac{1}{5}$.

Assim, os números críticos de G são 2, −1 e $\frac{1}{5}$.

21. $f(x) = 4 - 3x$; $I = (-1, 2]$; $f'(x) = -3$

$f'(x)$ nunca é 0, logo f não tem extremos relativos.

$f(2) = -2$ é um mínimo absoluto em I.

Não há máximo absoluto em I, pois

$\lim_{x\to -1} f(x) = 7$ mas $f(x) < 7$ em I.

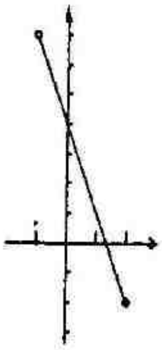


FIGURA 4.1-21

23. $g(x) = \frac{1}{x}$, $I = [-2, 3]$

0 está em I e $\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} g(x) = -\infty$.

Logo, g não tem valor absoluto nem máximo nem mínimo em I.

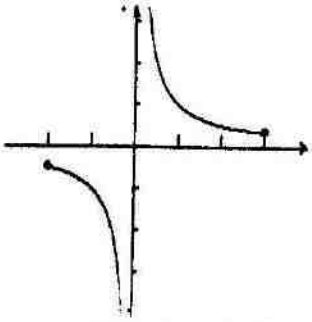


FIGURA 4.1-23

25. $f(x) = 2\cos x$, $I = [-\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi)$; $f'(x) = 2\ \text{sen}\ x$

$f'(0) = 0$ e 0 está em I. Portanto,

0 é o número crítico de f em I.

$$f(-\tfrac{2}{3}\pi) = 2\cos(-\tfrac{2}{3}\pi) = 2(-\tfrac{1}{2}) = -1;$$

$$f(0) = 2\cos 0 = 2\cdot 1 = 2;\quad f(\tfrac{1}{3}\pi) = 2\cos(\tfrac{1}{3}\pi) = 1$$

O valor mínimo absoluto de f em I é −1 e $f(-\frac{2}{3}\pi) = -1$.

O valor máximo absoluto de f em I é 2 e $f(0) = 2$.

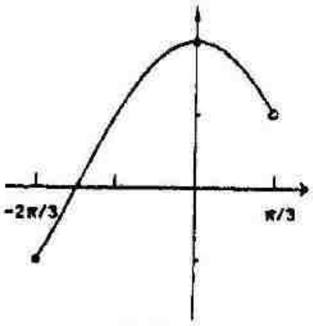


FIGURA 4.1-25

27. $f(x) = \sqrt{3+x}$, $I = [-3, +\infty)$; $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{3+x}}$

$f(-3) = 0$ e $f(x) > 0$ em I.

Assim, o valor mínimo absoluto de f em I é 0.

Como $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

Não há valor máximo absoluto de f em I.

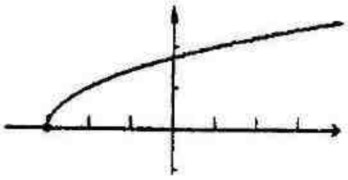


FIGURA 4.1-27

29. $h(x) = \frac{4}{(x-3)^2}$, $I = [2, 5]$; $h'(x) = -\frac{8}{(x-3)^3}$

3 está em I e $\lim_{x \to 3} h(x) = +\infty$. Portanto,

h não tem máximo absoluto em I.

$h'(x)$ nunca é 0; logo, não há números críticos de h.

$h(2) = 4$ e $h(5) = 1$; logo, o valor

mínimo absoluto de h em I é 1.

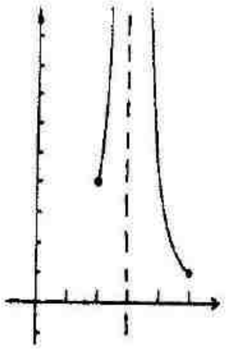


FIGURA 4.1-29

31. $F(x) = |x - 4| + 1$, $I = (0, 6)$; $F'(x) = \frac{x-4}{|x-4|} = \text{sgn}(x - 4)$, $x \neq 4$.

$F'(4)$ não existe e 4 está em I;

$F'(x)$ nunca é 0; logo, 4 é o número crítico.

$$F(0) = 5, \quad F(4) = 1, \quad F(6) = 3$$

F tem um valor mínimo absoluto de 1 em I e $F(4) = 1$

$\lim_{x \to 0^+} F(x) = 5$ mas $F(x) < 5$ para todo x em I.

Logo, F não tem valor máximo absoluto em I.

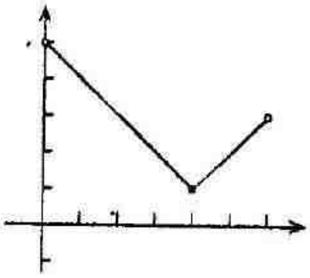


FIGURA 4.1-31

33. $g(x) = \sqrt{4 + 7x}$, $I = [0, 3)$; $g'(x) = \frac{7}{2\sqrt{4 + 7x}}$

$g'(-4/7)$ não existe, mas $-4/7$ não está em I, $g'(x)$ nunca é 0.

O valor mínimo absoluto de g em I é 2 e $g(0) = 2$.

Como: $\lim_{x \to 3^-} g(x) = 5$ e $g(x) < 5$ para todo x em I,

não há valor máximo absoluto de g em I.

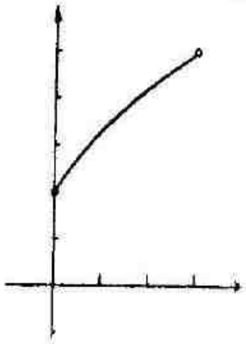


FIGURA 4.1-33

35. $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-5} & \text{se } x \neq 5 \\ 2 & \text{se } x = 5 \end{cases}$, $I = [3, 5]$

Como: $\lim_{x \to 5^-} f(x) = -\infty$, não há

valor mínimo absoluto de f em I.

O valor máximo absoluto de f em I é 2 e $f(5) = 2$.

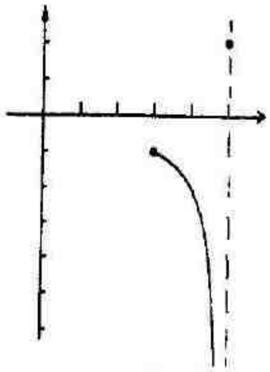


FIGURA 4.1-35

37. $f(x) = x - [\![x]\!]$, $I = (1, 3)$

O valor mínimo absoluto de f em I é 0 e $f(2) = 0$.

Não há valor máximo absoluto de f em I,

pois $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1$ ou $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 1$

e $f(x) < 1$ para todo x em I.

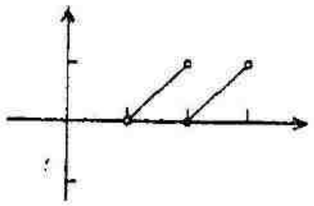


FIGURA 4.1-37

39. $g(x) = \sec 3x$, $I = [-\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi]$; $g'(x) = 3 \sec 3x \operatorname{tg} 3x$

$g'(0) = 0$ e 0 está em I. Assim, 0 é o número crítico.

Como $\lim\limits_{x \to \pi/6} g(x) = +\infty$, g não tem valor máximo absoluto em I.

O valor mínimo absoluto de g em I é 1 e $g(0) = 1$.

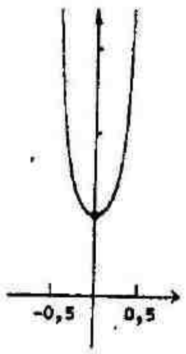


FIGURA 4.1-39

41. $g(x) = x^3 + 5x - 4$, $I = [-3, -1]$; $g'(x) = 3x^2 + 5$

Como g é contínua em I, g tem um

valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em I.

$g'(x)$ existe em todo lugar e $g'(x)$ nunca é 0.

Logo, g não tem números críticos.

$$g(-3) = -46, \quad g(-1) = -10$$

O valor mínimo absoluto é -46; o valor máximo absoluto é -10.

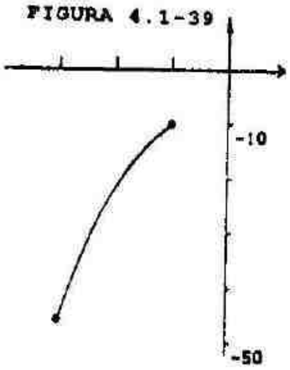


FIGURA 4.1-41

43. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$, $I = [-4, 0]$;

$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 4x(x + 2)(x - 2)$

Como f é contínua em I, f tem um

valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em I.

$f'(x) = 0$ qdo $x = 0$, $x = -2$, $x = 2$.

Os números críticos de f em $[-4, 0]$ são -2 e 0.

$$f(-4) = 144, \quad f(-2) = 0, \quad f(0) = 16$$

O valor mínimo absoluto é 0; o valor máximo absoluto é 144.

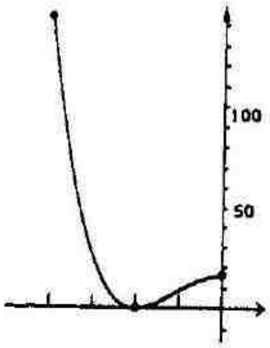


FIGURA 4.1-43

45. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$, $I = [0, 3]$. Veja o Exercício 43.

Os números críticos de f em (0,3) são 0 e 2.

$$f(0) = 16, \quad f(2) = 0, \quad f(3) = 25$$

O valor mínimo absoluto é 0; o valor máximo absoluto é 25.

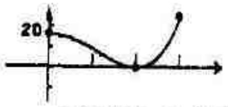


FIGURA 4.1-45

47. $f(t) = 2\,\text{sen}\,t$, $I = [-\pi, \pi]$; $f'(t) = 2\cos t$

Como f é contínua em I, f tem um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em I.

$f'(-\frac{1}{2}\pi) = 0$ e $f'(\frac{1}{2}\pi) = 0$. Portanto, os números críticos de f em I são $-\frac{1}{2}\pi$ e $\frac{1}{2}\pi$.

$$f(-\pi) = 0, \quad f(-\tfrac{1}{2}\pi) = -2, \quad f(\tfrac{1}{2}\pi) = 2, \quad f(\pi) = 0$$

O valor mínimo absoluto é -2; o valor máximo absoluto é 2.

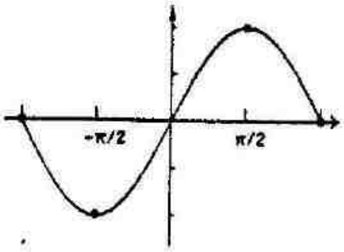


FIGURA 4.1-47

49. $f(x) = \frac{1}{2}\,\text{cosec}\,2x$, $I = [-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{6}\pi]$

Como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, f não tem qualquer valor extremo absoluto em I.

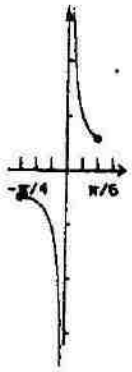


FIGURA 4.1-49

51. $f(x) = \frac{x}{x+2}$, $I = [-1, 2]$; $f'(x) = \frac{1(x+2) - x}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2}$

Como f é contínua em I, f tem um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em I.

Como $f'(x)$ existe em todo lugar em I e $f'(x)$ nunca é 0, f não tem números críticos.

$$f(-1) = -1 \quad \text{e} \quad f(2) = \tfrac{1}{2}$$

O valor mínimo absoluto é -1; o valor máximo absoluto é $\frac{1}{2}$.

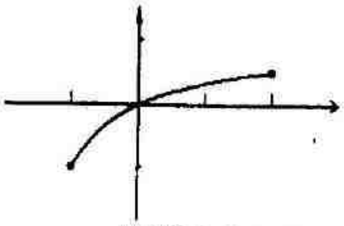


FIGURA 4.1-51

53. $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-3}$, $I = [0, 1]$; $f'(x) = \dfrac{1(2x-3) - 2(x+1)}{(2x-3)^2} = \dfrac{-5}{(2x-3)^2}$

Como f é contínua em I, f tem um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em I. Como $f'(x)$ existe em toda parte em I e $f'(x)$ nunca é 0, f não tem números críticos.

$$f(0) = -\tfrac{1}{3}, \quad f(1) = -2$$

O valor mínimo absoluto é -2; o valor máximo absoluto é $-\frac{1}{3}$.

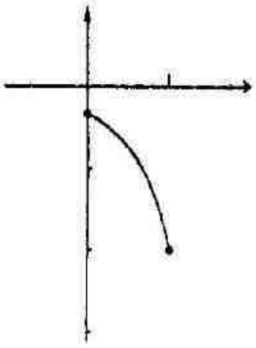


FIGURA 4.1-53

55. $F(x) = \begin{cases} 3x - 4 & \text{se } -3 \le x < 1 \\ x^2 - 2 & \text{se } 1 \le x \le 3 \end{cases}$, $I = [-3, 3]$; $F'(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } -3 < x < 1 \\ 2x & \text{se } 1 < x < 3 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 1^-} F(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (3x - 4) = -1$; $\lim\limits_{x \to 1^+} F(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 - 2) = -1$.

Assim, F é contínua em 1. Como F é contínua em I, F tem um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em I.

$F'(x)$ nunca é 0 e $F'(x)$ existe, talvez com exceção em 1.

$F'_-(1) = 3$ e $F'_+(1) = 2$; portanto, $F'(1)$ não existe; assim, 1 é um número crítico de F.

$$F(-3) = -13, \quad F(1) = -1, \quad F(-3) = 7$$

O valor mínimo absoluto é -13; o valor máximo absoluto é 7.

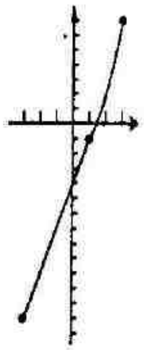


FIGURA 4.1-55

57. $f(x) = (x+1)^{2/3}$, $I = [-2, 1]$; $f'(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{-1/3}$

Como f é contínua em I, f tem um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em I.

$f'(-1)$ não existe e -1 está no domínio de f; $f'(x)$ nunca é 0. Assim, -1 é o único número crítico.

$$f(-2) = 1, \quad f(-1) = 0, \quad f(1) = \sqrt[3]{4}$$

O valor mínimo absoluto é 0; o valor máximo absoluto é $\sqrt[3]{4}$.

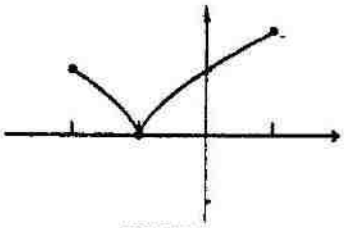


FIGURA 4.1-57

59. Se f tem um valor máximo relativo em C, então, -f tem um valor mínimo relativo em C.

Da primeira parte da demonstração $-f'(c) = 0$; logo, $f'(c) = 0$.

EXERCÍCIOS 4.2 Aplicações Envolvendo Extremos Absolutos num Intervalo Fechado

1. Suponhamos que sejam cortados, de cada canto, quadrados com lados de x cm de comprimento, e que os lados sejam dobrados para cima. Se V(x) for o volume da caixa, então,

$V(x) = (15-2x)(8-2x)x = 120x - 46x^2 + 4x^3,\ 0 \le x \le 4;\ V'(x) = 120 - 92x + 12x^2 = 4(5-3x)(6-x)$

$V'\left(\frac{5}{3}\right) = 0$ e $V'(6) = 0$. Logo, o único número crítico de V em [0,4] é $\frac{5}{3}$.

$$V(0) = 0,\ V\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{350}{3},\ V(4) = 0$$

O valor máximo absoluto de V é $\frac{350}{3}$ quando $x = \frac{5}{3}$. Logo, uma caixa com volume máximo de $\frac{350}{3}$ cm^3 pode ser obtida se forem cortados quadrados com lados de $\frac{5}{3}$ cm.

3. Se x m for o comprimento de um campo retangular, então (120 − x)m será sua largura. Seja A(x) m^2 a área do campo. Então;

$$A(x) = (120-x)x = 120x - x^2,\ 0 \le x \le 120;\ A'(x) = 120 - x = 2(60-x)$$

A'(60) = 0 e A'(x) existe em toda parte; logo o único número crítico de A é 60.

$$A(0) = 0,\ A(60) = 3.600,\ A(120) = 0$$

O valor máximo absoluto de A é 3.600 quando x = 60. Logo, o maior campo retangular que pode ser fechado com 240 m de cerca, tem dimensões 60 m por 60 m.

5. Se o lado do campo oposto ao rio tiver x m de comprimento, então os outros dois lados devem ter, cada um, $(120 - \frac{1}{2}x)$m de comprimento. Se A(x) m^2 for a área do campo, então,

$$A(x) = (120 - \tfrac{1}{2}x)x = 120x - \tfrac{1}{2}x^2,\ 0 \le x \le 240;\ A'(x) = 120 - x$$

A'(120) = 0 e A'(x) existe em toda parte; logo, o único número crítico de A é 120.

$$A(0) = 0,\ A(120) = 7.200,\ A(240) = 0$$

O valor máximo absoluto de A é 7.200 quando x = 120. Logo, as dimensões do maior campo retangular são 120 m e 60 m.

7. Seja x um número em [0,1], f(x) é a diferença entre o número e seu quadrado.

$$f(x) = x - x^2,\ 0 \le x \le 1;\ f'(x) = 1 - 2x$$

f é contínua em [0,1]. Logo, f tem um valor máximo absoluto em [0,1].

$f'(\frac{1}{2}) = 0$ e $f'(x)$ existe em toda parte; logo, o único número crítico de f é ½.

$$f(0) = 0,\ f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{4},\ f(1) = 0$$

O valor máximo absoluto é ¼ quando x = ½. Logo, o número pedido em [0,1] é ½.

9. Sejam x unidades o comprimento da metade da base do retângulo.

Então, os vértices do retângulo estão nos pontos

$$(x, 0),\ (-x, 0),\ (x, 9 - x^2) \quad e \quad (-x, 9 - x^2).$$

Sejam A(x) unidades quadradas a área do retângulo.

Veja a Figura 4.2.9.

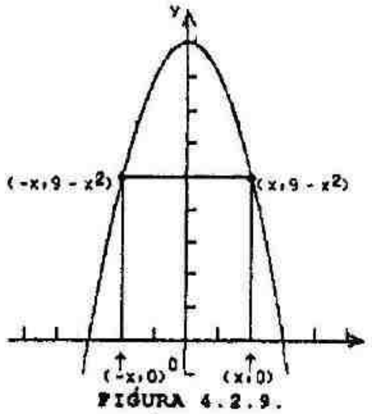


FIGURA 4.2.9.

$$A(x) = 2x(9 - x^2) = 18x - 2x^3,\quad 0 \leq x \leq 3$$

$$A'(x) = 18 - 6x^2 = 6(3 - x^2)$$

A é contínua em [0,3]. Logo, A tem um valor máximo absoluto em [0,3].

$A'(-\sqrt{3}) = 0$ e $A'(\sqrt{3}) = 0$. Portanto, o número crítico de A em [0,3] é $\sqrt{3}$.

$$A(0) = 0,\quad A(\sqrt{3}) = 12\sqrt{3},\quad A(3) = 0.$$

O valor máximo absoluto de A é $12\sqrt{3}$. Logo, a área de maior retângulo é $12\sqrt{3}$ unidades quadradas.

11. Seja x km a distância de B a P. Então, $\sqrt{x^2 + 36}$ km é a distância de P a A e $(9 - x)$ km é a distância de P a C. O custo da viagem iguala-se ao custo da parte sob a água, mais a parte por terra. Se a viagem custa C(x), então,

$$C(x) = 15\sqrt{x^2 + 36} + 12(9 - x),\quad 0 \leq x \leq 9;\quad C'(x) = \frac{15x}{\sqrt{x^2 + 36}} - 12$$

C é contínua em [0,9]. Logo, C tem um valor mínimo absoluto em [0,9].

Seja $C'(x) = 0$: $\dfrac{15x}{\sqrt{x^2 + 36}} - 12 = 0$; $5x = 4\sqrt{x^2 + 36}$; $25x^2 = 16x^2 + 576$; $9x^2 = 576$; $x^2 = 64$; $x = \pm 8$

Como C'(x) existe em toda parte, 8 é o único número crítico de C em [0,9].

$$C(0) = 198,\quad C(8) = 162,\quad C(9) = 15\sqrt{117} \approx 162,25$$

O valor mínimo absoluto de C é 162 quando x = 8. Portanto, para o percurso mais barato, o ponto P deveria ser 8 km abaixo da praia de B.

13. Como na solução do Exemplo 1, seja x km a distância de B a P onde o cabo corre de A para P até C. Então, $\sqrt{9+x^2}$ km é a distância de P a A e (6-x) m é a distância de P a C. Existe uma figura semelhante à Figura 3 no texto.

Seja C(x) o custo total do cabo de A a P e de P a C.

$$C(x) = \frac{5}{4}k\sqrt{9+x^2} + k(6-x), \quad 0 \le x \le 6; \quad C'(x) = \frac{5kx}{4\sqrt{9+x^2}} - k$$

C é contínua em [0,6]. Logo, C tem um valor mínimo absoluto em [0,6].

Seja C'(x) = 0, para obtermos a mesma equação que no texto. Assim, x = 4 e 4 está em [0,6].

$$C(0) = \tfrac{5}{4}k(3) + 6k = 9{,}75k, \quad C(4) = \tfrac{5}{4}k(5) + 2k = 8{,}25k, \quad C(6) = \tfrac{5}{4}k\sqrt{45} + 0 \approx 8{,}385k$$

O valor mínimo absoluto de C é 8,25k quando x = 4. Portanto, para o custo do cabo ser o mínimo, o ponto P deveria ser 4 km abaixo de B.

15. $R(\theta) = \dfrac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g}, \quad 0 \le \theta \le \tfrac{1}{2}\pi, \quad 0 \le 2\theta \le \pi$

O valor máximo absoluto da função seno em $[0,\pi]$ é 1 quando a variável independente é $\tfrac{1}{2}\pi$. Assim, o valor máximo absoluto de $R(\theta)$ é $\dfrac{v_0^2}{g}$ qdo $\theta = \tfrac{1}{4}\pi$.

17. Seja I(x) centavos a renda bruta se x estudantes fizerem a viagem.

$$I(x) = x[1.500 - 5(x - 150)] = 2250x - 5x^2, \quad 0 \le x \le 250; \quad I'(x) = 2250 - 10x$$

I é contínua em [0,250]; logo, tenho um valor máximo absoluto em [0,250].

$I'(225) = 0$ e $I'(x)$ existe em toda parte; logo, o único número crítico de I é 225.

$$I(0) = 0, \quad I(225) = 275.625, \quad I(250) = 250.000$$

O valor máximo absoluto de I ocorre quando x = 225. Logo, a escola receberá a maior renda bruta quando 225 estudantes fizerem a viagem.

19. Quando o número de membros no clube for x, a anuidade que deverá ser paga será de $100 - \tfrac{1}{2}(x - 600) = 400 - \tfrac{1}{2}x$. Se R(x) for o rendimento anual gerado pelas mensalidades, então, $R(x) = x(400 - \tfrac{1}{2}x) = 400x - \tfrac{1}{2}x^2, \quad 0 \le x \le 800; \quad R'(x) = 400 - x$.

R é contínua em [0,800]; logo, R tem um valor máximo absoluto em [0,800].

$R'(400) = 0$ e $R'(x)$ existe em toda parte; logo, o único número crítico de R é 400.

$$R(0) = 0, \quad R(400) = 80.000, \quad R(800) = 0$$

Portanto, o valor máximo absoluto de R ocorre quando x = 400.

Assim, 400 membros darão ao clube o rendimento anual máximo.

21. Seja P(x) o número de laranjas produzidas por ano quando x árvores são plantadas por acre.

$$P(x) = \begin{cases} 600x & \text{se } 0 \leq x \leq 20 \\ [600 - 15(x-20)]x = 900x - 15x^2 & \text{se } 20 < x \leq 60 \end{cases}; \quad P'(x) = \begin{cases} 600 & \text{se } 0 < x < 20 \\ 900 - 30x & \text{se } 20 < x < 60 \end{cases}$$

Como $\lim_{x \to 20^-} P(x) = \lim_{x \to 20^-} (600x) = 12.000$ e $\lim_{x \to 20^+} P(x) = \lim_{x \to 20^+} (900x - 5x^2) = 12.000$

então $\lim_{x \to 20} P(x) = 12.000 = P(20)$. Portanto, P é contínua em 20, logo, P é contínua em [0,60]. Então, P tem um valor máximo absoluto em [0,60]. $P'(30) = 0$ e $P'(x)$ existe em toda parte, provavelmente com exceção em 20. Assim, 30 e possivelmente 20 sejam números críticos.

$$P(0) = 0, \quad P(20) = 12.000, \quad P(30) = 13.500, \quad P(60) = 0$$

P tem um valor máximo absoluto quando $x = 30$.

Portanto, o número máximo de laranjas é obtido quando 30 árvores são plantadas.

23 Quando r cm for o raio do cilindro, seja h cm a altura e $A(r)\text{cm}^2$ sua área de superfície lateral. Do Teorema de Pitágoras, $r^2 + (\frac{1}{2}h)^2 = 36$; $h = 2\sqrt{36 - r^2}$. Então,

$$A(r) = 2\pi rh = 4\pi r\sqrt{36 - r^2} = 4\pi\sqrt{36r^2 - r^4}, \quad 0 \leq r \leq 6; \quad A'(r) = \frac{4\pi(72r - 4r^3)}{2\sqrt{36r^2 - r^4}} = \frac{8\pi(18 - r^2)}{\sqrt{36 - r^2}}$$

$A'(-3\sqrt{2}) = 0$ e $A'(3\sqrt{2}) = 0$, e $A'(x)$ existe em (0,6), logo, $3\sqrt{2}$ é o número crítico.

$$A(0) = 0, \quad A(3\sqrt{2}) = 72\pi, \quad A(6) = 0$$

Logo, A tem um valor máximo absoluto qdo $r = 3\sqrt{2}$ e $h = 2\sqrt{36 - r^2} = 2\sqrt{36 - 18} = 2\sqrt{18} = 6\sqrt{2}$.

Assim, o cilindro circular reto de maior área de superfície lateral tem um raio de $3\sqrt{2}$ cm e uma altura de $6\sqrt{2}$ cm.

25. Seja x cm o comprimento de uma caixa retangular. Então, a profundidade da caixa precisa ser de (100-x) cm, logo, o comprimento de cada lado de uma caixa com uma secção quadrada é ¼(100 − x) cm. Seja $V(x)$ cm^3 o volume da caixa.

$$V(x) = x[\tfrac{1}{4}(100 - x)]^2 = \frac{1}{16}(x^3 - 200x^2 + 10.000x), \quad 0 \leq x \leq 100$$

$$V'(x) = \frac{1}{16}(3x^2 - 400x + 10.000) = \frac{1}{16}(3x - 100)(x - 100)$$

V é contínua em [0,100], logo, V tem um valor máximo absoluto em [0,100].

$V'\left(\frac{100}{3}\right) = 0$, $V'(100) = 0$ e $V'(x)$ existe em [0,100]. Logo, $\frac{100}{3}$ é o número crítico.

$$V(0) = 0, \quad V\left(\frac{100}{3}\right) = \frac{250.000}{27}, \quad V(100) = 0$$

O valor máximo absoluto de V ocorre quando $x = \frac{100}{3}$. Portanto, a caixa de maior volume, que pode ser enviada, tem dimensões $\frac{100}{3}$ cm por $\frac{50}{3}$ cm por $\frac{50}{3}$ cm.

27. O quadrado da distância do ponto (x, y) na circunferência $x^2 + y^2 = 9$ a $(4,5)$ é

$$(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 10y + 25 = (x^2 + y^2 + 41) - 8x - 10y = 50 - 8x - 10y$$

Se $y \geq 0$, $y = \sqrt{9 - x^2}$. Se $S_1(x)$ for o quadrado da distância de $(4,5)$ quando $y \geq 0$, então,

$$S_1(x) = 50 - 8x - 10\sqrt{9 - x^2}, \quad -3 \leq x \leq 3; \quad S_1'(x) = -8 + \frac{10x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

Se $y \leq 0$, $y = -\sqrt{9 - x^2}$. Se $S_2(x)$ for o quadrado da distância de $(4,5)$ quando $y \leq 0$ então,

$$S_2(x) = 50 - 8x + 10\sqrt{9 - x^2}, \quad -3 \leq x \leq 3; \quad S_2'(x) = -8 - \frac{10x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

Ambas, S_1 e S_2 são contínuas em $[-3,3]$. Portanto, o teorema do valor extremo se aplica.

Seja $S_1'(x) = 0$: $\frac{10x}{\sqrt{9 - x^2}} = 8 \Rightarrow x > 0$; $5x = 4\sqrt{9 - x^2}$; $25x^2 = 16(9 - x^2)$; $41x^2 = 144$, $x = \frac{12}{\sqrt{41}}$.

Seja $S_2'(x) = 0$: $\frac{10x}{\sqrt{9 - x^2}} = -8 \Rightarrow x < 0$; $5x = -4\sqrt{9 - x^2}$; $25x^2 = 16(9 - x^2)$; $41x^2 = 144$, $x = -\frac{12}{\sqrt{41}}$.

Qdo $x = \pm 3$, $\sqrt{9 - x^2} = 0$. Assim, $S_1(-3) = S_2(-3) = 50 - 8(-3) = 74$, $S_1(3) = S_2(3) = 50 - 8(3) = 26$.

Qdo $x = \pm\frac{12}{\sqrt{41}}$, $\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - \frac{144}{41}} = \sqrt{\frac{225}{41}} = \frac{15}{\sqrt{41}}$. Assim, $S_1\left(\frac{12}{\sqrt{41}}\right) = 50 - 8\left(\frac{12}{\sqrt{41}}\right) - 10\left(\frac{15}{\sqrt{41}}\right) = 50 - \frac{246}{\sqrt{41}}$ $= 50 - 6\sqrt{41}$ e $S_2\left(-\frac{12}{\sqrt{41}}\right) = 50 - 8\left(-\frac{12}{\sqrt{41}}\right) + 10\left(\frac{15}{\sqrt{41}}\right) = 50 + \frac{246}{\sqrt{41}} = 50 + 6\sqrt{41}$.

Logo, a distância mínima absoluta é $\sqrt{50 - 6\sqrt{41}} = \sqrt{41 - 2\cdot 3\sqrt{41} + 9} = \sqrt{41} - 3$ e a distância máxima absoluta é $\sqrt{50 + 6\sqrt{41}} = \sqrt{41} + 3$.

De outro modo, seja $f(\theta)$ a distância $|\overline{AP}|$ quando a medida do ângulo POA for θ. Então, $|\overline{OA}|^2 = 4^2 + 5^2 = 41$ e $|\overline{OP}|^2 = 9$. Pela lei dos co-senos.

$$|\overline{AP}|^2 = |\overline{OP}|^2 + |\overline{OA}|^2 - 2|\overline{OP}||\overline{OA}|\cos\theta = 9 + 41 - 2\cdot 3\sqrt{41}\cos\theta = 50 - 6\sqrt{41}\cos\theta$$

Logo, $f(\theta) = \sqrt{50 - 6\sqrt{41}\cos\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Como $-1 \leq \cos\theta \leq 1$,

(a) $f(\theta) \geq \sqrt{50 - 6\sqrt{41}(1)} = \sqrt{41} - 3 = a$ em $[0, \pi]$ e $f(0) = a$. a é um valor mínimo absoluto.

(b) $f(\theta) \leq \sqrt{50 - 6\sqrt{41}(-1)} = \sqrt{41} + 3 = b$ em $[0, \pi]$ e $f(\pi) = b$. b é um valor mínimo absoluto.

29. $f(x) = \frac{1}{2}x^2(k - x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}x^3$, $0 \leq x \leq k$; $f'(x) = kx - \frac{3}{2}x^2 = x(k - \frac{3}{2}x)$

f é contínua em $[0,k]$; logo, f tem um valor mínimo absoluto em $[0,k]$.

$f'(0) = 0$, $f'(\frac{2}{3}k) = 0$ e $f'(x)$ existe em $[0,k]$. Logo, $\frac{2}{3}k$ é o único número crítico.

$$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{2}{3}k\right) = \frac{2}{27}k^3, \quad f(k) = 0$$

Assim, f tem um valor máximo absoluto em $\frac{2}{3}k$.

Então, a diminuição máxima na pressão sangüinea ocorre qdo $\frac{2}{3}k$ mg de droga foram ingeridos.

31. Seja P a população total da cidade e seja R(x) a taxa em que o boato se espalhou quando x pessoas o escutaram. Como R(x) é conjuntamente proporcional a x e a P-x, temos, para alguma constante k,

$$R(x) = kx(P-x) = k(Px-x^2),\ \ 0 \le x \le P;\ \ R'(x) = k(P-2x)$$

R é contínua em [0,P]. Portanto, R tem um valor máximo absoluto em [0,P].

$R'(\frac{1}{2}P) = 0$ e $R'(x)$ existe em toda parte em [0,P]; logo, o único crítico de R é ½P.

$$R(0) = 0,\ \ R(\tfrac{1}{2}P) = \tfrac{1}{4}kP^2,\ \ R(P) = 0$$

Assim, R tem um valor máximo absoluto quando x = ½P. Então, o boato está se espalhando à taxa máxima quando a metade da população da cidade já o escutou.

33. Seja S(x) o comprimento da viga quando sua largura é x cm. Então, sua profundidade é $\sqrt{144^2 - x^2}$ cm, e para uma constante positiva k,

$$S(x) = kx(144^2 - x^2) = k(144^2x - x^3),\ \ 0 \le x \le 144;\ \ S'(x) = k(144^2 - 3x^2) = 3k(3\cdot 48^2 - x^2)$$

S é contínua em [0,144]. Portanto, S tem um valor máximo absoluto em [0,144].

$S'(x) = 0$ qdo $x = \pm 48\sqrt{3}$ e $S'(x)$ existe em [0,144], logo, $48\sqrt{3}$ é o número crítico.

$$S(0) = 0,\ \ S(48\sqrt{3}) = 663.552\sqrt{3}\,k,\ \ S(144) = 0$$

Assim, S tem um valor máximo absoluto quando $x = 48\sqrt{3}$ e $\sqrt{144^2 - x^2} = 48\sqrt{6}$.

Portanto, as dimensões da maior viga são $48\sqrt{3} \approx 83,14$ cm por $48\sqrt{6} \approx 117,58$ cm.

35. Seja x m o comprimento da peça de arame enrolada na forma circular de raio $\frac{x}{2\pi}$. Então, (10-x) m será o comprimento da peça de arame moldada na forma de um quadrado, cujo lado mede $\frac{1}{4}(10-x)$ m. Seja A(x) m^2 a área combinada das duas figuras.

$$A(x) = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{10-x}{4}\right)^2,\ \ 0 \le x \le 10;\ \ A'(x) = \frac{1}{2\pi}x - \frac{1}{8}(10-x)$$

A é contínua em [0,10]; logo, A tem valores máximo e mínimo absolutos.

Seja $A'(x) = 0$; $\frac{1}{2\pi}x - \frac{5}{4} + \frac{1}{8}x = 0$; $4x + \pi x = 10\pi$; $x = \frac{10\pi}{\pi+4}$

$A'\left(\frac{10\pi}{\pi+4}\right) = 0$ e $A'(x)$ existe em [0,10]; logo, o único número crítico de A é $\frac{10\pi}{\pi+4}$.

$$A(0) = \frac{25}{4} = 6,25,\ \ A\left(\frac{10\pi}{\pi+4}\right) = \frac{25}{\pi+4} \approx 3,5,\ \ A(10) = \frac{25}{\pi} \approx 8,0$$

Assim, A tem um valor mínimo absoluto qdo $x = \frac{10\pi}{x+4}$ e um valor máximo absoluto quando x = 10.

(a) A área combinada é mínima qdo $x = \frac{10\pi}{x+4}$ isto é, quando o raio da circunferência for $\frac{5}{\pi+4}$ m e o comprimento de um lado do quadrado for $\frac{10}{\pi+4}$ m.

(b) A área combinada é máxima quando x = 10; isto é, quando o raio da circunferência é $\frac{5}{\pi}$ m e não há quadrado.

EXERCÍCIOS 4.3 Teorema de Rolle e o Teorema do Valor Médio

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $[1, 3]$; $f'(x) = 2x - 4$

(i) Como f é uma função polinomial, ela é contínua em toda parte. Assim, f é contínua em $[1,3]$.

(ii) f é derivável em toda parte. Assim, f é derivável em $(1,3)$.

(iii) $f(1) = 1 - 4 + 3 = 0$, e $f(3) = 9 - 2 + = 0$.

Pelo Teorema de Rolle, existe um número c em $(1,3)$, tal que $f'(c) = 0$.

$f'(c) = 2c - 4$. Seja $f'(c) = 0$: $2c - 4 = 0$; $c = 2$. Como $2 \in (1, 3)$, 2 qualifica-se como c.

3. $f(x) = \text{sen } 2x$, $[0, \frac{1}{2}\pi]$; $f'(x) = 2 \cos 2x$

(i) Como a função seno é contínua em toda parte, então f é contínua em toda parte. Portanto, f é contínua em $[0, \frac{1}{2}\pi]$.

(ii) f é derivável em toda parte. Assim, f é derivável em $(0, \frac{1}{2}\pi)$.

(iii) $f(0) = \text{sen } 0 = 0$, e $f(\frac{1}{2}\pi) = \text{sen } \pi = 0$

Pelo Teorema de Rolle, existe um número c em $(0, \frac{1}{2}\pi)$ tal que $f'(c) = 0$.

$f'(c) = 2 \cos 2c$. Seja $f'(c) = 0$: $2 \cos 2c = 0$; $2c = \frac{1}{2}\pi$; $c = \frac{1}{4}\pi$.

Como $\frac{1}{4}\pi \in (0, \frac{1}{2}\pi)$, $\frac{1}{4}\pi$ qualifica-se como c.

5. $f(x) = x^2 + 2x - 1$, $[0, 1]$; $f'(x) = 2x + 2$

(i) Como f é uma função polinomial, ela é contínua em toda parte. Assim, f é contínua em $[0,1]$.

(ii) f é derivável em toda parte. Logo, f é derivável em $(0,1)$.

Pelo teorema do valor médio, existe um número c em $(0,1)$, tal que

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}; \quad 2c + 2 = \frac{2 - (-1)}{1}; \quad 2c + 2 = 3; \quad c = \frac{1}{2}$$

Como $\frac{1}{2} \in (0, 1)$, $\frac{1}{2}$ qualifica-se como c.

7. $f(x) = x^{2/3}$, $[0, 1]$; $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$

(i) f é contínua em toda parte, e então é contínua em $[0,1]$.

(ii) f é derivável em toda parte, exceto em 0. Assim, f é derivável em $(0,1)$.

Pelo teorema do valor médio, existe um número c em $(0,1)$, tal que

$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$; $\frac{2}{3c^{1/3}} = \frac{1 - 0}{1}$; $\frac{2}{3} = c^{1/3}$; $c = \frac{8}{27}$. Como $\frac{8}{27} \in (0, 1)$, $\frac{8}{27}$ qualifica-se como c.

9. $f(x) = \sqrt{1 + \cos x}$, $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$; $f'(x) = \dfrac{-\operatorname{sen} x}{2\sqrt{1 + \cos x}}$

(i) $1 + \cos x \geq 0$ em $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$. Assim, f é contínua em $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$.

(ii) $f'(x)$ existe para todo x em $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$. Assim, f é derivável em $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.

Pelo teorema do valor médio, existe um número c em $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(\frac{1}{2}\pi) - f(-\frac{1}{2}\pi)}{\frac{1}{2}\pi - (-\frac{1}{2}\pi)}; \quad \frac{-\operatorname{sen} c}{2\sqrt{1 + \cos c}} = \frac{1 - 1}{\pi}; \quad \frac{-\operatorname{sen} c}{2\sqrt{1 + \cos c}} = 0; \quad \operatorname{sen} c = 0; \quad c = 0$$

Como $0 \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, 0 qualifica-se como c.

11. $f(x) = x^{4/3} - 3x^{1/3}$, $[0, 3]$; $f'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3} - x^{-2/3}$

(b) (i) f é contínua em toda parte.

Assim, f é contínua em $[0,3]$.

(ii) f é derivável em qualquer número, exceto 0,

logo, f é derivável em $(0,3)$.

(iii) $f(0) = 0$ e $f(3) = 0$.

(c) Pelo Teorema de Rolle, existe um número c em $(0,3)$

tal que $f'(c) = 0$; isto é,

$$\tfrac{4}{3}c^{1/3} - c^{-2/3} = 0; \quad 4c - 3 = 0; \quad c = \tfrac{3}{4}$$

Assim, há uma reta tangente horizontal no ponto $(\frac{3}{4}, -\frac{9}{8}\sqrt[3]{6})$.

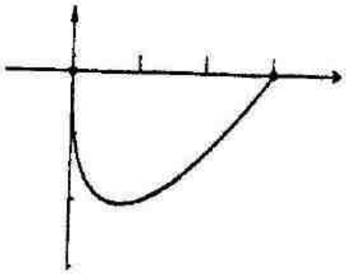


FIGURA 4.3-11

13. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 12}{x - 3}$, $[-3, 4]$

(b) Como $f(3)$ não existe,

f não é contínua em $[-3,4]$.

Assim, a condição (i) do Teorema de Rolle não está satisfeita.

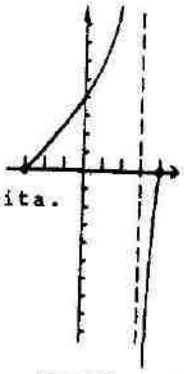


FIGURA 4.3-13

15. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x < 1 \\ 5x - 8 & \text{se } 1 \le x \end{cases}$, $[-2, \frac{8}{5}]$; $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 1 \\ 5 & \text{se } 1 < x \end{cases}$

(b) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 - 4) = -3$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (5x - 8) = -3$

Como $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, então $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -3 = f(1)$.

Assim, f é contínua em 1 e então, f é contínua em $[-2, \frac{8}{5}]$.

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 4 - (-3)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} (x + 1) = 2$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{5x - 8 - (-3)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{5x - 5}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{5(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} 5 = 5$$

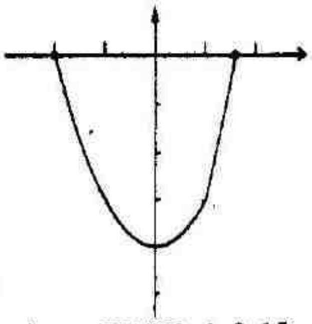


FIGURA 4.3-15

O cálculo alternativo para $f_-'(-1)$ e $f_+'(1)$,

usando a Nota após o Problema 33 é:

$f_-'(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 2x = 2$; $f_+'(1) = \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 5 = 5$

Como $f'_-(1) \ne f'_+(1)$, então $f'(1)$ não existe.

Portanto, f não é derivável em $(-2, \frac{8}{5})$. Assim, a condição (ii) do Teorema de Rolle não está satisfeita. Entretanto, $f'(0) = 0$.

17. $f(x) = x^2$, $a = 3$, $b = 5$; $f'(x) = 2x$

f é contínua e derivável em toda parte.

Portanto, o teorema do valor médio é válido para a=3 e b=5.

Assim, há um número c em (3,5), tal que

$$f'(c) = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3}; \quad 2c = \frac{25 - 9}{2}; \quad 4c = 16; \quad c = 4$$

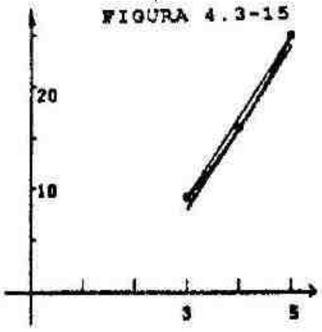


FIGURA 4.3-17

19. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = 0$, $b = \frac{1}{2}\pi$; $f'(x) = \cos x$

f é contínua e derivável em toda parte.

Portanto, o teorema do valor médio é válido para $a = 0$ e $b = \frac{1}{2}\pi$.

Assim, há um número c em $(0, \frac{1}{2}\pi)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(\frac{1}{2}\pi) - f(0)}{\frac{1}{2}\pi - 0}; \quad \cos c = \frac{1 - 0}{\frac{1}{2}\pi}; \quad \cos c = \frac{2}{\pi}; \quad c \approx 0,8807$$

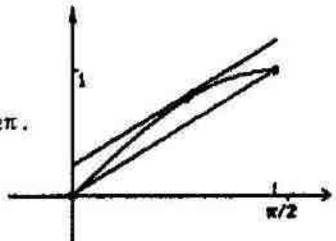


FIGURA 4.3-19

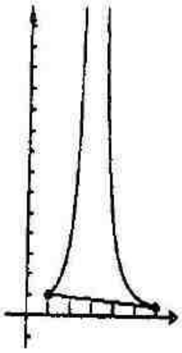


FIGURA 4.3-21

21. $f(x) = \frac{4}{(x-3)^2}$, $a = 1$, $b = 6$

f não está definida em 3.

Assim, f é descontínua em [1,6].

23. $f(x) = 3(x-4)^{2/3}$, $a = -4$, $b = 5$; $f'(x) = 2(x-4)^{-1/3}$

$$f'_-(4) = \lim_{x \to 4^-} \frac{3(x-4)^{2/3}}{x-4} = \lim_{x \to 4^-} \frac{3}{(x-4)^{1/3}} = -\infty;$$

$$f'_+(4) = \lim_{x \to 4^+} \frac{3(x-4)^{2/3}}{x-4} = \lim_{x \to 4^+} \frac{3}{(x-4)^{1/3}} = +\infty$$

Portanto, f não é derivável em 4;

logo, f não é derivável em (-4,5).

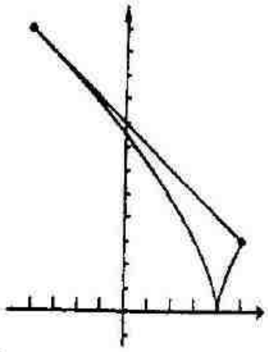


FIGURA 4.3-23

25. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x$; $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1$

Como f é uma função polinomial, f é contínua e derivável em toda parte; $f(0) = 0$ e $f(1) = 0$. Assim, o Teorema de Rolle é válido em [0,1]. Logo, há um número $c \in (0,1)$, tal que $f'(c) = 0$. Assim, há pelo menos uma raiz real da equação $4x^3 - 6x^2 + 4x - 1 = 0$ no intervalo aberto (0,1).

27. $f(x) = 4x^5 + 3x^3 + 3x - 2$; $f'(x) = 20x^4 + 9x^2 + 3$

$f(0) = -2$ e $f(1) = 8$. Como f é contínua em [0,1] e 0 está entre -2 e 8, $f(x_1) = 0$ para um número x_1 entre 0 e 1. Logo, x_1 é uma raiz da equação. Agora, suponhamos que a equação tenha outra raiz; chamaremos essa raiz de r. Então, $f(r) = 0$. Se $r < x_1$, consideremos o intervalo $[r, x_1]$ e se $r > x_1$, consideremos o intervalo $[x_1, r]$. Em qualquer caso, $f(r) = f(x_1) = 0$ e o Teorema de Rolle é válido. Portanto, há um número c entre r e x_1, tal que $f'(c) = 0$. Mas, $f'(x)$ é sempre maior ou igual a 3. Logo, nossa suposição leva a uma contradição. Portanto, a equação não pode ter outra raiz.

29. $s = t^2 - t + 4$, $t \in [0,3]$

Seja $f(t) = t^2 - t + 4$. Se v for a medida da velocidade instantânea em t unidades de tempo;

$$v = f'(t) = 2t - 1$$

Seja V.M. a medida da velocidade média sobre o intervalo [0,3]. Então,

$$V.M. = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{10 - 4}{3} = 2$$

Seja v = V.M. Então, $2t - 1 = 2$; $t = \frac{3}{2}$.

31. f é contínua em $[a,b]$ e $f'(x) = 1$ para todo x em (a,b). Tomamos x no intervalo $(a,b]$. Então, a hipótese do teorema do valor médio é satisfeita por f em $[a,x]$. Logo, há um número c em (a,x), tal que

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Mas, $f'(c)$, pois $a<c<x$. Portanto, se $\bar{x}$ estiver em $(a,b]$.

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 1; \quad f(x) = x - a + f(a)$$

A última equação também será válida se $x = a$. Logo, para todo x em $[a,b]$, $f(x) = x-a + f(a)$.

33. Suponhamos que $f(x)$ seja um polinômio do quinto grau, com seis raízes reais: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ e $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$. Como o grau de f é 5, o grau de f' é 4. Como f é um polinômio, f é contínua e derivável em toda parte. Como $f(x_1) = f(x_2) = 0$, pelo Teorema de Rolle há um número c_1 em (x_1, x_2) tal que $f'(c_1) = 0$. Como $f(x_2) = f(x_3) = 0$, há um número c_2 em (x_2, x_3) tal que $f'(c_2) = 0$. Continuando esse argumento, obtemos cinco números c_1, c_2, c_3, c_4, e c_5, $c_1 < c_2 < c_3 < c_4 < c_5$ tais que $f'(c_1) = f'(c_2) = f'(c_3) = f'(c_4) = f'(c_5) = 0$. Logo, f' é um polinômio do quarto grau, que tem cinco raízes reais. Isso contradiz a hipótese de que um polinômio do quarto grau tenha no máximo quatro raízes reais. Logo, a nossa suposição é falsa. Portanto, um polinômio do quinto grau tem no máximo cinco raízes reais.

Nota: Se f for contínua em um intervalo I contendo a, e $\lim_{x \to a} f'(x) = L$ então, $f'(a) = L$. O mesmo é verdadeiro para derivadas e limites laterais.

Prova: Se $x \neq a$ estiver em I, então a hipótese do teorema do valor médio estará satisfeita para $[x,a]$ ou $[a,x]$. Logo,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} f'(c) = \lim_{c \to a} f'(c) = L$$

já que c está entre x e a.

EXERCÍCIOS 4.4 Funções Crescentes e Decrescentes e o Teste da Derivada Primeira

1. $f(x) = x^2 - 4x - 1$; $f'(x) = 2x - 4$

Seja $f'(x)=0$ e obtemos o número crítico 2.

	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusão
$x < 2$		−	f é decrescente em $(-\infty, 2]$
$x = 2$	−5	0	f tem um valor mínimo relativo
$2 < x$		+	f é crescente em $[2, +\infty)$

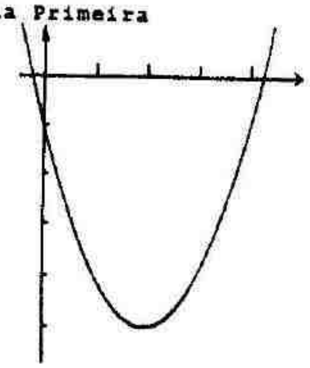


FIGURA 4.4-1

3. $f(x) = x^3 - x^2 - x$; $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$

Seja $f'(x) = 0$: $(3x + 1)(x - 1) = 0$; $x = -\frac{1}{3}$, $x = 1$

	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusão
$x < -\frac{1}{3}$		+	f é crescente em $(-\infty, -\frac{1}{3}]$
$x = -\frac{1}{3}$	$\frac{5}{27}$	0	f tem um valor máximo relativo
$-\frac{1}{3} < x < 1$		−	f é decrescente em $[-\frac{1}{3}, 1]$
$x = 1$	−1	0	f tem um valor mínimo relativo
$1 < x$		+	f é crescente em $[1, +\infty)$

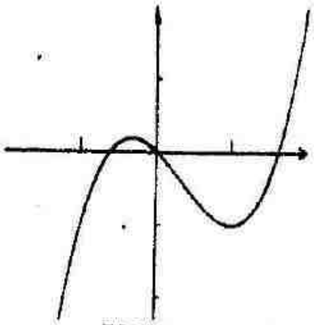


FIGURA 4.4-3

5. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 2$; $f'(x) = 6x^2 - 18x$

Seja $f'(x) = 0$: $6x(x - 3) = 0$; $x = 0$, $x = 3$

	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusão
$x < 0$		+	f é crescente em $(-\infty, 0]$
$x = 0$	2	0	f tem um valor máximo relativo
$0 < x < 3$		−	f é decrescente em $[0, 3]$
$x = 3$	−25	0	f tem um valor mínimo relativo
$3 < x$		+	f é crescente em $[3, +\infty)$

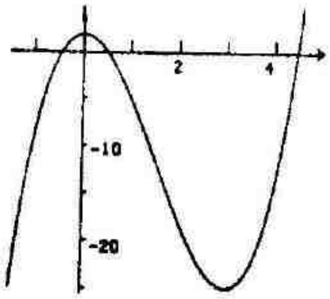


FIGURA 4.4-5

7. $f(x) = 4 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$; $f'(x) = 2 \cos \frac{1}{2}x$

Seja $f'(x) = 0$: $2 \cos \frac{1}{2}x = 0$; $\frac{1}{2}x = 0$ ou $\frac{1}{2}x = \frac{3}{2}\pi$; $x = 0$, $x = 3\pi$.

Como a função seno tem um período de 2π, f tem um período de 4π.

Assim, acrescentamos $4k\pi$ onde k é qualquer inteiro.

	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusão
$-\pi+4k\pi < x < \pi+4k\pi$		+	f é crescente em $[-\pi+4k\pi, \pi+4k\pi]$
$x = \pi+4k\pi$	4	0	f tem um valor máximo relativo
$\pi+4k\pi < x < 3\pi+4k\pi$		−	f é decrescente em $[\pi+4k\pi, 3\pi+4k\pi]$
$x = 3\pi+4k\pi$	−4	0	f tem um valor mínimo relativo
$3\pi+4k\pi < x < 5\pi+4k\pi$		+	f é crescente em $[3\pi+4k\pi, 5\pi+4k\pi]$

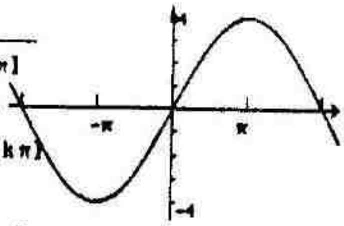


FIGURA 4.4-7

9. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2$; $f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

Seja $f'(x) = 0$: $x(x - 1)(x - 2) = 0$; $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$

	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusão
$x < 0$		$-$	f é decrescente em $(-\infty, 0]$
$x = 0$	0	0	f tem um valor mínimo relativo
$0 < x < 1$		$+$	f é crescente em $[0, 1]$
$x = 1$	$\frac{1}{4}$	0	f tem um valor máximo relativo
$1 < x < 2$		$-$	f é decrescente em $[1, 2]$
$x = 2$	0	0	f tem um valor mínimo relativo
$2 < x$		$+$	f é crescente em $[2, +\infty)$

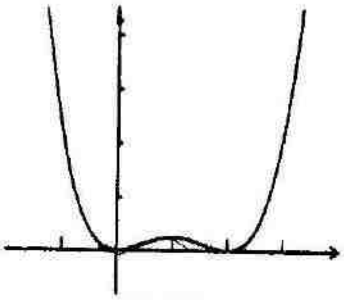


FIGURA 4.4-9

11. $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x + 1$; $f'(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

Seja $f'(x) = 0$: $(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$; $(x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2) = 0$;

$x = -1$, $x = 1$, $x = -2$, $x = 2$

	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusão
$x < -2$		$+$	f é crescente em $(-\infty, -2]$
$x = -2$	$-\frac{1}{15}$	0	f tem um valor máximo relativo
$-2 < x < -1$		$-$	f é decrescente em $[-2, -1]$
$x = -1$	$-\frac{23}{15}$	0	f tem um valor mínimo relativo
$-1 < x < 1$		$+$	f é crescente em $[-1, 1]$
$x = 1$	$\frac{53}{15}$	0	f tem um valor máximo relativo
$1 < x < 2$		$-$	f é decrescente em $[1, 2]$
$x = 2$	$\frac{31}{15}$	0	f tem um valor mínimo relativo
$2 < x$		$+$	f é crescente em $[2, +\infty)$

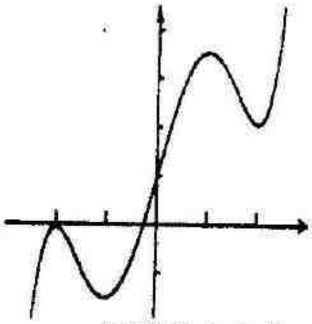


FIGURA 4.4-11

13. $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{1/2} - x^{-1/2}$; $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{2}x^{-3/2} = \frac{1}{2}x^{-3/2}(x + 1)$

Seja $f'(x) = 0$: $x = -1$. O domínio de f é $(0, +\infty)$ e $f'(x)$ existe para todo x no domínio de f. -1 não está no domínio, não há números críticos e não há extremos relativos.

	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusão
$0 < x$		$+$	f é crescente em $(0, +\infty)$

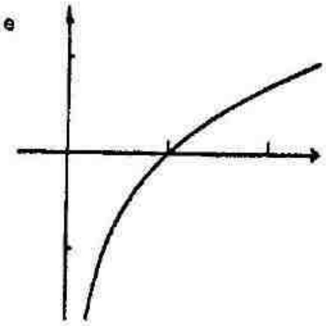


FIGURA 4.4-13

15. $f(x) = x + \frac{1}{x^2} = x + x^{-2}$; $f'(x) = 1 - 2x^{-3}$. Seja $f'(x) = 0$: $\frac{x^3 - 2}{x^3} = 0$; $x = \sqrt[3]{2}$

O domínio de f é $\{x \mid x \neq 0\}$, e $f'(x)$ existe para todo x em seu domínio.

O único número crítico é $\sqrt[3]{2} \approx 1,26$.

	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusão
$x < 0$		+	f é crescente em $(-\infty, 0)$
$x = 0$	não definida	não definida	assíntota vertical
$0 < x < \sqrt[3]{2}$		−	f é decrescente em $(0, \sqrt[3]{2}]$
$x = \sqrt[3]{2}$	$\frac{3}{2}\sqrt[3]{2} \approx 1,89$	0	f tem um valor mínimo relativo
$\sqrt[3]{2} < x$		+	f é crescente em $[\sqrt[3]{2}, +\infty)$

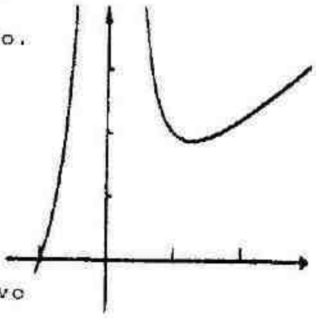


FIGURA 4.4-15

17. $f(x) = (1 - x)^2(1 + x)^3$. $f'(x) = -2(1 - x)(1 + x)^3 + 3(1 + x)^2(1 - x)^2$

$= (1 - x)(1 + x)^2[-2(1 + x) + 3(1 - x)] = (1 - x)(1 + x)^2(-5x + 1)$

Seja $f'(x) = 0$: $x = 1$, $x = -1$, $x = \frac{1}{5}$

	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusão
$x < -1$		+	{f é crescente em $(-\infty, -\frac{1}{5}]$
$x = -1$	0	0	não tem extremo relativo em $x = -1$
$-1 < x < \frac{1}{5}$		+	
$x = \frac{1}{5}$	$\frac{3456}{3.125}$	0	f tem um valor máximo relativo
$\frac{1}{5} < x < 1$		−	f é decrescente em $[\frac{1}{5}, 1]$
$x = 1$	0	0	f tem um valor mínimo relativo
$1 < x$		+	f é crescente em $[1, +\infty)$

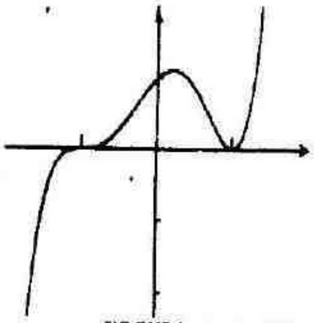


FIGURA 4.4-17

19. $f(x) = 2x\sqrt{3 - x}$; $f'(x) = 2\sqrt{3 - x} + 2x\left(-\frac{1}{2\sqrt{3 - x}}\right) = \frac{2(3 - x) - x}{\sqrt{3 - x}} = \frac{6 - 3x}{\sqrt{3 - x}}$

Seja $f'(x) = 0$: $6 - 3x = 0$; $x = 2$

	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusão
$x < 2$		+	f é crescente em $(-\infty, 2]$
$x = 2$	4	0	f tem um valor máximo relativo
$2 < x < 3$		−	f é decrescente em $[2, 3]$

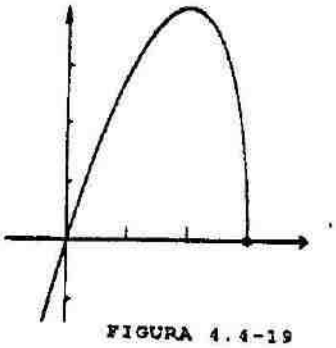


FIGURA 4.4-19

21. $f(x) = x - 3x^{1/3}$; $f'(x) = 1 - x^{-2/3}$. Seja $f'(x) = 0$: $x^{-2/3} = 1$; $x^{2/3} = 1$; $x^2 = 1$; $x = \pm 1$

$f'(x)$ não existe quando $x = 0$. Os números críticos de f são -1, 0 e 1.

	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusão
$x < -1$		+	f é crescente em $(-\infty, -1]$
$x = -1$	2	0	f tem um valor máximo relativo
$-1 < x < 0$		−	
$x = 0$	0	não existe	{f é decrescente em $[-1, 1]$ não tem extremo relativo em 0.
$0 < x < 1$		−	
$x = 1$	-2	0	f tem um valor mínimo relativo
$1 < x$		+	f é crescente

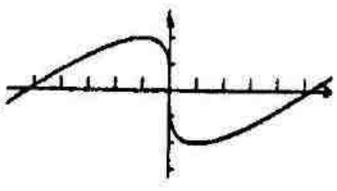


FIGURA 4.4-21

23. $f(x) = 2 - 3(x - 4)^{2/3}$; $f'(x) = -2(x - 4)^{-1/3}$.

$f'(x) \neq 0$ para algum valor de x.

$f'(4)$ não existe e 4 está no domínio de f.

Portanto, 4 é um número crítico.

	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusão
$x < 4$		+	f é crescente em $(-\infty, 4]$
$x = 4$	2	não existe	f tem um valor máximo relativo
$4 < x$		−	f é decrescente em $[4, +\infty)$

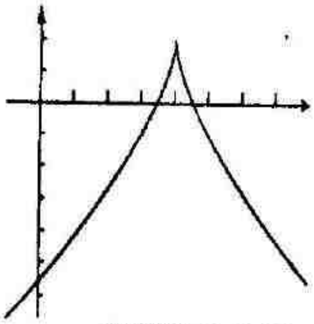


FIGURA 4.4-23

25. $f(x) = x^{2/3} - x^{1/3}$; $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} - \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3}x^{-2/3}(2x^{1/3} - 1)$

Seja $f'(x) = 0$: $2x^{1/3} = 1$; $x^{1/3} = \frac{1}{2}$; $x = \frac{1}{8}$

$f'(0)$ não existe e 0 está no domínio de f.

Os números críticos são 0 e $\frac{1}{8}$.

	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusão
$x < 0$		−	
$x = 0$	0	não existe	f é decrescente em $(-\infty, \frac{1}{8}]$; não tem extremo relativo em 0.
$0 < x < \frac{1}{8}$		−	
$x = \frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$	0	f tem um valor mínimo relativo
$\frac{1}{8} < x$		+	f é crescente em $[\frac{1}{8}, +\infty)$

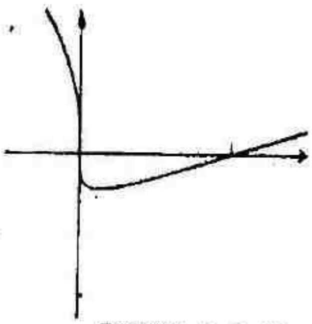


FIGURA 4.4-25

27. $f(x) = \frac{1}{2}\sec 4x$; $f'(x) = \frac{1}{2}\sec 4x \operatorname{tg} 4x(4) = 2\sec 4x \operatorname{tg} 4x$

Seja $f'(x) = 0$: $\operatorname{tg} 4x = 0$; $4x = 0$ ou $4x = \pi$; $x = 0$, $x = \frac{1}{4}\pi$.

Como a função secante tem um período de 2π, f tem um período de $\frac{1}{2}\pi$.

Assim, acrescentando $\frac{1}{2}k\pi$, onde k é qualquer inteiro.

	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusão
$x = \frac{1}{2}k\pi$	$\frac{1}{2}$	0	f tem um valor mínimo relativo
$\frac{1}{2}k\pi < x < \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{2}k\pi$		+	f é crescente
$x = \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{2}k\pi$	não definida	não definida	
$\frac{1}{8}\pi + \frac{1}{2}k\pi < x < \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$		+	f é crescente
$x = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$	$-\frac{1}{2}$	0	f tem um valor máximo relativo
$\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi < x < \frac{3}{8}\pi + \frac{1}{2}k\pi$		−	f é decrescente
$x = \frac{3}{8}\pi + \frac{1}{2}k\pi$	não definida	não definida	
$\frac{3}{8}\pi + \frac{1}{2}k\pi < x < \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}k\pi$		−	f é decrescente

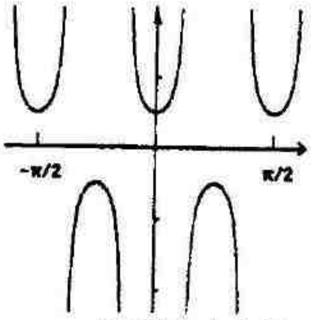


FIGURA 4.4-27

29. $f(x) = (x+1)^{2/3}(x-2)^{1/3}$. $f'(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{-1/3}(x-2)^{1/3} + \frac{1}{3}(x-2)^{-2/3}(x+1)^{2/3}$

$= \frac{1}{3}(x+1)^{-1/3}(x-2)^{-2/3}[2(x-2)+(x+1)] = (x+1)^{-1/3}(x-2)^{-2/3}(x-1)$

Seja $f'(x) = 0$: $x = 1$. $f'(-1)$ e $f'(2)$ não existe e -1 e 2 estão no domínio de f. Os números críticos de f são -1, 1 e 2.

	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusão
$x < -1$		+	f é crescente em $(-\infty, -1]$
$x = -1$	0	não existe	f tem um valor máximo relativo
$-1 < x < 1$		−	f é decrescente em $[-1, 1]$
$x = 1$	$-\sqrt[3]{4}$	0	f tem um valor mínimo relativo
$1 < x < 2$		+	
$x = 2$	0	não existe	f é crescente em $[1, +\infty)$; não tem extremo relativo em 2.
$2 < x$		+	

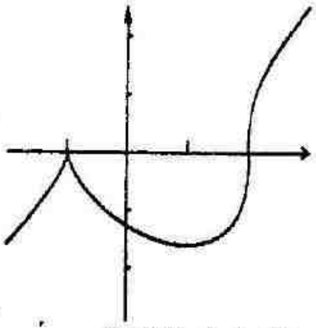


FIGURA 4.4-29

31. $f(x) = \begin{cases} 2x+9 & \text{se } x \le -2 \\ x^2+1 & \text{se } -2 < x \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < -2 \\ 2x & \text{se } -2 < x \end{cases}$

$f'_-(-2) = 2$ mas $f'_+(-2) = -4$. Então, $f'(-2)$ não existe.

Também, $f'(0) = 0$. Assim, -2 e 0 são os números críticos de f.

	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusão
$x < -2$		+	f é crescente em $(-\infty, -2]$
$x = -2$	5	não existe	f tem um valor máximo relativo
$-2 < x < 0$		−	f é decrescente em $[-2, 0]$
$x = 0$	1	0	f tem um valor mínimo relativo
$0 < x$		+	f é crescente em $[0, +\infty)$

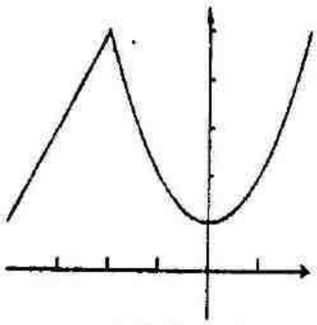


FIGURA 4.4-31

33. $f(x) = \begin{cases} 3x+5 & \text{se } x < -1 \\ x^2+1 & \text{se } -1 \le x < 2 \\ 7-x & \text{se } 2 \le x \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x < -1 \\ 2x & \text{se } -1 < x < 2 \\ -1 & \text{se } 2 < x \end{cases}$

$f'(-1)$ e $f'(2)$ não existem e $f'(0) = 0$.

Os números críticos de f são -1, 0, 2.

	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusão
$x < -1$		+	f é crescente em $(-\infty, -1]$
$x = -1$	2	não existe	f tem um valor máximo relativo
$-1 < x < 0$		−	f é decrescente em $[-1, 0]$
$x = 0$	1	0	f tem um valor mínimo relativo
$0 < x < 2$		+	f é crescente em $[0, 2]$
$x = 2$	5	não existe	f tem um valor máximo relativo
$2 < x$		−	f é decrescente em $[2, +\infty)$

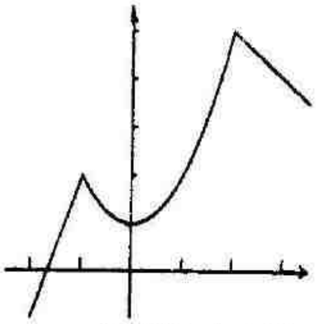


FIGURA 4.4-33

35. $f(x) = \begin{cases} (x+9)^2 - 8 & \text{se } x < -7 \\ -\sqrt{25-(x+4)^2} & \text{se } -7 \leq x \leq 0; \\ (x-2)^2 - 7 & \text{se } 0 < x \end{cases}$ $f'(x) = \begin{cases} 2(x+9) & \text{se } x < -7 \\ \dfrac{x+4}{\sqrt{25-(x+4)^2}} & \text{se } -7 < x < 0 \\ 2(x-2) & \text{se } 0 < x \end{cases}$

$f'(-7)$ e $f'(0)$ não existem. Assim, $f'(-9) = 0$, $f'(-4) = 0$, $f'(2) = 0$.

Os números críticos de f são -9, -7, -4, 0, e 2.

	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusão
$x < -9$		$-$	f é decrescente em $(-\infty, -9]$
$x = -9$	-8	0	f tem um valor mínimo relativo
$-9 < x < -7$		$+$	f é crescente em $[-9, -7]$
$x = -7$	-4	não existe	f tem um valor máximo relativo
$-7 < x < -4$		$-$	f é decrescente em $[-7, -4]$
$x = -4$	-5	0	f tem um valor mínimo relativo
$-4 < x < 0$		$+$	f é crescente em $[-4, 0]$
$x = 0$	-3	não existe	f tem um valor máximo relativo
$0 < x < 2$		$-$	f é decrescente em $[0, 2]$
$x = 2$	-7	0	f tem um valor mínimo relativo
$2 < x$		$+$	f é crescente em $[2, +\infty)$

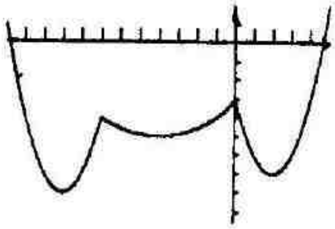


FIGURA 4.4-35

37. $f(x) = x^{5/4} + 10x^{1/4}$, $x \geq 0$; $f'(x) = \frac{5}{4}x^{1/4} + \frac{5}{2}x^{-3/4} = \frac{5}{4}x^{-3/4}(x+2)$

Seja $f'(x) = 0$ e obtemos $x = -2$. Então, -2 não está no domínio de f. Como $f'(0)$ não existe e 0 está no domínio de f, 0 é o número crítico de f.

	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusão
$x = 0$	0	não existe	f não tem extremo relativo
$0 < x$		$+$	f é crescente em $[0, +\infty)$

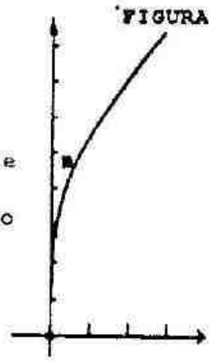


FIGURA 4.4-37

39. $f(x) = x^{1/3}(x+4)^{-2/3}$

$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}(x+4)^{-2/3} - \frac{2}{3}x^{1/3}(x+4)^{-5/3} = \frac{1}{3}x^{-2/3}(x+4)^{-5/3}(4-x)$

Seja $f'(x) = 0$ e obtemos $x=4$. Nem $f'(0)$ nem $f'(-4)$ existem, mas somente 0 está no domínio de f. Os números críticos de f são 0 e 4.

	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusão
$x < -4$		$-$	f é decrescente em $(-\infty, -4)$
$x = -4$	não existe	não existe	assíntota vertical
$-4 < x < 0$		$+$	
$x = 0$	0	não existe	{f é crescente em $(-4, 4]$ não tem extremo relativo em 0
$0 < x < 4$		$+$	
$x = 4$	$\frac{1}{4}\sqrt[3]{4}$	0	f tem um valor máximo relativo
$4 < x$		$-$	f é decrescente em $[4, +\infty)$

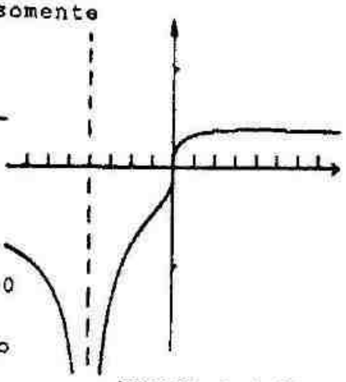


FIGURA 4.4-39

41. Se $f'(x) < 0$ para todo x em (a,b), então, $D_x[-f(x)] > 0$ para todo x em (a,b). Pela 1ª parte da prova, -f é crescente em [a,b] tal que f é decrescente em [a,b].

43. $f(x) = x^3 + ax^2 + b$; $f'(x) = 3x^2 + 2ax$

Pois f tem um extremo relativo em (2,3) e f'(2) existe, então

$$f'(2) = 0;\ 3(2)^2 + 2a(2) = 0;\ 4a = -12;\ a = -3$$

Pois (2,3) está no gráfico de f

$$f(2) = 3;\ 2^3 + a(2)^2 + b = 3;\ 8 + (-3)4 + b = 3;\ b = 7$$

45. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Pois f tem extremos relativos em (1,2) e (2,3) e f'(1) e f'(2) existem, então,

$f'(1) = 0$	$f'(2) = 0$	$f(1) = 2$	$f(2) = 3$
$3a\cdot 1^2 + 2b\cdot 1 + c = 0$	$3a\cdot 2^2 + 2b\cdot 2 + c = 0$	$a\cdot 1^3 + b\cdot 1^2 + c\cdot 1 + d = 2$	$a\cdot 2^3 + b\cdot 2^2 + c\cdot 2 + d = 3$
$3a + 2b + c = 0$	$12a + 4b + c = 0$	$a + b + c + d = 0$	$8a + 4b + 2c + d = 3$

Resolvendo essas quatro equações, simultaneamente, obtemos $a = -2$, $b = 9$, $c = -12$, e $d = 7$.

47. $f(x) = x^p(1-x)^q$, onde p e q são inteiros positivos.

$f'(x) = px^{p-1}(1-x)^q - qx^p(1-x)^{q-1} = x^{p-1}(1-x)^{q-1}[p(1-x) - qx] = x^{p-1}(1-x)^{q-1}[p - (p+q)x]$

(a) Se p for par, 0 será um número crítico e p -1 será ímpar. Portanto $x^{p-1} < 0$ para $x < 0$, e $x^{p-1} > 0$ para $x > 0$. Além disso, para x suficientemente próximo de $0, (1-x)^{q-1} > 0$ e $p - (p+q)x > 0$. Assim, f' mudará o sinal de "-" para "+" em x=0. Logo, pelo teste da derivada primeira f terá um valor mínimo relativo em 0.

(b) Se q for par, 1 será um número crítico e q-1 será ímpar, Portanto, $(1-x)^{q-1} > 0$ para $x<1$ e $(1-x)^{q-1} < 0$ para $x>1$. Além disso, para x suficientemente próximo de $1, x^{p-1} > 0$ e $p-(p+q)x < 0$. Assim, f' mudará o sinal de "-" para "+" em x=1. Logo, pelo teste da derivada primeira f terá um valor mínimo relativo em 1.

(c) Como p e q são positivos, $\frac{p}{p+q}$ será um número crítico e $0 < \frac{p}{p+q} < 1$. Para x em $(0,1)$, x^{p-1} e $(1-x)^{q-1}$ são positivos. Para $x < \frac{p}{p+q}$, $p-(p+q)x > 0$ e para $x > \frac{p}{p+q}$, $p-(p+q)x < 0$. Assim, f' mudará o sinal de "+" para "-" em $x = \frac{p}{p+q}$. Logo, pelo teste da derivada primeira f terá um valor máximo relativo em $x = \frac{p}{p+q}$.

49. $f(x) = x^k$, onde k é um inteiro positivo ímpar; $f'(x) = kx^{k-1}$

Já que $k \geq 1$ e $k-1$ é um inteiro par, f'(x) nunca será negativo. Pois, f'(x) nunca muda o sinal, f não tem extremos relativos.

51. (a) Para qualquer x_1 e x_2 em I tal que $x_1 < x_2$ então $f(x_1) < f(x_2)$ pois f é crescente. Mas, $f(x_1) < f(x_2)$ é equivalente a $-f(x_1) > -f(x_2)$ que estabelece que $g(x_1) > g(x_2)$ para $x_1 < x_2$ em I. Assim, g é decrescente em I.

(b) Para qualquer x_1 e x_2 em I tal que $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$. Como f(x) é positivo em I podemos dividir por $f(x1)\cdot f(x2)$ e manter a direção da desigualdade. (Isso é verdadeiro se f(x) for negativo em I). Então,

$$\frac{f(x_1)}{f(x_1)\cdot f(x_2)} < \frac{f(x_2)}{f(x_1)\cdot f(x_2)} \quad \text{que é equivalente a} \quad \frac{1}{f(x_2)} < \frac{1}{f(x_1)}$$

que estabelece que $h(x_2) < h(x_1)$ para $x_1 < x_2$ em I. Então, h é decrescente em I.

EXERCÍCIOS 4.5 Concavidade e Pontos de Inflexão

1. $f(x) = x^3 + 9x$; $f'(x) = 3x^2 + 9$; $f''(x) = 6x$

Seja $f''(x) = 0$: $6x = 0$; $x = 0$

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$x < 0$		+	−	o gráfico é côncavo para baixo
$x = 0$	0	9	0	ponto de inflexão
$0 < x$		+	+	o gráfico é côncavo para cima

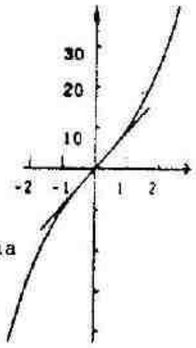


FIGURA 4.5-1

3. $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$; $g'(x) = 6x^2 + 6x - 12$;

$g''(x) = 12x + 6 = 12(x + \frac{1}{2})$. Seja $g''(x) = 0$: $x = -\frac{1}{2}$

	$g(x)$	$g'(x)$	$g''(x)$	Conclusão
$x < -\frac{1}{2}$			−	o gráfico é côncavo para baixo
$x = -\frac{1}{2}$	$-\frac{15}{2}$	$-\frac{27}{2}$	0	ponto de inflexão
$-\frac{1}{2} < x$			+	o gráfico é côncavo para cima

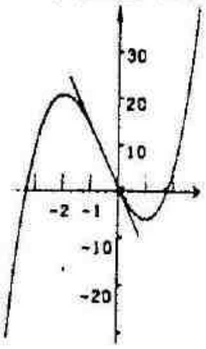


FIGURA 4.5-3

5. $F(x) = x^4 - 8x^3$; $F'(x) = 4x^3 - 24x^2$; $F''(x) = 12x^2 - 48x = 12x(x - 4)$

Seja $F''(x) = 0$: $x = 0$, $x = 4$

	$F(x)$	$F'(x)$	$F''(x)$	Conclusão
$x < 0$			+	o gráfico é côncavo para cima
$x = 0$	0	0	0	ponto de inflexão
$0 < x < 4$			−	o gráfico é côncavo para baixo
$x = 4$	−256	−128	0	ponto de inflexão
$4 < x$			+	o gráfico é côncavo para cima

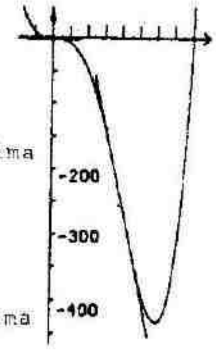


FIGURA 4.5-5

7. $g(x) = (x - 1)^3$; $g'(x) = 3(x - 1)^2$; $g''(x) = 6(x - 1)$

Seja $g''(x) = 0$: $x = 1$

	$g(x)$	$g'(x)$	$g''(x)$	Conclusão
$x < 1$			−	o gráfico é côncavo para baixo
$x = 1$	0	0	0	ponto de inflexão
$1 < x$			+	o gráfico é côncavo para cima

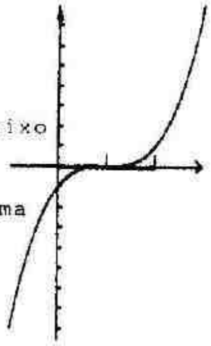


FIGURA 4.5-7

9. $f(x) = (x+2)^{1/3}$; $f'(x) = \frac{1}{3}(x+2)^{-2/3}$; $f''(x) = -\frac{2}{9}(x+2)^{-5/3}$.

$f''(x)$ nunca é 0; $f''(-2)$ não existe e f é contínua em -2

e $\lim_{x \to -2} f'(x) = +\infty$; logo, há uma reta tangente vertical em $x = -2$.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$x < -2$			+	o gráfico é côncavo para cima
$x = -2$	0	não existe	não existe	ponto de inflexão
$-2 < x$			−	o gráfico é côncavo para baixo

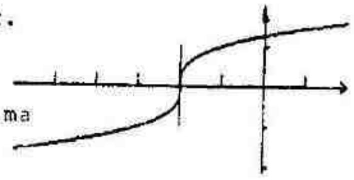


FIGURA 4.5-9

11. $G(x) = 2(x^2+3)^{-1}$; $G'(x) = -4x(x^2+3)^{-2}$

$G''(x) = -4(x^2+3)^{-2} + 8x(x^2+3)^{-3}(2x) = 4(x^2+3)^{-3}[-(x^2+3) + 4x^2]$

$= 4(x^2+3)^{-3}(3x^2-3) = 12(x^2+3)^{-3}(x+1)(x-1)$

Seja $G''(x) = 0$: $x = -1$, $x = 1$

	$G(x)$	$G'(x)$	$G''(x)$	Conclusão
$x < -1$			+	o gráfico é côncavo p/ cima
$x = -1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	ponto de inflexão
$-1 < x < 1$			−	o gráfico é côncavo p/ baixo
$x = 1$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	ponto de inflexão
$1 < x$			+	o gráfico é côncavo para cima

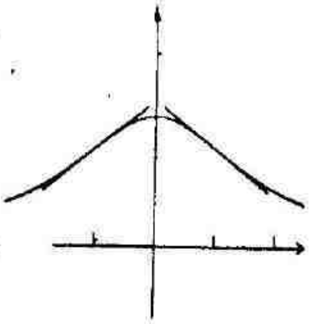


FIGURA 4.5-11

13. $g(x) = 2 \operatorname{sen} 3x$, $x \in [-\pi, \pi]$; $g'(x) = 6 \cos 3x$; $g''(x) = -18 \operatorname{sen} 3x$

Seja $g''(x) = 0$: $\operatorname{sen} 3x = 0$, $3x \in [-3\pi, 3\pi]$

$3x = -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi$; $x = -\pi, -\frac{2}{3}\pi, -\frac{1}{3}\pi, 0, \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \pi$

	$g(x)$	$g'(x)$	$g''(x)$	Conclusão
$x = -\pi$	0	−6	0	
$-\pi < x < -\frac{2}{3}\pi$			+	o gráfico é côncavo para cima
$x = -\frac{2}{3}\pi$	0	6	0	ponto de inflexão
$-\frac{2}{3}\pi < x < -\frac{1}{3}\pi$			−	o gráfico é côncavo para baixo
$x = -\frac{1}{3}\pi$	0	−6	0	ponto de inflexão
$-\frac{1}{3}\pi < x < 0$			+	o gráfico é côncavo para cima
$x = 0$	0	6	0	ponto de inflexão
$0 < x < \frac{1}{3}\pi$			−	o gráfico é côncavo para baixo
$x = \frac{1}{3}\pi$	0	−6	0	ponto de inflexão
$\frac{1}{3}\pi < x < \frac{2}{3}\pi$			+	o gráfico é côncavo p/ cima
$x = \frac{2}{3}\pi$	0	6	0	ponto de inflexão
$\frac{2}{3}\pi < x < \pi$			−	o gráfico é côncavo para baixo
$x = \pi$	0	−6	0	

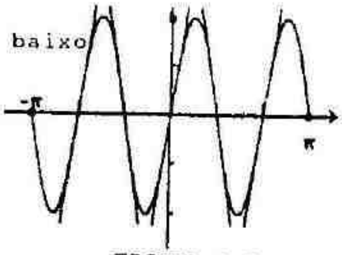


FIGURA 4.5-13

15. $f(x) = \text{tg}\, \frac{1}{2}x$, $x \in (-\pi, \pi)$; $f'(x) = \frac{1}{2}\sec^2 \frac{1}{2}x$; $f''(x) = \frac{1}{2}\sec^2 \frac{1}{2}x \;\; \text{tg}\, \frac{1}{2}x$

Seja $f''(x) = 0$: $\text{tg}\, \frac{1}{2}x = 0$, $\frac{1}{2}x \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$; $\frac{1}{2}x = 0$; $x = 0$

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$-\pi < x < 0$			$-$	o gráfico é côncavo p/ baixo
$x = 0$	0	$\frac{1}{2}$	0	ponto de inflexão
$0 < x < \pi$			$+$	o gráfico é côncavo para cima

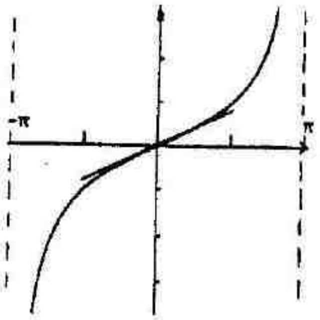


FIGURA 4.5-15

17. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x < 2 \\ 7 - x^2 & \text{se } 2 \leq x \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 2 \\ -2x & \text{se } 2 < x \end{cases}$; $f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < 2 \\ -2 & \text{se } 2 < x \end{cases}$

$f''(x)$ nunca é 0; $f' (2)$ não existe;

logo, não há reta tangente nesse ponto.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$x < 2$			$+$	o gráfico é côncavo para cima
$x = 2$	3	não existe	não existe	não é um ponto de inflexão
$2 < x$			$-$	o gráfico é côncavo para baixo

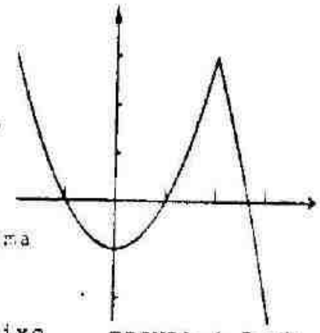


FIGURA 4.5-17

19. $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ -x^2 & \text{se } 0 < x \end{cases}$; $g'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq 0 \\ -2x & \text{se } 0 < x \end{cases}$; $g''(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < 0 \\ -2 & \text{se } 0 < x \end{cases}$

$g''(x)$ nunca é 0; $g''(0)$ não existe;

mas, há uma reta tangente em 0.

	$g(x)$	$g'(x)$	$g''(x)$	Conclusão
$x < 0$			$+$	o gráfico é côncavo para cima
$x = 0$	0	0	não existe	ponto de inflexão
$0 < x$			$-$	o gráfico é côncavo para baixo

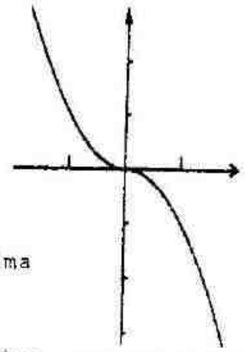


FIGURA 4.5-19

21. $F(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x < 0 \\ x^4 & \text{se } 0 \leq x \end{cases}$; $F'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } x < 0 \\ 4x^3 & \text{se } 0 \leq x \end{cases}$; $F''(x) = \begin{cases} 6x & \text{se } x < 0 \\ 12x^2 & \text{se } 0 \leq x \end{cases}$

Seja $F''(x) = 0$: $12x^2 = 0$; $x = 0$

	$F(x)$	$F'(x)$	$F''(x)$	Conclusão
$x < 0$			$-$	o gráfico é côncavo para baixo
$x = 0$	0	0	0	ponto de inflexão
$0 < x$			$+$	o gráfico é côncavo para cima

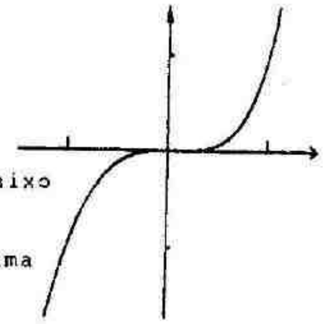


FIGURA 4.5-21

23. $f(x) = (x-2)^{1/5} + 3$; $f'(x) = \frac{1}{5}(x-2)^{-4/5}$; $f''(x) = -\frac{4}{25}(x-2)^{-9/5}$.
$f''(x)$ nunca é 0. $f''(2)$ não existe, mas f é contínua em 2
e $\lim_{x \to 2} f'(x) = +\infty$ logo, há uma reta tangente vertical em 2.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$x < 2$			+	o gráfico é côncavo p/cima
$x = 2$	3	não existe	não existe	ponto de inflexão
$2 < x$			−	o gráfico é côncavo para baixo

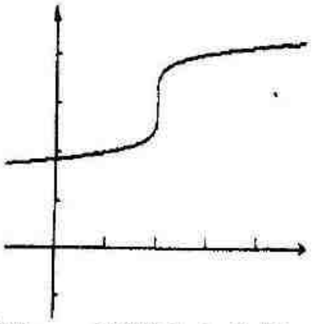


FIGURA 4.5-23

25. $f(x) = ax^3 + bx^2$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$; $f''(x) = 6ax + 2b$
Como f é um polinômio, $f'(x)$ e $f''(x)$ existem em toda parte. Se f tem um ponto de inflexão em (1,2), então, $f(1) = 2$ e $f''(1) = 0$, isto é, $a+b = 2$ e $6a+2b = 0$. Resolvendo essas duas equações simultaneamente, obtemos $a = -1$ e $b = 3$.

27. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$
Como f é um polinômio, $f'(x)$ e $f''(x)$ existem em toda parte. Como f tem um extremo relativo em (0,3), $f(0) = 3$ e $f'(0) = 0$. Então, $d = 3$ e $c = 0$. Como o gráfico de f tem um ponto de inflexão em (1,−1), $f(1) = -1$ e $f''(1) = 0$. Portanto, $a+b+3 = 0$ e $6a+2b = 0$. Resolvendo essas equações simultaneamente temos $a = 2$, $b = -6$, $c = 0$, $d = 3$.

29. $f(x) = \cos x$; $f'(x) = -\operatorname{sen} x$; $f''(x) = -\cos x$
(a) Seja $f''(x) = 0$: $-\cos x = 0$; $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$, onde k é um inteiro qualquer. Cada x resulta um ponto de inflexão, pois $f''(x)$ muda de sinal.
(b) A inclinação da tangente de inflexão é $f'(\frac{1}{2}\pi + k\pi) = -\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\pi + k\pi)$ que será −1 se k for par e +1 se k for ímpar.

31. $f(x) = \operatorname{cotg} x$; $f'(x) = -\operatorname{cosec}^2 x$; $f''(x) = 2\operatorname{cosec}^2 x \operatorname{cotg} x$
(a) Seja $f''(x) = 0$: $\operatorname{cotg} x = 0$; $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$, onde k seja um inteiro qualquer. Cada x dá um ponto de inflexão, pois $f''(x)$ muda de sinal.
(b) A inclinação da tangente de inflexão é $f'(\frac{1}{2}\pi + k\pi) = -\operatorname{cosec}^2(\frac{1}{2}\pi + k\pi) = -1$.

Esboços dos gráficos dos Exercícios de 33 a 47 aparecem nas Figs. 4.5-33 a 4.5-47, no texto.

49. $f(x) = x^5$; $f'(x) = 5x^4$; $f''(x) = 20x^3$
Como $f'(x) \geq 0$, f não tem extremos relativos.
Como $f''(x) < 0$ se $x < 0$ e $f''(x) > 0$ se $x > 0$ e há uma reta tangente em $x = 0$, então, a origem é um ponto de inflexão.

51. Um trabalhador pode pintar y molduras, x horas após iniciar o trabalho, às 8 h e

$$y(x) = 3x + 8x^2 - x^3,\ 0 \leq x \leq 4;\quad y'(x) = 3 + 16 - 3x^2;\quad y''(x) = 16 - 6x$$

Seja $y''(x) = 0$: $x = \frac{8}{3}$

	$y''(x)$	Conclusão
$0 < x < \frac{8}{3}$	+	y' é crescente e o trabalhador está pintando a uma taxa crescente
$x = \frac{8}{3}$	0	O trabalhador está produzindo com maior eficiência
$\frac{8}{3} < x < 4$	−	y' é decrescente e o trabalhador está pintando a uma taxa decrescente

Qdo $x = \frac{8}{3}$, o tempo é 2h e 40 min após as 8 h. Portanto, o trabalhador está produzindo com maior eficiência às 10:40 h.

EXERCÍCIOS 4.6 O Teste da Derivada Segunda para Extremos Relativos

1. $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$; $f'(x) = 6x - 2$; $f''(x) = 6$

O único número crítico de f é $\frac{1}{3}$; pelo teste da derivada segunda, f tem um valor mínimo relativo em $\frac{1}{3}$.

$f''(x)$ é sempre positivo; logo, f não possui pontos de inflexão e o gráfico é côncavo para cima em toda parte.

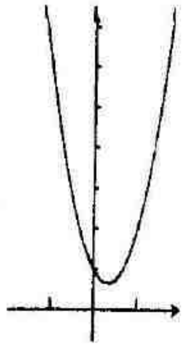


FIGURA 4.6-1

3. $f(x) = -4x^3 + 3x^2 + 18x$; $f'(x) = -12x^2 + 6x + 18 = -6(2x - 3)(x + 1)$;

$f''(x) = -24x + 6 = -24(x - \frac{1}{4})$

Seja $f'(x) = 0$: $x = \frac{3}{2}$, $x = -1$. Seja $f''(x) = 0$: $x = \frac{1}{4}$.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$x < -1$			+	o gráfico é côncavo para cima
$x = -1$	-11	0	+	f tem um valor mínimo relativo
$-1 < x < \frac{1}{4}$			+	o gráfico é côncavo para cima
$x = \frac{1}{4}$	$\frac{37}{8}$		0	ponto de inflexão
$\frac{1}{4} < x < \frac{3}{2}$			−	o gráfico é côncavo para baixo
$x = \frac{3}{2}$	$\frac{81}{4}$	0	−	f tem um valor máximo relativo
$\frac{3}{2} < x$			−	o gráfico é côncavo para baixo

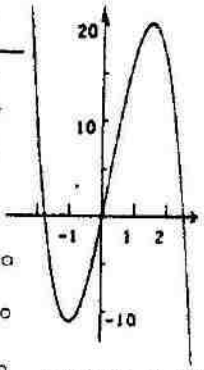


FIGURA 4.6-3

5. $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3$; $g'(x) = x^2 - 2x = x(x - 2)$; $g''(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$

Seja $g'(x) = 0$: $x = 0$, $x = 2$. Seja $g''(x) = 0$: $x = 1$

	$g(x)$	$g'(x)$	$g''(x)$	Conclusão
$x < 0$			−	o gráfico é côncavo para baixo
$x = 0$	3	0	−	g tem um valor máximo relativo
$0 < x < 1$			−	o gráfico é côncavo para baixo
$x = 1$	$\frac{7}{3}$		0	ponto de inflexão
$1 < x < 2$			+	o gráfico é côncavo para cima
$x = 2$	$\frac{5}{3}$	0	+	g tem um valor mínimo relativo
$2 < x$			+	o gráfico é côncavo para cima

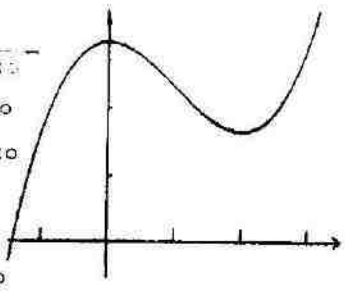


FIGURA 4.6-5

7. $f(z) = (4 - z)^4$; $f'(z) = -4(4 - z)^3$; $f''(z) = 12(4 - z)^2$

$f'(4) = 0$ mas $f''(4) = 0$ logo, o teste da derivada segunda falha.

	$f(z)$	$f'(z)$	$f''(z)$	Conclusão
$z < 4$		−	+	o gráfico é côncavo para cima
$z = 4$	0	0	0	f tem um valor mínimo relativo não há ponto de inflexão
$4 < z$		+	+	o gráfico é côncavo para cima

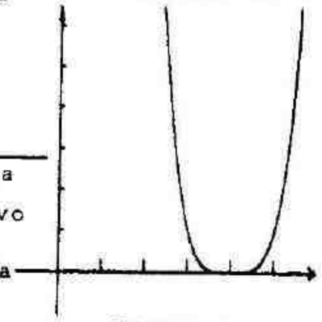


FIGURA 4.6-7

9. $h(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$; $h'(x) = 4x^3 - x^2 - 3x = x(4x+3)(x-1)$; $h''(x) = 12x^2 - 2x - 3$

Seja $h'(x) = 0$: $x = 0$, $x = -\frac{3}{4}$, $x = 1$. Seja $h''(x) = 0$: $x = x_1 = \frac{1-\sqrt{37}}{12} \approx -0,42$, $x = x_2 = \frac{1+\sqrt{37}}{12} \approx 0,59$

	$h(x)$	$h'(x)$	$h''(x)$	Conclusão
$x < -\frac{3}{4}$			+	o gráfico é côncavo para cima
$x = -\frac{3}{4}$	$-\frac{99}{256}$	0	+	h tem um valor mínimo relativo
$-\frac{3}{4} < x < x_1$			+	o gráfico é côncavo para cima
$x = x_1$			0	ponto de inflexão
$x_1 < x < 0$			−	o gráfico é côncavo para baixo
$x = 0$	0	0	−	h tem um valor máximo relativo
$0 < x < x_2$			−	o gráfico é côncavo para baixo
$x = x_2$			0	ponto de inflexão
$x_2 < x < 1$			+	o gráfico é côncavo para cima
$x = 1$	$-\frac{5}{6}$	0	+	h tem um valor mínimo relativo
$1 < x$			+	o gráfico é côncavo para cima

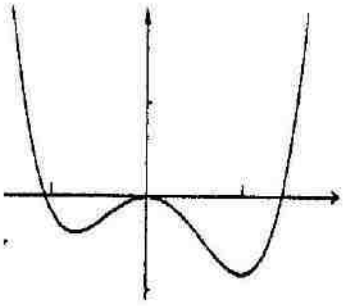


FIGURA 4.6-9

11. $F(x) = \cos 3x$, $x \in [-\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, $3x \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$; $F'(x) = -3 \operatorname{sen} 3x$; $F''(x) = -9 \cos 3x$

Seja $F'(x) = 0$: $3x = 0$, π; $x = 0, \frac{1}{3}\pi$. Seja $F''(x) = 0$: $3x = -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$; $x = -\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi$

	$F(x)$	$F'(x)$	$F''(x)$	Conclusão
$x = -\frac{1}{6}\pi$	0		0	
$-\frac{1}{6}\pi < x < 0$			−	o gráfico é côncavo para baixo
$x = 0$	1	0	−	F tem um valor máximo relativo
$0 < x < \frac{1}{6}\pi$			−	o gráfico é côncavo para baixo
$x = \frac{1}{6}\pi$	0		0	ponto de inflexão
$\frac{1}{6}\pi < x < \frac{1}{3}\pi$			+	o gráfico é côncavo para cima
$x = \frac{1}{3}\pi$	−1	0	+	F tem um valor mínimo relativo
$\frac{1}{3}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$			+	o gráfico é côncavo para cima
$x = \frac{1}{2}\pi$	0		0	

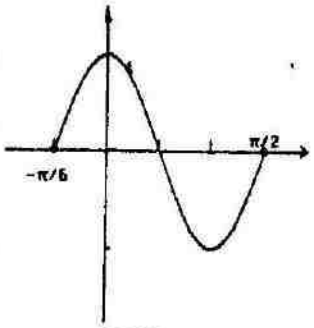


FIGURA 4.6-11

13. $f(x) = x(x+2)^3$; $f'(x) = (x+2)^3 + 3x(x+2)^2 = (x+2)^2(4x+2)$

$f''(x) = 2(x+2)(4x+2) + (x+2)^2(4) = 12(x+1)(x+2)$

Seja $f'(x) = 0$: $x = -2$, $x = -\frac{1}{2}$. Seja $f''(x) = 0$: $x = -1$, $x = -2$

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$x < -2$		−	+	o gráfico é côncavo para cima
$x = -2$	0	0	0	não tem extremo relativo ponto de inflexão
$-2 < x < -1$		−	−	o gráfico é côncavo para baixo
$x = -1$	−1		0	ponto de inflexão
$-1 < x < -\frac{1}{2}$			+	o gráfico é côncavo para cima
$x = -\frac{1}{2}$	$-\frac{27}{16}$	0	+	f tem um valor mínimo relativo
$-\frac{1}{2} < x$			+	o gráfico é côncavo para cima

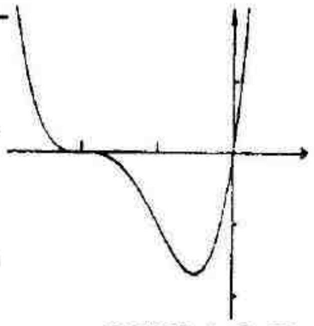


FIGURA 4.6-13

15. $f(x) = 4x^{1/2} + 4x^{-1/2}$; $f'(x) = 2x^{-1/2} - 2x^{-3/2}$

$f''(x) = -x^{-3/2} + 3x^{-5/2} = x^{-5/2}(3 - x)$

$f'(1) = 0$; $f''(3) = 0$. $f'(0)$ e $f''(0)$ não existe

mas 0 não está no domínio de f.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$0 < x < 1$	0		+	o gráfico é côncavo para cima
$x = 1$	8	0	+	f tem um valor mínimo relativo
$1 < x < 3$			+	o gráfico é côncavo para cima
$x = 3$	$\frac{16}{3}\sqrt{3}$		0	ponto de inflexão
$3 < x$			−	o gráfico é côncavo para baixo

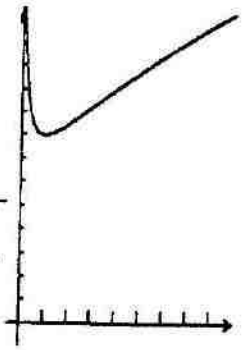


FIGURA 4.6-15

17. $h(x) = x\sqrt{x + 3}$; $h'(x) = (x + 3)^{1/2} + \frac{1}{2}x(x + 3)^{-1/2} = (x + 3)^{-1/2}(\frac{3}{2}x + 3)$

$h''(x) = -\frac{1}{2}(x + 3)^{-3/2}(\frac{3}{2}x + 3) + (x + 3)^{-1/2}(\frac{3}{2}) = (x + 3)^{-3/2}(\frac{3}{4}x + 3)$

Seja $h'(x) = 0$: $x = -2$. Seja $h''(x) = 0$: $\frac{3}{4}x + 3 = 0$; $x = -4$.

Mas −4 não está no domínio de h. Ou então,

$h(x) = (x + 3)^{3/2} - 3(x + 3)^{1/2}$; $h'(x) = \frac{3}{2}(x + 3)^{1/2} - \frac{3}{2}(x + 3)^{-1/2}$

$h''(x) = \frac{3}{4}(x + 3)^{-1/2} + \frac{3}{4}(x + 3)^{-3/2} \geq 0$.

	$h(x)$	$h'(x)$	$h''(x)$	Conclusão
$x = -3$	0	não existe	não existe	
$-3 < x < -2$			+	o gráfico é côncavo para cima
$x = -2$	−2	0	$\frac{3}{2}$	h tem um valor mínimo relativo
$-2 < x$			+	o gráfico é côncavo para cima

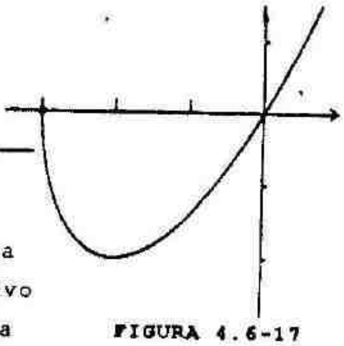


FIGURA 4.6-17

19. $F(x) = 6x^{1/3} - x^{2/3}$; $F'(x) = 2x^{-2/3} - \frac{2}{3}x^{-1/3} = 2x^{-2/3}(1 - \frac{1}{3}x^{1/3})$

$F''(x) = -\frac{4}{3}x^{-5/3} + \frac{2}{9}x^{-4/3} = \frac{2}{9}x^{-5/3}(x^{1/3} - 6)$

$F'(27) = 0$. $F''(216) = 0$. $F'(0)$ e $F''(0)$ não existem; logo, o teste da derivada segunda não se aplica. F é contínua em 0 e $\lim_{x \to 0} F'(x) = +\infty$ então, há uma reta tangente vertical na origem.

	$F(x)$	$F'(x)$	$F''(x)$	Conclusão
$x < 0$		+	+	o gráfico é côncavo para cima
$x = 0$	0	não existe	não existe	F não tem extremo relativo; ponto de inflexão
$0 < x < 27$		+	−	o gráfico é côncavo para baixo
$x = 27$	9	0	−	F tem um valor máximo relativo
$27 < x < 216$			−	o gráfico é côncavo para baixo
$x = 216$	0		0	ponto de inflexão
$216 < x$			+	o gráfico é côncavo para cima

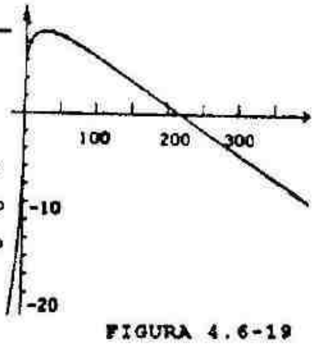


FIGURA 4.6-19

21. $f(x) = 5x^3 - 3x^5$; $f'(x) = 15x^2 - 15x^4 = 15x^2(1 - x^2)$; $f''(x) = 30x - 60x^3 = 30x(1 - 2x^2)$

Seja $f'(x) = 0$: $x = 0,\ 1,\ -1$. Seja $f''(x) = 0$: $x = 0,\ \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

O teste da derivada segunda falha em 0.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$x < -1$			+	o gráfico é côncavo para cima
$x = -1$	-2	0	+	f tem um valor mínimo relativo
$-1 < x < -\frac{1}{2}\sqrt{2}$			+	o gráfico é côncavo para cima
$x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$			0	ponto de inflexão
$-\frac{1}{2}\sqrt{2} < x < 0$		+	−	o gráfico é côncavo para baixo
$x = 0$	0	0	0	f não tem extremo relativo ponto de inflexão
$0 < x < \frac{1}{2}\sqrt{2}$		+	+	o gráfico é côncavo para cima
$x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$			0	ponto de inflexão
$\frac{1}{2}\sqrt{2} < x < 1$			−	o gráfico é côncavo para baixo
$x = 1$	2	0	−	f tem um valor máximo relativo
$1 < x$			−	o gráfico é côncavo para baixo

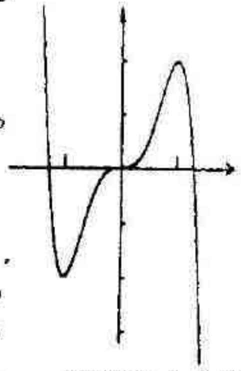


FIGURA 4.6-21

23. $f(x) = tg^2 x$, $x \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$; $f'(x) = 2\ tg\ x \sec^2 x = 2(tg^3 x + tg\ x)$;

$f''(x) = 2(3\ tg^2 x + 1)\sec^2 x$

Seja $f'(x) = 0$: $x = 0$. $f''(x)$ nunca é 0.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$x < 0$			+	o gráfico é côncavo p/ cima
$x = 0$	0	0	+	f tem um valor mín. relativo
$0 < x$			+	o gráfico é côncavo p/ cima

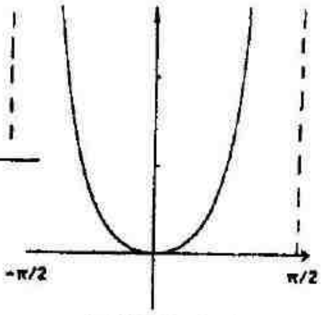


FIGURA 4.6-23

25. $g(x) = x + \cos x$, $x \in [-2\pi, 2\pi]$; $g'(x) = 1 - \text{sen}\ x \geq 0$; $g''(x) = -\cos x$

Seja $g'(x) = 0$: $x = -\frac{3}{2}\pi$, $x = \frac{1}{2}\pi$. Seja $g''(x) = 0$: $x = \pm\frac{1}{2}\pi,\ \pm\frac{3}{2}\pi$.

O teste da derivada segunda falha;

g' nunca muda de sinal; logo, g não tem extremos relativos.

	$g(x)$	$g'(x)$	$g''(x)$	Conclusão
$x < -\frac{3}{2}\pi$		+	−	o gráfico é côncavo para baixo
$x = -\frac{3}{2}\pi$	$-\frac{3}{2}\pi$	0	0	ponto de inflexão
$-\frac{3}{2}\pi < x < -\frac{1}{2}\pi$		+	+	o gráfico é côncavo para cima
$x = -\frac{1}{2}\pi$	$-\frac{1}{2}\pi$		0	ponto de inflexão
$-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$		+	−	o gráfico é côncavo para baixo
$x = \frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	0	0	ponto de inflexão
$\frac{1}{2}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$		+	+	o gráfico é côncavo para cima
$x = \frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$		0	ponto de inflexão
$\frac{3}{2}\pi < x$			−	o gráfico é côncavo para baixo

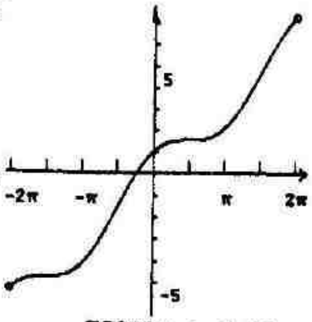


FIGURA 4.6-25

27. $f(x) = \cos x$; $f'(x) = -\operatorname{sen} x$; $f''(x) = -\cos x$. $f'(k\pi) = 0$ onde k é qualquer inteiro.

Se k for um inteiro par e $x = k\pi$, então, $f''(x) = -1$, logo, f tem um valor máximo relativo.

Se k for um inteiro ímpar e $x = k\pi$, então, $f''(x) = 1$, logo, f tem um valor mínimo relativo.

29. $f(x) = \operatorname{cosec} x$; $f'(x) = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$; $f''(x) = \operatorname{cosec} x\ (2 \operatorname{cosec}^2 x - 1)$

$f'(\frac{1}{2}\pi + k\pi) = 0$ onde k é um inteiro qualquer.

Se k for um inteiro par e $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$, então, $f''(x) = 1$ logo, f tem um valor mínimo relativo.

Se k for um inteiro ímpar e $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$, então, $f''(x) = -1$ logo, f tem um valor máximo relativo.

Os gráficos dos Exercícios de 31 a 41 aparecem nas Figs. 4.6-31 a 4.6-41.

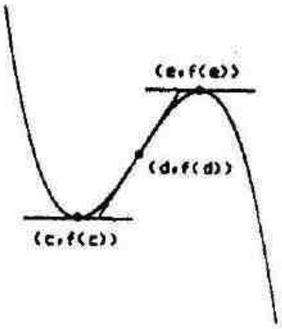


FIGURA 4.6-31

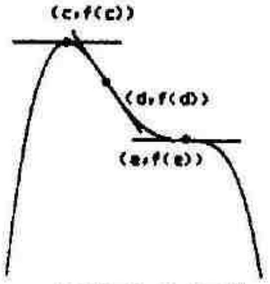


FIGURA 4.6-33

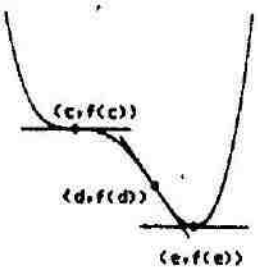


FIGURA 4.6-35

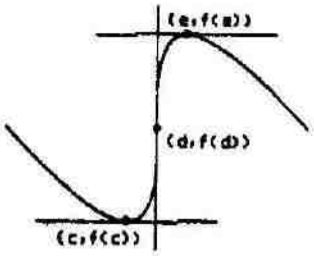


FIGURA 4.6-37

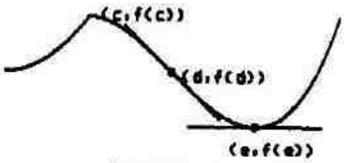


FIGURA 4.6-39

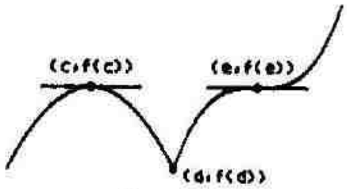


FIGURA 4.6-41

43. Os números $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ e $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ são números críticos de f e $f''(x) = x[\![\frac{1}{2}x^2 + 1]\!]$.

Como $\frac{1}{2}x^2 + 1 \geq 1$, $[\![\frac{1}{2}x^2 + 1]\!] \geq 1$ e $f''(x)$ tem o mesmo sinal que x.

Em $x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $f''(x) < 0$ e f tem um valor máximo relativo.

Em $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $f''(x) > 0$ e f tem um valor mínimo relativo.

45. $f(x) = x^3 + 3rx + 5$; $f'(x) = 3x^2 + 3r$; $f''(x) = 6x$

(a) $f'(x) = 3x^2 + 3r > 0$ para todo x se $r>0$. Portanto, f é crescente em $(-\infty, +\infty)$ e não tem extremos relativos.

(b) Se $r < 0$, então $f'(\sqrt{-r}) = 0$ e $f'(-\sqrt{-r}) = 0$.

Em $x = \sqrt{-r}$, $f''(x) = 6\sqrt{-r} > 0$ o que implica que f tem um valor mínimo relativo.

Em $x = -\sqrt{-r}$, $f''(x) = -6\sqrt{-r} < 0$ o que implica que f tem um valor máximo relativo.

47. $f(x) = x^2 + rx^{-1}$; $f'(x) = 2x - rx^{-2} = x^{-2}(2x^3 - r)$; $f''(x) = 2 + 2rx^{-3}$.
$f'\left(\sqrt[3]{\frac{r}{2}}\right) = 0$ e $f''\left(\sqrt[3]{\frac{r}{2}}\right) = 2 + 2r\cdot\frac{2}{r} = 6 > 0$. Assim, f tem um valor mínimo relativo.

Como f não tem outro número crítico, f não apresenta outros extremos relativos.

49. $f''(x)$ existe para todos os valores de x em I, e em um número c em I, $f''(c) = 0$ e $f'''(c)$ existe, não sendo 0. Como $f'(c)$ existe, então, $f'(c)$ existe; logo, o gráfico tem uma reta tangente em c.

Suponha que $f'''(c)<0$. Então,

$$f'''(c) = \lim_{x\to c} \frac{f''(x) - f''(c)}{x - c} < 0$$

Logo, para algum intervalo aberto I_1 contendo c

$$\frac{f''(x) - f''(c)}{x - c} < 0; \quad \frac{f''(x)}{x - c} < 0$$

Se x está em I_1 e $x<c$ então $f''(x)>0$.

Se x está em I_1 e $x>c$ então $f''(x)<0$.

Assim, pela Definição 4.5.4(ii), $(c, f(c))$ é um ponto de inflexão.

Suponha que $f'''(c) > 0$. Então,

$$f'''(c) = \lim_{x\to c} \frac{f''(x) - f''(c)}{x - c} > 0$$

Logo, para algum intervalo aberto I_2 contendo c

$$\frac{f''(x) - f''(c)}{x - c} > 0; \quad \frac{f''(x)}{x - c} > 0$$

Se x está em I_2 e $x<c$ então $f''(x)<0$.

Se x está em I_2 e $x>c$ então $f''(x)>0$.

Assim, pela Definição 4.5.4(i), $(c, f(c))$ é um ponto de inflexão.

EXERCÍCIOS 4.7 Traçando um Esboço do Gráfico de uma Função

1. $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1} = x + 1 + \dfrac{1}{x-1} = x + 1 + g(x)$

Como $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ ou como $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$,

x = 1 é uma assintota vertical.

Como $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ ou como $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$,

y = x+1 é uma assintota obliqua.

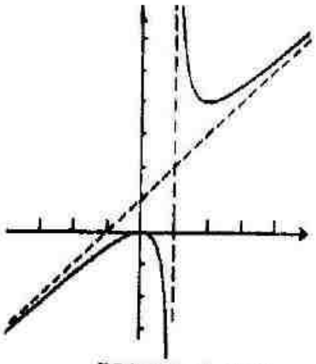


FIGURA 4.7-1

3. $f(x) = \dfrac{x^2 - 8}{x - 3} = x + 3 + \dfrac{1}{x-3} = x + 3 + g(x)$

Como $\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$ ou como $\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$,

x = 3 é uma assintota vertical.

Como $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ ou como $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$,

y = x+3 é uma assintota obliqua.

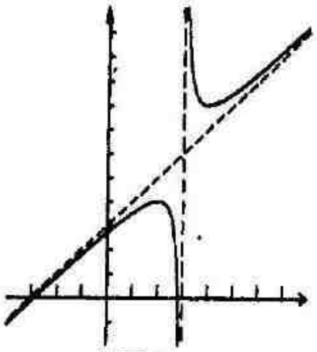


FIGURA 4.7-3

5. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x + 2} = x - 6 + \dfrac{7}{x+2} = x - 6 + g(x)$

Como $\lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$ ou como $\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$,

x = -2 é uma assintota vertical.

Como $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ ou como $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$,

y = x-6 é uma assintota obliqua.

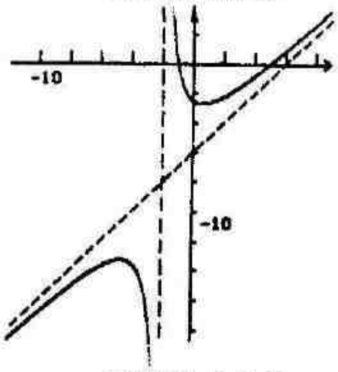


FIGURA 4.7-5

7. $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 4}{x^2} = x + 2 + \dfrac{4}{x^2} = x + 2 + g(x)$

Como $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ ou como $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$,

x = 0 é uma assintota vertical.

Como $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ ou como $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$,

y=x+2 é uma assintota obliqua.

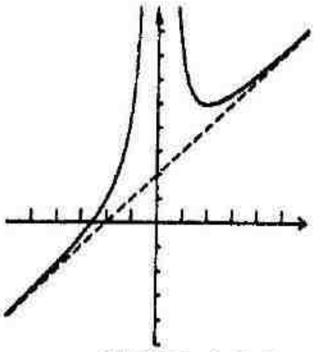


FIGURA 4.7-7

Os esboços dos gráficos dos Exercícios de 9 a 57 aparecem no texto, nas Figs. 4.7-9 a 4.7-57.

9. $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$; $f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x+1)(x-1)$; $f''(x) = 12x$

Seja $f'(x) = 0$: $x = \pm 1$. Seja $f''(x) = 0$: $x = 0$

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$x < -1$		+	−	f é crescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = -1$	5	0	−	f tem um máximo relativo; o gráfico é côncavo para baixo
$-1 < x < 0$		−	−	f é decrescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = 0$	1	−6	0	f é decrescente; ponto de inflexão
$0 < x < 1$		−	+	f é decrescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = 1$	−3	0	+	f tem um mínimo relativo; o gráfico é côncavo para cima
$1 < x$		+	+	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima

11. $f(x) = x^4 - 2x^3$; $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x-3)$; $f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$

Seja $f'(x) = 0$: $x = 0$, $x = \frac{3}{2}$. Seja $f''(x) = 0$: $x = 0$, $x = 1$

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$x < 0$		−	+	f é decrescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = -1$	0	0	0	ponto de inflexão; a reta tangente é horizontal
$0 < x < 1$		−	−	f é decrescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = 1$	−1	−2	0	f é decrescente; ponto de inflexão
$1 < x < \frac{3}{2}$		−	+	f é decrescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = \frac{3}{2}$	$-\frac{27}{16}$	0	+	f tem um mínimo relativo; o gráfico é côncavo para cima
$\frac{3}{2} < x$		+	+	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima

13. $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 4$; $f'(x) = 3x^2 + 10x + 3 = (3x+1)(x+3)$; $f''(x) = 6x + 10$

Seja $f'(x) = 0$: $x = -3$, $-\frac{1}{3}$. Seja $f''(x) = 0$: $x = -\frac{5}{3}$.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$x < -3$		+	−	f é crescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = -3$	5	0	−	f tem um máximo relativo; o gráfico é côncavo para baixo
$-3 < x < -\frac{5}{3}$		−	−	f é decrescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = -\frac{5}{3}$	$\frac{7}{27}$	$-\frac{16}{3}$	0	f é decrescente; ponto de inflexão
$-\frac{5}{3} < x < -\frac{1}{3}$		−	+	f é decrescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = -\frac{1}{3}$	$-\frac{121}{27}$	0	+	f tem um mínimo relativo; o gráfico é côncavo para cima
$-\frac{1}{3} < x$		+	+	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima

15. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 1$; $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x$; $f''(x) = 12x^2 - 18x + 6 = 6(2x - 1)(x - 1)$

Seja $f'(x) = 0$: $x = 0$. Seja $f''(x) = 0$: $x = \frac{1}{2}, 1$.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$x < 0$		−	+	f é decrescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = 0$	1	0	+	f tem um mínimo relativo; o gráfico é côncavo para cima
$0 < x < \frac{1}{2}$		+	+	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = \frac{1}{2}$	$\frac{23}{16}$	$\frac{5}{4}$	0	f é crescente; ponto de inflexão
$\frac{1}{2} < x < 1$		+	−	f é crescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = 1$	2	1	0	f é crescente; ponto de inflexão
$1 < x$		+	+	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima

17. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$; $f'(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x + 1)(x - 2)$; $f''(x) = 3x^2 - 2x - 2$

Seja $f'(x) = 0$: $x = 0, -1, 2$. Seja $f''(x) = 0$: $x = x_1 = \dfrac{1 - \sqrt{7}}{3} \approx -0,55$, $x = x_2 = \dfrac{1 + \sqrt{7}}{3} \approx 1,21$

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$x < -1$		−	+	f é decrescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = -1$	0,58	0	+	f tem um mínimo relativo; o gráfico é côncavo para cima
$-1 < x < x_1$		+	+	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = x_1$	0,78	0,63	0	f é crescente; ponto de inflexão
$x_1 < x < 0$		+	−	f é crescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = 0$	1	0	−	f tem um máximo relativo; o gráfico é côncavo para baixo
$0 < x < x_2$		−	−	f é decrescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = x_2$	−0,11	−2,11	0	f é decrescente; ponto de inflexão
$x_2 < x < 2$		−	+	f é decrescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = 2$	−1,67	0	+	f tem um mínimo relativo; o gráfico é côncavo para cima
$2 < x$		+	+	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima

19. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2$; $f'(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x = 2x(x^2 - 3x + 3)$; $f''(x) = 6x^2 - 12x + 6 = 6(x - 1)^2$

Seja $f'(x) = 0$: $x = 0$. Seja $f''(x) = 0$: $x = 1$.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$x < 0$		−	+	f é decrescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = 0$	2	0	+	f tem um mínimo relativo; o gráfico é côncavo para cima
$0 < x < 1$		+	+	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = 1$	$\frac{7}{2}$	2	0	f é crescente; não há ponto de inflexão
$1 < x$		+	+	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima

21. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 0 \\ 2x^2 & \text{se } 0 \le x \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 0 \\ 4x & \text{se } 0 \le x \end{cases}$; $f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < 0 \\ 4 & \text{se } 0 < x \end{cases}$

Seja $f'(x) = 0$: $x = 0$. $f''(0)$ não existe, pois $f''_-(0) = 2$ e $f''_+(0) = 4$.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$x < 0$		−	+	f é decrescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = 0$	0	0	n.e.	f tem um mínimo relativo; o gráfico é côncavo para cima
$0 < x$		+	+	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima

n.e = não existe

23. $f(x) = \begin{cases} -x^4 & \text{se } x < 0 \\ x^4 & \text{se } 0 \le x \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} -4x^3 & \text{se } x < 0 \\ 4x^3 & \text{se } 0 \le x \end{cases}$; $f''(x) = \begin{cases} -12x^2 & \text{se } x < 0 \\ 12x^2 & \text{se } 0 \le x \end{cases}$

Seja $f'(x) = 0$: $x = 0$. Seja $f''(x) = 0$: $x = 0$

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$x < 0$		+	−	f é crescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = 0$	0	0	0	ponto de inflexão; a reta tangente é horizontal
$0 < x$		+	+	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima

25. $f(x) = \begin{cases} 3(x-2)^2 & \text{se } x \le 2 \\ (2-x)^3 & \text{se } 2 < x \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} 6(x-2) & \text{se } x \le 2 \\ -3(2-x)^2 & \text{se } 2 < x \end{cases}$; $f''(x) = \begin{cases} 6 & \text{se } x < 2 \\ 6(2-x) & \text{se } 2 < x \end{cases}$

Seja $f'(x) = 0$: $x = 2$. $f''(x)$ nunca é 0. $f''(2)$ não existe.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$x < 2$		−	+	f é decrescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = 2$	0	0	n.e.	ponto de inflexão; a reta tangente é horizontal
$2 < x$		−	−	f é decrescente; o gráfico é côncavo para baixo

27. $f(x) = (x+1)^3(x-2)^2$

$f'(x) = 3(x+1)^2(x-2)^2 + 2(x-2)(x+1)^3 = (x+1)^2(x-2)[3(x-2) + 2(x+1)]$

$= (x+1)^2(x-2)(5x-4)$

$f''(x) = 2(x+1)(5x^2 - 14x + 8) + (x+1)^2(10x - 14) = 2(x+1)[(5x^2 - 14x + 8) + (5x - 7)(x+1)]$

$= 2(x+1)(10x^2 - 16x + 1)$

Seja $f'(x) = 0$: $x = -1$, $\frac{4}{5}$, 2. Seja $f''(x) = 0$: $x = -1$, $x = x_1 = \frac{8 - 3\sqrt{6}}{10} \approx 0{,}065$, $x = x_2 = \frac{8 + 3\sqrt{6}}{10} \approx 1{,}53$

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$x < -1$		+	−	f é crescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = -1$	0	0	0	ponto de inflexão; a reta tangente é horizontal
$-1 < x < x_1$		+	+	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = x_1$	4,52	8,07	0	f é crescente; ponto de inflexão
$x_1 < x < \frac{4}{5}$		+	−	f é crescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = \frac{4}{5}$	8,40	0	−	f tem um mínimo relativo; o gráfico é côncavo para baixo
$\frac{4}{5} < x < x_2$		−	−	f é decrescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = x_2$	3,52	−11,0	0	f é decrescente; ponto de inflexão
$x_2 < x < 2$		−	+	f é decrescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = 2$	0	0	+	f tem um mínimo relativo; o gráfico é côncavo para cima
$2 < x$		+	+	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima

29. $f(x) = 3x^5 + 5x^4$; $f'(x) = 15x^4 + 20x^3 = 5x^3(3x + 4)$; $f''(x) = 60x^3 + 60x^2 = 60x^2(x+1)$

Seja $f'(x) = 0$: $x = 0$, $-\frac{4}{3}$. Seja $f''(x) = 0$: $x = 0, -1$.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$x < -\frac{4}{3}$		+	−	f é crescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = -\frac{4}{3}$	$\frac{256}{81}$	0	−	f tem um máximo relativo; o gráfico é côncavo para baixo
$-\frac{4}{3} < x < -1$		−	−	f é decrescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = -1$	2	−5	0	f é decrescente; ponto de inflexão
$-1 < x < 0$		−	+	f é decrescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = 0$	0	0	0	f tem um mínimo relativo; o gráfico é côncavo para cima
$0 < x$		+	+	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima

31. $f(x) = 3\cos 2x$, $x \in [-\pi, \pi]$, $2x \in [-2\pi, 2\pi]$; $f'(x) = -6 \operatorname{sen} 2x$; $f''(x) = -12 \cos 2x$

Seja $f'(x) = 0$: $\operatorname{sen} 2x = 0$; $2x = -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$; $x = -\pi, -\frac{1}{2}\pi, 0, \frac{1}{2}\pi, \pi$

Seja $f''(x) = 0$: $\cos 2x = 0$; $2x = -\frac{3}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$; $x = -\frac{3}{4}\pi, -\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi$

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$x = -\pi$		3		
$-\pi < x < -\pi$		−	−	f é decrescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = -\frac{3}{4}\pi$	0	−6	0	f é decrescente; ponto de inflexão
$-\frac{3}{4}\pi < x < -\frac{1}{2}\pi$		−	+	f é decrescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = -\frac{1}{2}\pi$	−3	0	+	f tem um mínimo relativo; o gráfico é côncavo para cima
$-\frac{1}{2}\pi < x < -\frac{1}{4}\pi$		+	+	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = -\frac{1}{4}\pi$	0	6	0	f é crescente; ponto de inflexão
$-\frac{1}{4}\pi < x < 0$		+	−	f é crescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = 0$	3	0	−	f tem um máximo relativo; o gráfico é côncavo para baixo
$0 < x < \frac{1}{4}\pi$		−	−	f é decrescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = \frac{1}{4}\pi$	0	−6	0	f é decrescente; ponto de inflexão
$\frac{1}{4}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$		−	+	f é decrescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = \frac{1}{2}\pi$	−3	0	+	f tem um mínimo relativo; o gráfico é côncavo para cima
$\frac{1}{2}\pi < x < \frac{3}{4}\pi$		+	+	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = \frac{3}{4}\pi$	0	6	0	f é crescente; ponto de inflexão
$\frac{3}{4}\pi < x < \pi$		+	−	f é crescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = \pi$	3			

33. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } 0 \le x < \frac{1}{2}\pi \\ \operatorname{sen}(x - \frac{1}{2}\pi) & \text{se } \frac{1}{2}\pi \le x \le \pi \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } 0 < x < \frac{1}{2}\pi \\ \cos(x - \frac{1}{2}\pi) & \text{se } \frac{1}{2}\pi < x < \pi \end{cases}$; $f''(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x & \text{se } 0 < x < \frac{1}{2}\pi \\ -\operatorname{sen}(x - \frac{1}{2}\pi) & \text{se } \frac{1}{2}\pi < x < \pi \end{cases}$

Como $\lim\limits_{x \to \pi/2^-} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x \to \pi/2^+} f(x) = 0$, f é descontínua em $\frac{1}{2}\pi$. $f'(x)$ nunca é 0 e $f''(x)$ nunca é 0. Assim, não há extremos relativos e nem pontos de inflexão.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$x = 0$	0			
$0 < x < \frac{1}{2}\pi$		+	−	f é crescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = \frac{1}{2}\pi$	0	n.e	n.e	f não tem extremo relativo; não há ponto de inflexão
$\frac{1}{2}\pi < x < \pi$		+	−	f é crescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = \pi$	1			

35. $f(x) = 2 \text{ tg } \frac{1}{2}x$, $x \in (-\pi, \pi)$, $\frac{1}{2}x \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$; $f'(x) = \sec^2 \frac{1}{2}x$; $f''(x) = \sec^2 \frac{1}{2}x \text{ tg } \frac{1}{2}x$

$f'(x)$ nunca é 0. Seja $f''(x) = 0$: $x = 0$

	f(x)	f'(x)	f"(x)	Conclusão
$-\pi < x < 0$		+	−	f é crescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = 0$	0	1	0	f é crescente; ponto de inflexão
$0 < x < \pi$		+	+	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima

37. $f(x) = \text{sen } x + \cos x$, $x = [-2\pi, 2\pi]$; $f'(x) = \cos x - \text{sen } x$; $f''(x) = -\text{sen } x - \cos x$

Seja $f'(x) = 0$: $x = -\frac{7}{4}\pi, \ -\frac{3}{4}\pi, \ \frac{1}{4}\pi, \ \frac{5}{4}\pi$. Seja $f''(x) = 0$: $x = -\frac{5}{4}\pi, \ -\frac{1}{4}\pi, \ \frac{3}{4}\pi, \ \frac{7}{4}\pi$

	f(x)	f'(x)	f"(x)	Conclusão
$x = -2\pi$		1		
$-2\pi < x < -\frac{7}{4}\pi$		+	−	f é crescente; o gráfico é côncavo p/ baixo
$x = -\frac{7}{4}\pi$	$\sqrt{2}$	0	−	f tem um máximo relativo; o gráfico é côncavo p/ baixo
$-\frac{7}{4}\pi < x < -\frac{5}{4}\pi$		−	−	f é decrescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = -\frac{5}{4}\pi$	0	$-\sqrt{2}$	0	f é decrescente; ponto de inflexão
$-\frac{5}{4}\pi < x < -\frac{3}{4}\pi$		−	+	f é decrescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = -\frac{3}{4}\pi$	$-\sqrt{2}$	0	+	f tem um mínimo relativo; o gráfico é côncavo para cima
$-\frac{3}{4}\pi < x < -\frac{1}{4}\pi$		+	+	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = -\frac{1}{4}\pi$	0	$\sqrt{2}$	0	f é crescente; ponto de inflexão
$-\frac{1}{4}\pi < x < \frac{1}{4}\pi$		+	−	f é crescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = \frac{1}{4}\pi$	$\sqrt{2}$	0	−	f tem um máximo relativo; o gráfico é côncavo p/ baixo
$\frac{1}{4}\pi < x < \frac{3}{4}\pi$		−	−	f é decrescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = \frac{3}{4}\pi$	0	$-\sqrt{2}$	0	f é decrescente; ponto de inflexão
$\frac{3}{4}\pi < x < \frac{5}{4}\pi$		−	+	f é decrescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = \frac{5}{4}\pi$	$-\sqrt{2}$	0	+	f tem um mínimo relativo; o gráfico é côncavo p/ cima
$\frac{5}{4}\pi < x < \frac{7}{4}\pi$		+	+	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = \frac{7}{4}\pi$	0	$\sqrt{2}$	0	f é crescente; ponto de inflexão
$\frac{7}{4}\pi < x < 2\pi$		+	−	f é crescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = 2\pi$		1		

39. $f(x) = \frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1} = x + 1 + g(x)$; $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$; $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$

Seja $f'(x) = 0$: $x = 0, 2$. Não há valor de x para o qual $f''(x) = 0$.

Como $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$ ou como $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$, $y = x + 1$ é uma assintota obliqua.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$x < 0$		+	−	f é crescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = 0$	0	0	−	f tem um máximo relativo; o gráfico é côncavo para baixo
$0 < x < 1$		−	−	f é decrescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = 1$	n.e.	n.e.	n.e.	o gráfico tem uma assintota vertical, pois $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$
$1 < x < 2$		−	+	f é decrescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = 2$	4	0	+	f tem um mínimo relativo; o gráfico é côncavo para cima
$2 < x$		+	+	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima

41. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$; $f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - 2x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$

$f''(x) = \frac{-4(x^2 - 1)^2 - 2(x^2 - 1)(2x)(-4x)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}$

Seja $f'(x) = 0$: $x = 0$. Não há valores de x para o qual $f''(x) = 0$.

Como $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$ ou como $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$, $y = 1$ é uma assintota horizontal.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$x < -1$		+	+	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = -1$	n.e.	n.e.	n.e.	o gráfico tem uma assintota vertical, pois $\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$
$-1 < x < 0$		+	−	f é crescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = 0$	−1	0	−	f tem um máximo relativo; o gráfico é côncavo para baixo
$0 < x < 1$		−	−	f é decrescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = 1$	n.e.	n.e.	n.e.	o gráfico tem uma assintota vertical, pois $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$
$1 < x$		−	+	f é decrescente; o gráfico é côncavo para cima

43. $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$; $f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

$$f''(x) = \frac{-4x(x^2+1)^2 - 2(x^2+1)(2x)(-2x^2+2)}{(x^2+1)^4} = \frac{-4x(-x^2+3)}{(x^2+1)^3}$$

Seja $f'(x) = 0$: $x = \pm 1$. Seja $f''(x) = 0$: $x = 0$, $\pm\sqrt{3}$.

Como $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ ou como $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $y = 0$ é uma assíntota horizontal.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$x < -\sqrt{3}$		−	−	f é decrescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = -\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{4}$	0	f é decrescente; ponto de inflexão
$-\sqrt{3} < x < -1$		−	+	f é decrescente; o gráfico é côncavo p/ cima
$x = -1$	−1	0	+	f tem um mínimo relativo; o gráfico é côncavo para cima
$-1 < x < 0$		+	+	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = 0$	0	2	0	f é crescente; ponto de inflexão
$0 < x < 1$		+	−	f é crescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = 1$	1	0	−	f tem um máximo relativo; o gráfico é côncavo para baixo
$1 < x < \sqrt{3}$		−	−	f é decrescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = \sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{4}$	0	f é decrescente; ponto de inflexão
$\sqrt{3} < x$		−	+	f é decrescente; o gráfico é côncavo para baixo

45. $f(x) = 3x^{2/3} - 2x$; $f'(x) = 2x^{-1/3} - 2 = 2(x^{-1/3} - 1)$; $f''(x) = -\frac{2}{3}x^{-4/3}$

$f'(1) = 0$; $f'(0)$ não existe $f''(x)$ nunca é zero. $f''(0)$ não existe.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$x < 0$		−	−	f é decrescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = 0$	0	n.e.	n.e.	f tem um mínimo relativo
$0 < x < 1$		+	−	f é crescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = 1$	1	0	−	f tem um máximo relativo; o gráfico é côncavo para baixo
$1 < x$		−	−	f é decrescente; o gráfico é côncavo para baixo

47. $f(x) = 3x^{4/3} - 4x$; $f'(x) = 4x^{1/3} - 4 = 4(x^{1/3} - 1)$; $f''(x) = \frac{4}{3}x^{-2/3}$

$f'(1) = 0$. Não há valores de x para os quais $f''(x) = 0$. $f''(0)$ não existe.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$x < 0$		−	+	f é decrescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = 0$	0	−4	n.e.	f é decrescente; não há ponto de inflexão
$0 < x < 1$		−	+	f é decrescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = 1$	−1	0	+	f tem um mínimo relativo; o gráfico é côncavo para cima
$1 < x$		+	+	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima

49. $f(x) = 2 + (x-3)^{1/3}$; $f'(x) = \frac{1}{3}(x-3)^{-2/3}$; $f''(x) = -\frac{2}{9}(x-3)^{-5/3}$

Não há valores de x para o qual $f'(x) = 0$ ou $f''(x) = 0$. $f'(3)$ e $f''(3)$ não existem.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$x < 3$		+	+	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = 3$	2	n.e.	n.e.	ponto de inflexão
$3 < x$		+	−	o gráfico tem uma tangente vertical, pois $\lim_{x \to 3} f'(x) = +\infty$ f é crescente; o gráfico é côncavo para baixo

51. $f(x) = 2 + (x-3)^{5/3}$; $f'(x) = \frac{5}{3}(x-3)^{2/3}$; $f''(x) = \frac{10}{9}(x-3)^{-1/3}$

Seja $f'(x) = 0$: $x = 3$. Não há valores de x para o qual $f''(x) = 0$. $f''(3)$ não existe.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$x < 3$		+	−	f é crescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = 3$	2	0	n.e.	ponto de inflexão; a reta tangente é horizontal
$3 < x$		+	+	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima

53. $f(x) = x^2\sqrt{4-x}$. O domínio de f é $(-\infty, 4]$.

$f'(x) = 2x(4-x)^{1/2} - \frac{1}{2}x^2(4-x)^{-1/2} = \frac{1}{2}(4-x)^{-1/2}[4x(4-x) - x^2] = \frac{1}{2}(4-x)^{-1/2}(16x - 5x^2)$

$f''(x) = \frac{1}{4}(4-x)^{-3/2}(16x - 5x^2) + \frac{1}{2}(4-x)^{-1/2}(16 - 10x)$

$= \frac{1}{4}(4-x)^{-3/2}[16x - 5x^2 + 2(4-x)(16-10x)] = \frac{1}{4}(4-x)^{-3/2}(15x^2 - 96x + 128)$

Seja $f'(x) = 0$: $x = 0,\ 3,2$

Seja $f''(x) = 0$: $x = x_1 = \frac{48 - 8\sqrt{6}}{15} \approx 1,89$; $x_2 = \frac{48 + 8\sqrt{6}}{15} \approx 4,5$ não está no domínio de f.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$x < 0$		−	+	f é decrescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = 0$	0	0	+	f tem um mínimo relativo; o gráfico é côncavo para cima
$0 < x < x_1$		+	+	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = x_1$	5,20	+	0	f é crescente; ponto de inflexão
$x_1 < x < 3,2$		+	−	f é crescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = 3,2$	9,16	0	−	f tem um máximo relativo; o gráfico é côncavo para baixo
$3,2 < x < 4$		−	−	f é decrescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = 4$	0			

55. $f(x) = (x+2)\sqrt{-x}$; $f'(x) = \dfrac{-3x-2}{2(-x)^{1/2}}$; $f''(x) = \dfrac{3x-2}{4(-x)^{3/2}}$

O domínio de f é $(-\infty, 0]$. Seja $f'(x) = 0$: $x = -\frac{2}{3}$.

Não há valor de x no domínio de f para o qual $f''(x) = 0$.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$x < -\frac{2}{3}$		+	−	f é crescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = -\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}\sqrt{6}$	0	−	f tem um máximo relativo; o gráfico é côncavo para baixo
$-\frac{2}{3} < x < 0$		−	−	f é decrescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = 0$	0			

57. $f(x) = (x+1)^{2/3}(x-2)^{1/3}$

$f'(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{-1/3}(x-2)^{1/3} + \frac{1}{3}(x+1)^{2/3}(x-2)^{-2/3}$

$= \frac{1}{3}(x+1)^{-1/3}(x-2)^{-2/3}[2(x-2) + (x+1)] = (x+1)^{-1/3}(x-2)^{-2/3}(x-1)$

$f''(x) = -\frac{1}{3}(x+1)^{-4/3}(x-2)^{-2/3}(x-1) - \frac{2}{3}(x+1)^{-1/3}(x-2)^{-5/3}(x-1) + (x+1)^{-1/3}(x-2)^{-2/3}$

$= -\frac{1}{3}(x+1)^{-4/3}(x-2)^{-5/3}[(x-2)(x-1) + 2(x+1)(x-1) - 3(x+1)(x-2)]$

$= -2(x+1)^{-4/3}(x-2)^{-5/3}$

Seja $f'(x) = 0$: $x = 1$. $f''(x)$ nunca é 0. $f'(-1)$, $f''(-1)$, $f'(2)$, $f''(2)$ não existem.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$x < -1$		+	+	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = -1$	0	n.e.	n.e.	f tem um máximo relativo o gráfico tem uma tangente vertical, pois $\lim_{x \to -1^+} f'(x) = +\infty$
$-1 < x < 1$		−	+	f é decrescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = 1$	$-4^{1/3}$	0	+	f tem um mínimo relativo; o gráfico é côncavo para cima
$1 < x < 2$		+	+	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = 2$	0	n.e.	n.e.	ponto de inflexão o gráfico tem uma tangente vertical, pois $\lim_{x \to 2} f'(x) = +\infty$
$2 < x$		+	−	f é crescente; o gráfico é côncavo para baixo

EXERCÍCIOS 4.8 Tratamento Adicional dos Extremos Absolutos e Aplicações

1. $f(x) = x^2$; $x \in (-3, 2] = I$

Como $f(0) = 0$ e $f(x) \geq 0$ para todo x em I, 0 é o valor mínimo absoluto de f em I.

Como $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = 9$ e $f(x) < 9$ para x em I, não há um valor máximo absoluto de f.

3. $F(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$, $x \in [-4, 4] = I$

$\lim\limits_{x \to 2^-} F(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x+2}{x-2} = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to 2^+} F(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x+2}{x-2} = +\infty$, logo, F não tem extremos absolutos em I.

5. $g(x) = 4x^2 - 2x + 1$, $x \in (-\infty, +\infty) = I$

$g'(x) = 8x - 2$; $g''(x) = 8$. Seja $g'(x) = 0$: $x = \frac{1}{4}$.

	$g(x)$	$g'(x)$	$g''(x)$	Conclusão
$x = \frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	+	g tem um valor mínimo relativo.

Como g é contínua em I e tem apenas um extremo relativo em I, segue do Teorema 4.8.1(ii) que g tem um valor mínimo absoluto $\frac{3}{4}$ qdo $x = \frac{1}{4}$.

Como $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ ou como $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ não há um valor máximo absoluto de g.

7. $f(x) = (x-1)^{1/3}$, $x \in (-\infty, +\infty)$

Como $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ não há extremos absolutos de f.

9. $f(x) = x^4 + x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 2x + 1$, $x \in (-\infty, \infty)$

$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 9x + 2 = (x+2)(4x^2 - 5x + 1) = (x+2)(4x-1)(x-1)$

Seja $f'(x) = 0$: $x = -2$, $x = \frac{1}{4}$, $x = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $f(-2) = -13$, $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{317}{256}$, $f(1) = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Não há um valor máximo absoluto de f.

f tem um valor mínimo absoluto de -13 em $x = -2$. Isso será provado da seguinte forma:

(i) Como f é contínua, $x = -2$ dá o valor mínimo absoluto no intervalo fechado $[-2, 1]$. Assim, $f(x) \geq f(-2)$ para todo x em $[-2, 1]$.

(ii) Quando $x < -2$, $f'(x) < 0$; logo, f é decrescente. Então, $f(x) > f(-2)$ para x em $(-\infty, -2)$.

(iii) Quando $x > 1$, $f'(x) > 0$; logo, f é crescente. Então, $f(x) > f(1) > f(-2)$ para x em $(1, +\infty)$. Portanto, $f(x) \geq f(-2)$ para todos os valores de x.

11. $g(x) = \frac{x^2+7}{x-3}$, $x \in [-3, 3) = I$

$$g'(x) = \frac{2x(x-3) - (x^2+7)}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x-7}{(x-3)^2} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-3)^2}$$

Seja $g'(x) = 0$; $x = -1$, $x = 7$. Entretanto, 7 não está no intervalo $[-3, 3)$.

	$g(x)$	$g'(x)$	Conclusão
$-3 \le x < -1$		+	g é crescente
$x = -1$	-2	0	g tem um valor máximo relativo
$-1 < x < 3$		−	g é decrescente

Como g é contínua em I e tem apenas um extremo relativo em I, segue do Teorema 4.8.1 (i) que g tem um valor máximo absoluto de −2 quando $x = -1$.

Como $\lim_{x \to 3^-} g(x) = -\infty$, g não tem valor mínimo absoluto.

13. $f(x) = \frac{x}{(x^2+4)^{3/2}}$, $x \in [0, +\infty) = I$

$$f'(x) = (x^2+4)^{-3/2} - \tfrac{3}{2}(x^2+4)^{-5/2}(2x) = (x^2+4)^{-5/2}[(x^2+4) - 3x^2] = (x^2+4)^{-5/2}(4-2x^2)$$

Seja $f'(x) = 0$: $4 - 2x^2 = 0$; $x^2 = 2$; $x = \pm\sqrt{2}$. $x = \sqrt{2}$ é o único número crítico.

	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusão
$x < \sqrt{2}$		+	f é crescente
$x = \sqrt{2}$	$\frac{1}{18}\sqrt{3}$	0	f tem um valor máximo relativo
$\sqrt{2} < x$		−	f é decrescente

Como f é contínua em I e tem apenas um extremo relativo em I, segue do Teorema 4.8.1 (i) que f tem um valor máximo absoluto de $\frac{1}{18}\sqrt{3}$ qdo $x = \sqrt{2}$.

$f(x) \ge 0$ para todo x em I. Assim, o valor mínimo absoluto de f em I é 0 quando $x = 0$.

15. $f(x) = \operatorname{tg} x + 2\sec x = \frac{\operatorname{sen} x + 2}{\cos x}$, $x \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi) = I$

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - (\operatorname{sen} x + 2)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{1 + 2\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{2(\operatorname{sen} x + \frac{1}{2})}{\cos^2 x}$$

Como $\lim_{x \to -\pi/2^+} f(x) = +\infty$ ou como $\lim_{x \to \pi/2^+} f(x) = +\infty$, f não tem um valor máximo absoluto em I.

Como $f'(x) < 0$ qdo $x < -\frac{1}{6}\pi$ e $f'(x) > 0$ qdo $x > -\frac{1}{6}\pi$, $f(-\frac{1}{6}\pi) = \sqrt{3}$ é o valor mínimo absoluto de f em I.

17. x m é o comprimento do campo; a largura é $\frac{2.700}{y}$ m. C(x) é o custo.

$C(x) = 2x(18) + 2\left(\frac{2.700}{x}\right)(18) + x(12)17 = 48x + \frac{97.200}{x}, \; x \in (0, \infty)$.

$C'(x) = 48 - \frac{97.200}{x^2}$; $C''(x) = \frac{194.400}{x^3}$

Seja $C'(x) = 0$: $48 - \frac{97.200}{x^2} = 0$; $48x^2 = 97.200$; $x^2 = 2025$, $x = \pm 45$.

x = 45 é o único número crítico. As dimensões do campo são, portanto, 45 m por $\frac{2.700}{45} = 60$ m. Já que C'' 45) > 0, essas dimensões dão um custo relativo mínimo, e pelo Teorema 4.8.1 (ii), elas dão um custo absoluto mínimo.

19. x cm é a largura da página impressa, a altura é $\frac{24}{x}$ cm, $A(x)$ cm^2 é a área.

$A(x) = (x + 2)\left(\frac{24}{x} + 3\right) = 30 + 3x + \frac{48}{x}, \; x \in (0, \infty)$.

$A'(x) = 3 - \frac{48}{x^2}$; $A''(x) = \frac{98}{x^3}$. Seja $A'(x) = 0$: $\frac{48}{x^2} = 3$; $x^2 = 16$; $x = \pm 4$.

x = 4 é o único número crítico. Então, x + 2 = 4 e $\frac{24}{x} + 3 = 9$, e as dimensões da página são 6 cm por 9 cm. Já que A"(4) > 0, essas dimensões dão uma área mínima relativa e pelo Teorema 4.8.1 (ii) elas dão uma área mínima absoluta.

21. Seja x cm a largura da base da caixa. Então, o comprimento da base é 3x cm, e a altura da caixa é $\frac{288}{3x^2} = \frac{96}{x^2}$ cm. Se $M(x)$ cm^2 for a quantidade de material necessário para a construção da caixa, então

$M(x) = 2(3x^2) + 2\left(\frac{96}{x^2} \cdot x\right) + 2\left(3x \cdot \frac{96}{x^2}\right) = 6x^2 + \frac{768}{x}, \; x \in (0, \infty)$; $M'(x) = 12x - \frac{768}{x^2}$; $M''(x) = 12 + \frac{1.536}{x^3}$

Seja $M'(x) = 0$: $12x - \frac{768}{x^2} = 0$; $12x^3 = 768$; $x^3 = 64$; $x = 4$ é o único número crítico.

As dimensões da caixa são 4 cm por 3·4 = 12 cm por $\frac{96}{4^2} = 6$ cm. Como M"(4) > 0 , essas dimensões indicam a quantidade mínima relativa e pelo Teorema 4.8.1 (ii) elas determinam uma quantidade mínima absoluta.

23. $y = x^3 - 3x^2 + 5x$; $m(x) = y'(x) = 3x^2 - 6x + 5, \; x \in (-\infty, +\infty)$

Queremos encontrar o valor de x que torna m(x) um mínimo absoluto.

$m'(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$. Como $m'(x) < 0$ quando $x < 1$ e $m'(x) > 0$ se $x > 1$, m tem um valor mínimo absoluto quando x = 1 e m(1) = 2. Portanto, a inclinação mínima para uma reta tangente à curva dada é 2 quando o ponto de tangência é (1,3).

Uma equação da tangente é $y - 3 = 2(x - 1)$; $2x - y + 1 = 0$.

25. x meses depois do início de uma epidemia, P % da população é infectada, onde :

$P(x) = \frac{30x^2}{(1+x^2)^2}$, $x \in [0, +\infty)$; $P'(x) = \frac{60x(1+x^2)^2 - 30x^2 \cdot 2(1+x^2)(2x)}{(1+x^2)^4} = \frac{60x(1-x^2)}{(1+x^2)^3}$

Seja $P'(x) = 0$; $x = 0$; ± 1. $x = 1$ é o único número crítico. Se $0 < x < 1$, $P'(x) > 0$; se $x > 1$, $P'(x) < 0$. Segue, pelo teste da derivada primeira que $P(1)$ é um valor máximo relativo; pelo Teorema 4.8.1 (i), $P(1)$ é o valor máximo absoluto. Logo, em 1 mês haverá um número máximo de pessoas infectadas, correspondendo a 7,5% da população.

27. Seja r cm o raio de uma lata. Se o volume da lata for 16π cm^3, então a altura da lata deverá ser $\frac{16}{r^2}$ cm. Se o custo do material para os lados da lata for P por centímetro quadrado e $C(r)$ for o custo do material necessário para construir a lata, então:

$$C(r) = 2\pi r \cdot \frac{16}{r^2} \cdot P + 2 \cdot \pi r^2 \cdot 2P = P\left(\frac{32\pi}{r} + 4\pi r^2\right), \quad r \in (0, +\infty)$$

$$C'(r) = P\left(-\frac{32\pi}{r^2} + 8\pi r\right); \quad C''(r) = P\left(\frac{64\pi}{r^3} + 8\pi\right)$$

Seja $C'(r) = 0$: $8\pi r = \frac{32\pi}{r^2}$; $8\pi r^3 = 32\pi$; $r^3 = 4$; $r = \sqrt[3]{4}$ é o único número crítico. Portanto, o raio da base da lata é $\sqrt[3]{4}$ cm e a altura da lata é $\frac{16}{(\sqrt[3]{4})^2} = 4\sqrt[3]{4}$ cm. Como $C''(\sqrt[3]{4}) > 0$, essas dimensões dão um custo mínimo relativo, e pelo Teorema 4.8.1 (ii) elas dão o custo mínimo absoluto.

29. $R(x)$ é o rendimento total quando x unidades são vendidas: $R(x) = 200x$

$C(x)$ é o custo total da produção de x unidades por dia: $C(x) = 2x^2 + 40x + 1.400$

$P(x)$ é o lucro para x unidades vendidas : $P(x) = R(x) - C(x) = -2x^2 + 160x - 1.400, x \geq 0$

$P'(x) = -4x + 160 = 4(40 - x)$. $P'(x) > 0$ se $x < 40$ e $P'(x) < 0$ se $x > 40$. Logo, $P(x)$ tem um valor máximo absoluto se $x = 40$. A fábrica deveria produzir 40 unidades diariamente.

31. $R(X)$ é o rendimento quando x unidades são vendidas: $R(x) = px = (140 - x)x = 140x - x^2$

$C(x)$ é o custo total da produção de x unidades por dia: $C(x) = x^2 + 20x + 300$

$P(x)$ é o lucro por unidades vendidas : $P(x) = R(x) - C(x) = -2x^2 + 120x - 300, \quad x \geq 0$

$P'(x) = -4x + 120 = 4(30 - x)$. $P'(x) > 0$ se $x < 30$ e $P'(x) < 0$ se $x > 30$. Logo, $P(x)$ tem um valor máximo absoluto se $x = 30$ e $P(30) = -2(30)^2 + 120(30) - 300 = 1.500$.

O lucro máximo é $1.500.

33. Seja z o quadrado do número de unidades na distância da origem ao ponto (x,y) sobre a reta $3x+y=6$; $y=6-3x$. Então,

$z = x^2 + y^2 = x^2 + (6-3x)^2 = 10x^2 - 36x + 36$, $x \in (-\infty, +\infty)$; $z'(x) = 20x - 36$; $z''(x) = 20$

Um valor de x que torna z um mínimo absoluto torna a distância um mínimo absoluto.

Seja $z'(x) = 0$: $x = \frac{9}{5}$ é o único número crítico. Como $z''(\frac{9}{5}) > 0$, z tem um valor mínimo relativo quando $x = \frac{9}{5}$, e pelo Teorema 4.8.1(ii) esse é o valor mínimo absoluto.

Qdo $x = \frac{9}{5}$, $y = 6 - 3x = \frac{3}{5}$, então o ponto na reta dada que é mais próximo da origem é $P(\frac{9}{5}, \frac{3}{5})$. A reta dada tem -3 de inclinação. A reta que liga P à origem tem inclinação $\frac{3}{5}/\frac{9}{5} = \frac{1}{3}$. Logo, as duas retas são perpendiculares.

35. Seja r m o raio do semicírculo, de modo que 2r m seja a largura do retângulo. Então, a altura do retângulo é $\frac{1}{2}(10 - \pi r - 2r)$. A janela deixará passar o máximo de luz quando sua área for a maior. Se $A(r)$ m² for a área total da janela, então

$$A(r) = \frac{1}{2}\pi r^2 + 2r \cdot \frac{1}{2}(10 - \pi r - 2r) = 10r - \left(\frac{1}{2}\pi + 2\right)r^2, \quad r \in \left[0, \frac{10}{\pi + 2}\right] = I$$

$$A'(r) = 10 - (\pi + 4)r; \quad A''(r) = -(\pi + 4)$$

Seja $A'(r) = 0$: $10 = (\pi + 4)r$; $r = \frac{10}{\pi + 4}$ é o único número crítico. O raio do semicírculo é $\frac{10}{\pi + 4}$ m e a altura do retângulo é $\frac{1}{2}\left[10 - \frac{10(\pi + 2)}{\pi + 4}\right] = \frac{10}{\pi + 4}$ m também.

Como $A''\left(\frac{10}{\pi + 4}\right) < 0$, essas dimensões dão uma área máxima relativa, e pelo Teorema 3.8.1 elas indicam a área máxima absoluta. Como I é um intervalo fechado, o teorema do valor extremo também se aplica.

37. Se x km/h for a velocidade escalar do caminhão, o tempo que ele levará para completar 1 km será $\frac{1}{x}$ h. Se $C(x)$ for o custo total por quilômetros, então

$$C(x) = 8 + \frac{1}{300}x + 27\frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty); \quad C'(x) = \frac{1}{300} - \frac{27}{x^2}; \quad C''(x) = \frac{54}{x^3}$$

Seja $C'(x) = 0$: $\frac{1}{300} = \frac{27}{x^2}$; $x^2 = 8.100$; $x = \pm 90$. $x = 90$ é o único número crítico.

Como $C''(90) > 0$, o custo por km para o caminhão fazer uma viagem terá um mínimo relativo quando a velocidade escalar for 90 km/h e pelo Teorema 4.8.1(ii) esse será um mínimo absoluto.

39. Em t s após o caminhão passar pelo cruzamento, ele terá viajado 12t m, o carro terá viajado 9t m e a distância entre eles será s m. Queremos encontrar valores de t que tornarão s um mínimo absoluto. Esse valor de t será o mesmo que o valor de t que torna s^2 um mínimo absoluto. Seja $z = s^2$. Então,

$$z(t) = (12t)^2 + (36 - 9t)^2, \quad 0 \le t < \infty$$

$$z'(t) = 2(12t)(12) + 2(36 - 9t)(-9) = 450t - 648; \quad z''(t) = 450$$

Seja $z'(t) = 0$: $450t = 648$; $t = \frac{36}{25}$ é o único número crítico. Como $z''\left(\frac{36}{25}\right) > 0$, z tem um valor mínimo relativo quando $t = \frac{36}{25}$, e pelo Teorema 4.8.1 (ii) esse é um valor mínimo absoluto. Portanto, o caminhão e o carro estarão mais próximos um do outro $1\frac{11}{25}$ s após o caminhão ter passado pelo cruzamento.

41. A viga de 27 m toca a quina da parede e a parede oposta da passagem de 8 m. Veja a Figura 4.8.41. Se θ for a medida do ângulo agudo entre a viga e a passagem, então 8 cosec θ m da viga estarão na passagem; logo 27 − 8 cosec θ estará no corredor, formando um ângulo reto com a passagem. Seja s m a distância do outro extremo da viga, do lado do corredor. Queremos encontrar um valor máximo absoluto de s. Então,

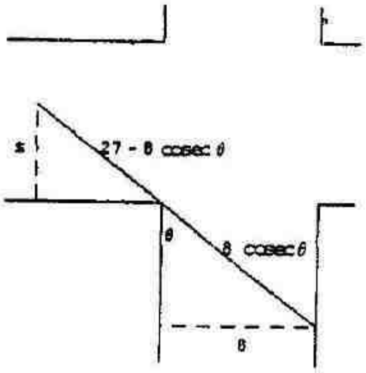


FIGURA 4.8.41

$$s(\theta) = (27 - 8\operatorname{cosec}\theta)\cos\theta = 27\cos\theta - 8\operatorname{cotg}\theta, \operatorname{sen}\theta \in \left[\frac{8}{27}, 1\right]$$

$$s'(\theta) = -27\operatorname{sen}\theta + 8\operatorname{cosec}^2\theta = \frac{8 - 27\operatorname{sen}^3\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

Seja $s'(\theta) = 0$: $27\operatorname{sen}^3\theta = 8$; $\operatorname{sen}^3\theta = \frac{8}{27}$; $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{3}$ de modo que $\cos\theta = \frac{1}{3}\sqrt{5}$, $\operatorname{cotg}\theta = \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

$$s(\theta)\Big]_{\operatorname{sen}\theta = 8/27} = 0, \quad s(\theta)\Big]_{\operatorname{sen}\theta = 2/3} = 27\left(\frac{1}{3}\sqrt{5}\right) - 8\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}\right) = 5\sqrt{5}, \quad s(\theta)\Big]_{\operatorname{sen}\theta = 1} = 0$$

$s(\theta)$ é contínua em um intervalo fechado; logo, o valor máximo absoluto de s é $5\sqrt{5}$. Então, a passagem deve ter, no mínimo, $5\sqrt{5} \approx 11{,}2$ de largura.

43. Seja V unidades cúbicas o volume específico do cone. Seja r unidades o raio da base, seja h unidades a altura e A unidades quadradas a superfície do cone. Queremos encontrar o valor de h/r quando A tem um valor mínimo absoluto.

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$; $h = 3V\pi^{-1}r^{-2}$. $A = \pi r\sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{\pi^2 r^4 + \pi^2 r^2 h^2} = (\pi^2 r^4 + 9V^2 r^{-2})^{1/2}$, $r \in (0, \infty)$.

$D_r A = \frac{1}{2}(\pi^2 r^4 + 9V^2 r^{-2})^{-1/2}(4\pi^2 r^3 - 18V^2 r^{-3}) = 2\pi^2 r^{-3}(\pi^2 r^4 + 9V^2 r^{-2})^{-1/2}(r^6 - \frac{9}{2}\pi^{-2}V^2)$

Como $D_r A < 0$ se $r < (\frac{9}{2}\pi^{-2}V^2)^{1/6} = r_0$ e $D_r A > 0$ se $r > r_0$, tem um valor mínimo absoluto qdo $r = r_0$. Então, $\frac{h}{r} = \frac{3V}{\pi r^3} = \frac{3V}{\pi(\frac{9}{2}\pi^{-2}V^2)^{1/2}} = \sqrt{2}$.

45. Seja a unidades o raio da esfera dada, sendo a uma constante. Seja r unidades o raio da base do cone e h unidades a altura do cone.

Veja na Figura 4.8.45 uma secção do cone e a esfera inscrita. Como o triângulo AHC é semelhante ao triângulo retângulo OTC, então

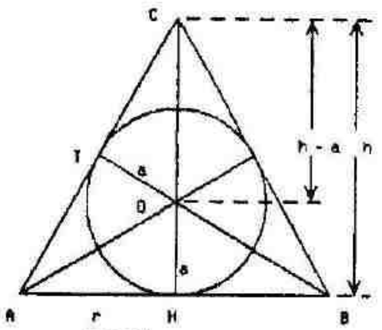


FIGURA 4.8.45

$$\frac{h}{r} = \frac{\sqrt{(h-a)^2 - a^2}}{a}; \quad r = \frac{ah}{\sqrt{h^2 - 2ah}}; \quad r^2 = \frac{a^2h^2}{h^2 - 2ah}$$

Se V(h) unidades cúbicas for o volume do cone, então

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a^2h^2}{h^2 - 2ah}\right)h = \frac{\pi a^2 h^2}{3h - 6a}, \quad h \in (2a, +\infty)$$

$$V'(h) = \frac{2\pi a^2 h(3h - 6a) - 3(\pi a^2 h^2)}{(3h - 6a)} = \frac{3\pi a^2 h(2h - 4a - h)}{(3h - 6a)^2} = \frac{3\pi a^2 h(h - 4a)}{(3h - 6a)^2},$$

Como $V'(h) < 0$ se $2a < h < 4a$ e $V'(h) > 0$ se $h > 4a$, h tem um valor mínimo absoluto qdo $h = 4a$. Então, $\frac{h}{r} = \frac{\sqrt{(h-a)^2 - a^2}}{a} = \frac{\sqrt{(3a)^2 - a^2}}{a} = 2\sqrt{2}$.

47. Seja r unidades o raio da base do cone e h unidades a altura do cone. Veja a Figura 4.8.47.

Se 2θ for a medida em radianos do ângulo vertical do cone. Então,

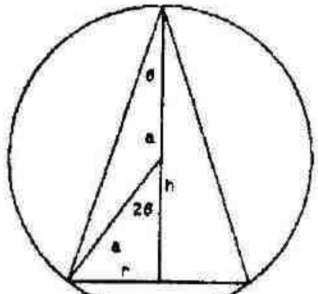


FIGURA 4.8.47

$$r = a \operatorname{sen} 2\theta \quad e \quad h = a + a\cos 2\theta$$

Se V(θ) unidades cúbicas for o volume do cone, então

$$V(\theta) = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h = \tfrac{1}{3}\pi(a \operatorname{sen} 2\theta)^2(a + a\cos 2\theta)$$

$$= \tfrac{1}{3}\pi a^3(\operatorname{sen}^2 2\theta)(1 + \cos 2\theta) = \tfrac{1}{3}\pi a^3(1 - \cos^2 2\theta)(1 + \cos 2\theta)$$

$$V'(\theta) = \tfrac{1}{3}\pi a^3[4\cos 2\theta \operatorname{sen} 2\theta(1 + \cos 2\theta) + (1 - \cos^2 2\theta)(-2\operatorname{sen} 2\theta)]$$

$$= \tfrac{2}{3}\pi a^3 \operatorname{sen} 2\theta(1 + \cos 2\theta)[2\cos 2\theta - (1 - \cos 2\theta)]$$

$$= \tfrac{2}{3}\pi a^3 \operatorname{sen} 2\theta(1 + \cos 2\theta)(3\cos 2\theta - 1)$$

Seja $V'(\theta) = 0$: $\operatorname{sen} 2\theta = 0$, $\cos 2\theta = -1$, $\cos 2\theta = \tfrac{1}{3}$.

Como $2\theta \in [0, \pi]$, o único número crítico é quando $\cos 2\theta = \tfrac{1}{3}$.

$$V(0) = 0, \quad V(\theta)\Big]_{\cos 2\theta = 1/3} = \frac{32}{27}a^3, \quad V(\tfrac{1}{2}\pi) = 0$$

Como V é contínua no intervalo fechado $[0, \tfrac{1}{2}\pi]$, o valor máximo absoluto de V ocorre quando $\cos 2\theta = \tfrac{1}{3}$. Então, $h = a + \tfrac{1}{3}a = \tfrac{4}{3}a$.

EXERCÍCIOS 4.9 A Diferencial

1. $y = x^2$; $x = 2$; $\Delta x = 1$. Seja $f(x) = x^2$.

   (a) $dy = f'(x)\Delta x = 2x\Delta x = 2\cdot 2\cdot 1 = 4$; $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(2 + 1) - f(2) = 9 - 4 = 5$

3. $y = \sqrt[3]{x}$; $x = 8$; $\Delta x = 2$. Seja $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

   (a) $dy = f'(x)dx = \frac{1}{3}x^{-2/3}dx = \frac{1}{3}(8)^{-2/3}(2) = \frac{1}{6} \approx 0,167$

   $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(8 + 2) - f(8) = \sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{10} - 2 \approx 0,154$

5. $y = 6 - 3x - 2x^2$. Seja $f(x) = 6 - 3x - 2x^2$.

   (a) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 6 - 3(x + \Delta x) - 2(x + \Delta x)^2 - 6 + 3x + 2x^2 = -3\Delta x - 4x\Delta x - 2(\Delta x)^2$

   $= (-3 - 4x)\Delta x - 2(\Delta x)^2$

   (b) $dy = f'(x)dx = (-3 - 4x)\Delta x$ (c) $\Delta y - dy = -2(\Delta x)^2$

7. $y = x^3 - x^2$. Seja $f(x) = x^3 - x^2$.

   (a) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - (x + \Delta x)^2 - x^3 + x^2 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2x\Delta x - (\Delta x)^2$

   (b) $dy = f'(x)dx = (3x^2 - 2x)\Delta x$ (c) $\Delta y - dy = 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - (\Delta x)^2$

9. $y = \dfrac{2}{x - 1}$. Seja $f(x) = \dfrac{2}{x - 1}$.

   (a) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \dfrac{2}{(x + \Delta x) - 1} - \dfrac{2}{x - 1} = \dfrac{-2\Delta x}{(x - 1)(x + \Delta x - 1)}$

   (b) $dy = f'(x)dx = -\dfrac{2}{(x - 1)^2}dx = \dfrac{-2\Delta x}{(x - 1)^2}$

   (c) $\Delta y - dy = \dfrac{-2\Delta x}{(x - 1)(x + \Delta x - 1)} + \dfrac{2\Delta x}{(x - 1)^2} = \dfrac{-2\Delta x(x - 1) + 2\Delta x(x + \Delta x - 1)}{(x - 1)^2(x + \Delta x - 1)} = \dfrac{2(\Delta x)^2}{(x - 1)^2(x + \Delta x - 1)}$

11. $y = x^2 - 3x$; $x = 2$; $\Delta x = 0,03$. Seja $f(x) = x^2 - 3x$.

   (a) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(2,03) - f(2) = [(2,03)^2 - 3(2,03)] - (4 - 6) = -1,961 + 2 = 0,0309$

   (b) $dy = f'(x)dx = (2x - 3)\Delta x = (4 - 3)(0,03) = 0,03$ (c) $\Delta y - dy = 0,0309 - 0,03 = 0,0009$

13. $y = \dfrac{1}{x}$; $x = -2$; $\Delta x = -0,1$. Seja $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

   (a) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(-2,1) - f(-2) = -\dfrac{1}{2,1} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{42} \approx 0,0238$

   (b) $dy = f'(x)dx = -\dfrac{1}{x^2}\Delta x = -\dfrac{(-0,1)}{4} = \dfrac{1}{40} = 0,025$ (c) $\Delta y - dy = \dfrac{1}{42} - \dfrac{1}{40} = -\dfrac{2}{1680} = -\dfrac{1}{840} \approx -0,0012$

15. $y = x^3 + 1$; $x = 1$; $\Delta x = -0,5$. Seja $f(x) = x^3 + 1$.

   (a) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(0,5) - f(1) = [(0,5)^3 + 1] - 2 = 1,125 - 2 = -0,875$

   (b) $dy = f'(x)dx = 3x^2\Delta x = 3(1)^2(-0,5) = -1,5$ (c) $\Delta y - dy = -0,875 - (-1,5) = 0,625$

17. $y = (3x^2 - 2x + 1)^3$; $dy = 3(3x^2 - 2x + 1)^2(6x - 2)dx$

19. $y = x^2\sqrt[3]{2x + 3}$

   $dy = \left\{2x(2x + 3)^{1/3} + x^3\left[\frac{1}{3}(2x + 3)^{-2/3}(2)\right]\right\}dx = \dfrac{2x}{3}(2x + 3)^{-2/3}[3(2x + 3) + x]dx = \dfrac{2x(7x + 9)dx}{3(2x + 3)^{2/3}}$

21. $y = \dfrac{2 + \cos x}{2 - \operatorname{sen} x}$; $dy = \dfrac{-\operatorname{sen} x(2 - \operatorname{sen} x) - (-\cos x)(2 + \cos x)}{(2 - \operatorname{sen} x)^2}dx$

   $= \dfrac{(-2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x + 2\cos x + \cos^2 x)}{(2 - \operatorname{sen} x)^2}dx = \dfrac{(1 - 2\operatorname{sen} x + 2\cos x)}{(2 - \operatorname{sen} x)^2}dx$

23. $y = \operatorname{tg}^2 x \ \sec^2 x$

   $dy = [(2\operatorname{tg} x\sec^2 x)\sec^2 x + \operatorname{tg}^2 x(2\sec x\sec x\operatorname{tg} x)]dx = 2\operatorname{tg} x\sec^2 x(\sec^2 x + \operatorname{tg}^2 x)dx$

25. $3x^2 + 4y^2 = 48$; $6x\,dx + 8y\,dy = 0$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{3x}{4y}$

27. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$; $\frac{1}{2}x^{-1/2}dx + \frac{1}{2}y^{-1/2}dy = 0$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^{-1/2}}{y^{-1/2}} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

29. $\operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}$; $\operatorname{sen}(x - y) = \frac{1}{2}$; $\cos(x - y)(dx - dy) = 0$. $dx - dy = 0$; $\frac{dy}{dx} = 1$ ou $\cos(x - y) = 0$; $x - y = (n + \frac{1}{2})\pi$; $dx - dy = 0$; $\frac{dy}{dx} = 1$

31. $x = 2t^2$, $y = 3t$ (a) $dx = 4t\,dt$, $dy = 3\,dt$ – (b) $\frac{dy}{dx} = \frac{3\,dt}{4t\,dt} = \frac{3}{4t}$

(c) Como $y = 3t$, $t = \frac{y}{3}$; assim, $x = 2\left(\frac{y}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}y^2$. Logo, $1 = \frac{4}{9}y\frac{dy}{dx}$; então, $\frac{dy}{dx} = \frac{9}{4y}$.

33. $x = 2\cos t$, $y = 3\operatorname{sen} t$, $0 < t < \pi$

(a) $dx = -2\operatorname{sen} t\,dt$, $dy = 3\cos t\,dt$ (b) $\frac{dy}{dx} = \frac{3\cos t\,dt}{-2\operatorname{sen} t\,dt} = -\frac{3\cos t}{2\operatorname{sen} t}$

(c) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = \frac{4\cos^2 t}{4} + \frac{9\operatorname{sen}^2 t}{9} = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$; então, $\frac{2x}{4} + \frac{2y}{9}\frac{dy}{dx} = 0$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{9x}{4y}$

35. (a) Seja x cm o comprimento de uma aresta do cubo e V cm^3 o volume do cubo.

Então, $V = x^3$; $dV = 3x^2dx$. Se $x = 15$ e $dx = \Delta x = 0,01$, então, $\Delta V \approx dV = 3(15)^2(0,01) = 6,75$.

Logo, o erro aproximado no cálculo do volume é $6,75$ cm^3.

(b) Seja A cm^2 a área da face do cubo.

Então, $A = x^2$; $dA = 2x\,dx$. Se $x = 15$ e $dx = \Delta x = 0,01$, então, $\Delta A \approx dA = 2(15)(0,01) = 0,3$.

Logo, o erro aproximado no cálculo da área de uma face é $0,3$ cm^2.

37. Seja r m o raio e V m^2 o volume do tanque cilíndrico. A altura do tanque é 10 m.

Então, $V = 10\pi r^2$; $dV = 20\pi r\,dr$. Se $r = 6$ e $dr = \Delta r = \frac{1}{50}$, então, $\Delta V \approx dV = 20\pi(6)\left(\frac{1}{50}\right) = \frac{12}{5}\pi$.

Logo, a quantidade aproximada do material de revestimento é $\frac{12}{5}\pi$ m^3.

39. A cm^2 é a área da queimadura de forma circular quando o raio é r cm.

Então, $A = \pi r^2$; $dA = 2\pi r\,dr$. Se $r = 1$ e $dr = -0,2$, então $\Delta A \approx dA = 2\pi(1)(-0,02) = -0,4\pi$.

Logo, a diminuição aproximada na área da queimadura é $0,4\pi$ cm^2.

41. V cm^3 é o volume do tumor esférico quando o raio é r cm.

Então $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; $dV = 4\pi r^2 dr$. Se $r = 1,5$ e $dr = 0,1$, então $\Delta V \approx dV = 4\pi(1,5)^2(0,1) = 0,9\pi$.

Logo, o aumento aproximado no volume do tumor é $0,9\pi$ cm^3.

43. Seja R a medida da resistência elétrica de um fio, x, a medida de seu diâmetro e L a medida de seu comprimento. L é constante. Para qualquer constante k,

$R = \frac{kL}{x^2}$; $dR = \frac{-2kL}{x^3}dx$; $\frac{dR}{R} = \frac{-2kL}{x^3}dx \cdot \frac{x^2}{kL} = -2\frac{dx}{x}$. Se $\left|\frac{dx}{x}\right| = \left|\frac{\Delta x}{x}\right| = 2\% = 0,02$, então $\left|\frac{\Delta R}{R}\right| \approx \left|\frac{dR}{R}\right| = |-2(0,02)| = 0,04 = 4\%$. Logo, o erro aproximado na resistência é 4%.

45. Se V m^3 for o volume de um gás, e P N/m^2 for a sua pressão, a lei de Boyle estabelece que para uma constante C, $P = \frac{C}{V}$; $dP = -\frac{C}{V^2}dV$; $V^2 = -\frac{C}{dP}dV$.

Para achar o menor V possível, tomemos $dP = \pm 0,001C$. Então, a largura $dV = \pm 0,1$,

$V^2 = -\frac{C}{\mp 0,001C}(\pm 0,1) = 100$; $V = 10$. Logo, o menor recipiente tem um volume de 10 m^3.

EXERCÍCIOS 4.10 Solução Numérica de Equações pelo Método de Newton (Suplementar)

Uma boa calculadora para ser usada nesses Exercícios é a TI-30. O valor de x deverá ser arquivado na memória (STO nas TI-30, Min em algumas outras) no início do problema e quando o novo valor de x for mostrado, no final de cada iteração. Quando você precisar de x, basta pressionar o botão (RCL na TI-30, RM em algumas outras). Assim, os passos para cada iteração são os mesmos. Muitas calculadoras (incluindo a TI-30) não elevam números negativos a uma potência, então, x^3 deveria ser calculado como $x^2 \cdot x$ quando x é negativo. Lembre-se de usar a tecla de multiplicação para multiplicações implícitas. Sempre use parênteses para o numerador e o denominador, e termine cada iteração com "=STO", como é mostrado nas soluções.

1. $x^3 - 4x^2 - 2 = 0$. Seja $f(x) = x^3 - 4x^2 - 2$; $f'(x) = 3x^2 - 8x$

Como $f(4) = -2$ e $f(5) = 23$, $f(x) = 0$ tem uma raiz entre 4 e 5; tome $x_1 = 4$.

$x_3 = x_4 = x = 4{,}1179$ para quatro casas decimais.

n	x_n −	$(x_n^3 - 4x_n - 2)$ ÷	$(3x_n^2 - 8x_n)$	= STO
1	4	−2	16	4,125
2	4,125	0,126961	18,0469	4,11797
3	4,11797	0,00041	17,9292	4,11794

3. $x^5 - x + 1 = 0$. Seja $f(x) = x^5 - x + 1$; $f'(x) = 5x^4 - 1$

Como $f(-2) = -29$ e $f(-1) = 1$, $f(x) = 0$ tem uma raiz entre −2 e −1; tomemos $x_1 = -1$.

$x_5 = x_4 = x = -1{,}1673$ até quatro casas decimais.

n	x_n −	$(x_n^5 - x_n + 1)$ ÷	$(5x_n^4 - 1)$	= STO
1	−1	−0,80116	11,207	−1,17846
2	−1,17846	−0,09440	8,6434	−1,16754
3	−1,16754	−0,00193	8,2900	−1,16730
4	−1,16730	0	8,2834	−1,16730

5. $x^2 - 4x - 8 = 0$. Seja $f(x) = x^2 - 4x - 8$; $f'(x) = 3x^2 - 4$

Como $f(2) = -8$ e $f(3) = 7$, $f(x) = 0$ tem uma raiz positiva entre 2 e 3; tomemos $x_1 = 3$.

$x_4 = x_5 = x = 2{,}6494$ até quatro casas decimais.

n	x_n −	$(x_n^3 - 4x_n - 8)$ ÷	$(3x_n^2 - 4)$	= STO
1	3	7	23	2,69565
2	2,69565	0,80546	17,7996	2,65040
3	2,65040	0,01646	17,0739	2,64944
4	2,64944	0	17,0585	2,64944

7. $x^4 - 10x + 5 = 0$. Seja $f(x) = x^4 - 10x + 5$; $f'(x) = 4x^3 - 10$

Como $f(0) = 5$ e $f(1) = -4$, $f(x) = 0$ tem uma raiz positiva entre 0 e 1; tomemos $x_1 = 0$,

$x_3 = x_4 = x = 0{,}5066$ até quatro casas decimais.

n	x_n −	$(x_n^4 - 10x_n + 5)$ ÷	$(4x_n^3 - 10)$	= STO
1	0	5	−10	0,5
2	0,5	0,0625	−9,5	0,506579
3	0,506579	0,00006	−9,48	0,506586

9. $2x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 4 = 0$. Seja $f(x) = 2x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 4$; $f'(x) = 8x^3 - 6x^2 + 2x + 3$

Como $f(-2) = 42$ e $f(-1) = -2$, $f(x) = 0$ tem uma raiz negativa entre -2 e -1.

Tomemos $x_1 8 = -1$. Então, $x_4 = x_5 = x = -1,1282$ até quatro casas decimais.

n	x_n	$-(2x_n^4 - 2x_n^3 + x_n^2 + 3x_n - 4)$	$\div (8x_n^3 - 6x_n^2 + 24x_n + 3)$	= STO
1	-1	-2	-13	-1,15385
2	-1,15835	0,407238	-19,5853	-1,12897
3	-1,12897	0,014619	-18,4169	-1,12817
4	-1,12817	0,000013	-18,3803	-1,12817

11. $x = \sqrt{3}$ ou, equivalentemente $x^2 - 3 = 0$. Seja $f(x) = x^2 - 3$; $f'(x) = 2x$

Como $f(1) = -2$ e $f(2) = 1$, $f(x) = 0$ tem uma raiz positiva entre 1 e 2; tomemos $x_1 = 2$.

$x_4 = x_5 = x = 1,73205$ até cinco casas decimais.

n	x_n	$-(x_n^2 - 3)$	$\div (2x_n)$	= STO
1	2	1	4	1,75
2	1,75	0,0625	3,5	1,73214
3	1,73214	0,000319	3,464	1,73205
4	1,73205	0	3,464	1,73205

13. $x = \sqrt[3]{6}$ ou, equivalentemente $x^3 - 6 = 0$. Seja $f(x)\ 8 = x^3 - 6$; $f'(x) = 3x^2$

Como $f(1) = -5$ e $f(2) = 2$, $f(x) = 0$ tem uma raiz entre 1 e 2; tomemos $x_1 = 2$.

$x_4 = x_5 = x = 1,81712$ até cinco casas decimais.

n	x_n	$-(x_n^3 - 6)$	$\div (3x_n^2)$	= STO
1	2	2	12	1,83333
2	1,83333	0,162039	10,083	1,81726
3	1,87126	0,001417	9,907	1,81712
4	1,81712	0	9,906	1,817

15. $y = x$; $y = \cos x$. No ponto de intersecção $x - \cos x = 0$. Seja $f(x) = x - \cos x$;

$f'(x) = 1 + \operatorname{sen} x$. Como $f(0) = 0$ e $f(\frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2}\pi$, a abscissa do ponto de intersecção está entre 0 e $\frac{1}{2}\pi$; tomemos $x_1 = 0$.

Nota: A maioria das calculadoras funcionam em graus; coloque sua calculadora em radianos (na TI-30, pressione uma vez o botão DRG). Para obter cos x você deve chamar primeiro x, depois pressione o botão co-seno; o mesmo deve ser feito para sen x etc.

$x_4 = x_5 = x = 0,7391$ até quatro casas decimais.

n	x_n	$-(x - \cos x)$	$\div (1 + \operatorname{sen} x)$	= STO
1	0	-1	1	1
2	1	0,459698	1,84147	0,750364
3	0,750364	0,018923	1,68191	0,739113
4	0,739113	0,000047	1,67363	0,739085

17. $y = x^2$, $y = \text{sen } x$. No ponto de intersecção, $x^2 - \text{sen } x = 0$. Seja $f(x) = x^2 - \text{sen } x$; $f'(x) = 2x - \cos x$. Como $f(\frac{1}{4}\pi) = -0,0902$ e $f(\frac{1}{2}\pi) = 1,4674$, $f(x) = 0$ tem uma raiz entre $\frac{1}{4}\pi$ e $\frac{1}{2}\pi$; tomemos $x_1 = \frac{1}{4}\pi$ 0,7854. Veja a Nota da Solução do Exercício 15.

$x_4 = x_5 = x = 0,8767$ até quatro casas decimais.

n	x_n −	$(x_n^2 - \text{sen } x_n)$ ÷	$(2x_n - \cos x_n)$	= STO
1	0,7854	−0,090255	0,8637	0,889899
2	0,889899	0,014912	1,1503	0,876935
3	0,876935	0,000733	1,1144	0,876726
4	0,876726	0	1,1138	0,876726

19. $\text{tg } x + x = 0$. Seja $f(x) = \text{tg } x + x$; $f'(x) = \sec^2 x + 1 = \text{tg}^2 x + 2$ (a função secante não está disponível na maioria das calculadoras e computadores). Fica claro, de um esboço dos gráficos de $y = \text{tg } x$ e $y = -x$ que $\alpha_1 \in (\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$, $\alpha_2 \in (\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi)$, ..., $\alpha_n \in (n\pi - \frac{1}{2}\pi, n\pi + \frac{1}{2}\pi)$ e que as raízes estão se aproximando no extremo esquerdo. Para encontrarmos α_n, tomemos $x_1 = n\pi - \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{n\pi}$; o método de Newton falhará se x_1 for tomado muito além de $n\pi - \frac{1}{2}\pi$. Veja a Nota na Solução do Exercício 15.

P/ encontrar α_1, tomemos $x_1 = \pi - \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{\pi} \approx 1,8891$ (x_1 deve ser $\leq 3,0$). Então, $x_4 = x_5 = \alpha_1 = 2,0288$.

P/ encontrar α_2, tomemos $x_1 = 2\pi - \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2\pi} \approx 4,8715$ (x_1 deve ser $\leq 5,1$). Então, $x_4 = x_5 = \alpha_2 = 4,9132$.

n	x_n −	$(\text{tg } x_n + x_n)$ ÷	$(\text{tg}^2 x_n + 2)$	= STO
1	1,88910	−1,14573	11,2102	1,99130
2	1,99130	−0,24492	7,0007	2,02629
3	2,02629	−0,01515	6,1675	2,02875
4	2,02875	−0,00006	6,1161	2,02876

n	x_n −	$(\text{tg } x_n + x_n)$ ÷	$(\text{tg}^2 x_n + 2)$	= STO
1	4,87150	−1,36030	40,8354	4,90481
2	4,90481	−0,22777	28,3434	4,91285
3	4,91285	−0,00871	26,2218	4,91318
4	4,91318	0	26,1394	4,91318

21. $\text{tg } x = 0$. Seja $f(x) = \text{tg } x$; $f'(x) = \sec^2 x$. Então, $\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{\text{tg } x}{\sec^2 x} = \text{sen } x \cos x$.

Tomemos $x_1 = 3$. Então, $x_2 = x_3 = \pi = 3,14159$ para cinco casas decimais.

n	x_n −	$(\text{sen } x_n \cos x_n)$	= STO
1	3	−0,139708	3,13971
2	3,13971	−0,001885	3,14159
3	3,14159	0	3,14159

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 4

1. $f(x) = \sqrt{5+x}$; $x \in [-5, +\infty)$; $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{5+x}}$

Não há números críticos de f. $f'(x) > 0$ para todo x em $(-5, +\infty)$. Portanto, f é crescente em $[-5, +\infty)$. Como $f(-5) = 0$, o valor mínimo absoluto de f é 0, ocorrendo quando $x = -5$. Não há valor máximo absoluto.

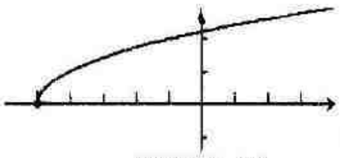


FIGURA 4-1

3. $f(x) = \frac{5}{2}x^6 - 3x^5$; $x \in [-1, 2] = I$; $f'(x) = 15x^5 - 15x^4 = 15x^3(x-1)$

Seja $f'(x) = 0$; $x = 0$, $x = 1$. Os números críticos de f são 0 e 1. f é contínua em I; logo, os extremos absolutos ocorrem em um ponto extremo ou em um número crítico.

$$f(-1) = \frac{11}{2}, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = -\frac{1}{2}, \quad f(2) = 64$$

O valor mínimo absoluto é $f(1) = -\frac{1}{2}$ e o valor máximo absoluto é $f(2) = 64$.

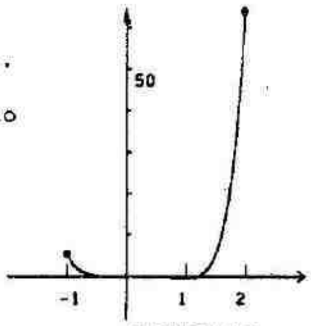


FIGURA 4-3

5. $f(x) = |9 - x^2|$, $x \in [-2, 3] = I$; $f'(x) = \operatorname{sgn}(9 - x^2)(-2x)$, $x \neq \pm 3$

$f'(0) = 0$, e $f'(-3)$ e $f'(3)$ não existem. Os números críticos de f são 0 e 3. f é contínua em I; assim, os extremos absolutos ocorrem em um ponto terminal ou em um número crítico.

$$f(-2) = 5, \quad f(0) = 9, \quad f(3) = 0$$

O valor mínimo absoluto é $f(3) = 0$ e o valor máximo absoluto é $f(0) = 9$.

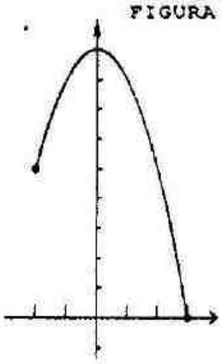


FIGURA 4-5

7. $f(x) = x^4 - 12x^2 + 36$, $x \in [0, 5] = I$; $f'(x) = 4x^3 - 24x = 4x(x^2 - 6)$

Seja $f'(x) = 0$: $x = 0$, $x = \pm\sqrt{6}$. O número crítico é $\sqrt{6}$. f é contínua em I; então, os extremos absolutos ocorrem em uma ponta ou um número crítico.

$$f(0) = 36, \quad f(\sqrt{6}) = 0, \quad f(5) = 361$$

O valor mínimo absoluto é $f(\sqrt{6}) = 0$ e o valor máximo absoluto é $f(5) = 361$.

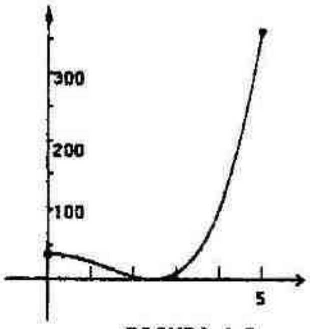


FIGURA 4-7

9. $f(x) = 2 \operatorname{sen} 3x$, $x \in [-\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi] = I$, $3x \in [-\pi, \pi]$; $f'(x) = 6 \cos 3x$

Seja $f'(x) = 0$: $\cos 3x = 0$; $3x = -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi$; $x = -\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi$. Os números críticos são $-\frac{1}{6}\pi$ e $\frac{1}{6}\pi$. f é contínua em I; logo, os extremos absolutos ocorrem em um extremo ou em um número crítico.

$$f(-\tfrac{1}{3}\pi) = 0, \quad f(-\tfrac{1}{6}\pi) = -2, \quad f(\tfrac{1}{6}\pi) = 2, \quad f(\tfrac{1}{3}\pi) = 0$$

O valor mínimo absoluto é $f(-\frac{1}{6}\pi) = -2$ e

o valor máximo absoluto é $f(\frac{1}{6}\pi) = 2$.

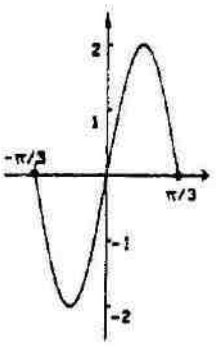


FIGURA 4-9

11. $f(x) = \operatorname{tg} 4x$; $x \in \left[-\frac{1}{8}\pi, \frac{1}{12}\pi\right] = I$; $f'(x) = 4 \sec^2 4x$

Como $\lim_{x \to -\pi/8^+} f(x) = -\infty$, f não tem valor mínimo absoluto em I.

Como $f'(x) > 0$, f é crescente.

Assim, $f\left(\frac{1}{12}\pi\right) = \sqrt{3}$ é o valor máximo absoluto de f em I.

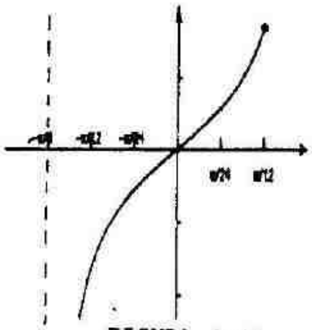


FIGURA 4-11

13. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$; $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$; $f''(x) = 6x + 6 = 6(x + 1)$

Seja $f'(x) = 0$: $x = 0$, $x = -2$. Seja $f''(x) = 0$: $x = -1$

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão: f; gráfico
$x < -2$		+	−	crescente; côncavo para baixo
$x = -2$	0	0	−	máximo relativo; côncavo para baixo
$-2 < x < -1$		−	−	decrescente; côncavo para baixo
$x = -1$	−2	−3	0	decrescente; ponto de inflexão
$-1 < x < 0$		−	+	decrescente; côncavo para cima
$x = 0$	−4	0	+	mínimo relativo; côncavo para cima
$0 < x$		+	+	crescente; côncavo para cima

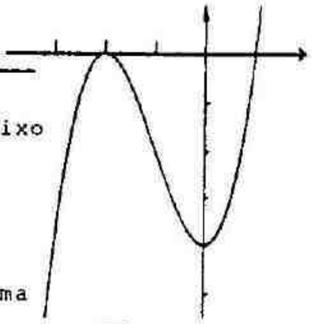


FIGURA 4-13

15. $f(x) = (x - 4)^2(x + 2)^3$

$f'(x) = 2(x - 4)(x + 2)^3 + 3(x + 2)^2(x - 4)^2 = (x - 4)(x + 2)^2[2(x + 2) + 3(x - 4)]$

$= (x - 4)(x + 2)^2(5x - 8)$

$f''(x) = (x + 2)^2(5x - 8) + 2(x - 4)(x + 2)(5x - 8) + 5(x - 4)(x + 2)^2$

$= (x + 2)(5x^2 + 2x - 16 + 10x^2 - 56 + 64 + 5x^2 - 10x - 40) = (x + 2)(20x^2 - 64x + 8)$

Seja $f'(x) = 0$: $x = 4$, $x = -2$, $x = \frac{8}{5} = 1,6$

Seja $f''(x) = 0$: $x = -2$, $x = \frac{8 - 3\sqrt{6}}{5} = x_1 \approx 0,130$, $x = \frac{8 + 3\sqrt{6}}{5} = x_2 \approx 3,070$

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão: f; gráfico
$x < -2$		+	−	crescente; côncavo para baixo
$x = -2$	0	0	0	ponto de inflexão a reta tangente é horizontal
$-2 < x < x_1$		+	+	crescente; côncavo para cima
$x = x_1$	144,7	129,1	0	crescente; ponto de inflexão
$x_1 < x < 1,6$		+	−	crescente; côncavo para baixo
$x = 1,6$	268,7	0	−	máximo relativo; côncavo para baixo
$1,6 < x < x_2$		−	−	decrescente; côncavo para baixo
$x = x_2$	112,8	−175,7	0	decrescente; ponto de inflexão
$x_2 < x < 4$		−	+	decrescente; côncavo para cima
$x = 4$	0	0	+	mínimo relativo; côncavo para cima
$4 < x$		+	+	crescente; côncavo para cima

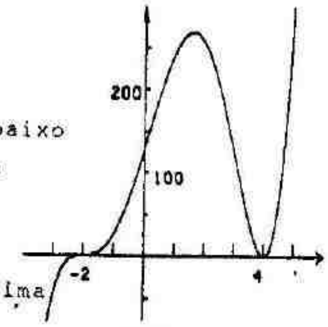


FIGURA 4-15

17. $f(x) = (x - 4)^{1/3} - 3$; $f'(x) = \frac{1}{3}(x - 4)^{-2/3}$; $f''(x) = -\frac{2}{9}(x - 4)^{-5/3}$

$f'(x)$ e $f''(x)$ nunca são 0; $f'(4)$ e $f''(4)$ não existem

e 4 está no domínio de f.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão: f; gráfico
$x < 4$		+	+	crescente; côncavo para cima
$x = 4$	−3	n.e	n.e	ponto de inflexão tangente vertical porque $\lim_{x \to 4} f'(x) = +\infty$
$4 < x$		+	−	crescente; côncavo para baixo

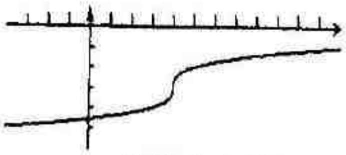


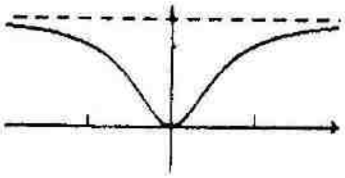
FIGURA 4-17

19. $f(x) = \frac{4x^2}{3x^2 + 1}$; $f'(x) = \frac{8x(3x^2 + 1) - 4x^2(6x)}{(3x^2 + 1)^2} = \frac{8x}{(3x^2 + 1)^2}$

$$f''(x) = \frac{8(3x^2 + 1)^2 - 8x \cdot 2(3x^2 + 1)(6x)}{(3x^2 + 1)^4} = \frac{8(1 - 9x^2)}{(3x^2 + 1)^3}$$

Seja $f'(x) = 0$: $x = 0$. Seja $f''(x) = 0$: $x = \pm \frac{1}{3}$

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão: f; gráfico
$x < -\frac{1}{3}$		−	−	decrescente; côncavo para baixo
$x = -\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{2}$	0	decrescente; ponto de inflexão
$-\frac{1}{3} < x < 0$		−	+	decrescente; côncavo para cima
$x = 0$	0	0	+	mínimo relativo; côncavo para cima
$0 < x < \frac{1}{3}$		+	+	crescente; côncavo para cima
$x = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	0	crescente; ponto de inflexão
$\frac{1}{3} < x$		+	−	crescente; côncavo para baixo



Como $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{4}{3}$ ou $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{4}{3}$, $y = \frac{4}{3}$ é uma assíntota horizontal.

FIGURA 4-19

21. $f(x) = \frac{5x^2}{x^2-4}$; $f'(x) = \frac{10x(x^2-4)-5x^2(2x)}{(x^2-4)^2} = \frac{-40x}{(x^2-4)^2}$

$f''(x) = \frac{-40(x^2-4)^2 + 40x \cdot 2(x^2-4)(2x)}{(x^2-4)^4} = \frac{40(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$

Seja $f'(x) = 0$: $x = 0$. $f''(x)$ nunca é 0. $f(2)$ não é definida.

	f(x)	f'(x)	f"(x)	Conclusão
$x < -2$		+	+	crescente; côncavo para cima
$x = -2$	n.e.	n.e.	n.e.	assintota vertical, pois $\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$
$-2 < x < 0$		+	-	crescente; côncavo para baixo
$x = 0$	0	0	-	máximo relativo; côncavo para baixo
$0 < x < 2$		-	-	decrescente; côncavo para baixo
$x = 2$	n.e.	n.e.	n.e.	assintota vertical, pois $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$
$2 < x$		-	+	decrescente; côncavo para cima

Como $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 5$ ou $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 5$, $y = 5$ é uma assintota horizontal.

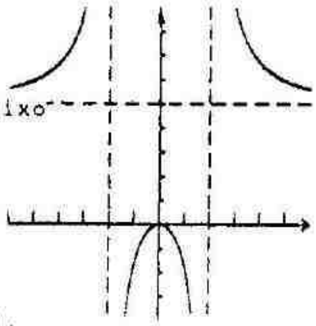


FIGURA 4-21

23. $f(x) = \frac{x^2}{x-3} = x + 3 + \frac{9}{x-3} = x + 3 + g(x)$; $f'(x) = 1 - \frac{9}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x}{(x-3)^2}$; $f''(x) = \frac{18}{(x-3)^3}$

Seja $f'(x) = 0$: $x(x-6) = 0$; $x = 0$, $x = 6$. $f''(x)$ nunca é 0. $f(3)$ não é definida.

	f(x)	f'(x)	f"(x)	Conclusão: f; gráfico
$x < 0$		+	-	crescente; côncavo para baixo
$x = 0$	0	0	-	máximo relativo; côncavo para baixo
$0 < x < 3$		-	-	decrescente; côncavo para baixo
$x = 3$	n.e.	n.e.	n.e.	assintota vertical, pois $\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$
$3 < x < 6$		-	+	decrescente; côncavo para cima
$x = 6$	12	0	+	mínimo relativo; côncavo para cima
$6 < x$		+	+	crescente; côncavo para cima

Como $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$ ou $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$, $y = x + 3$ é uma assintota oblíqua.

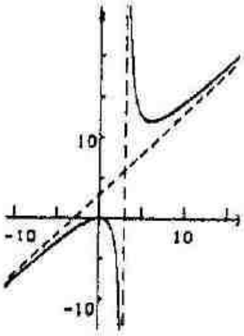


FIGURA 4-23

25. $f(x) = \begin{cases} (1-x)^3 & \text{se } x \leq 1 \\ (x-1)^3 & \text{se } 1 < x \end{cases}$;

$f'(x) = \begin{cases} -3(1-x)^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 3(x-1)^2 & \text{se } 1 < x \end{cases}$; $f''(x) = \begin{cases} 6(1-x) & \text{se } x \leq 1 \\ 6(x-1) & \text{se } 1 < x \end{cases}$

Seja $f'(x) = 0$: $x = 1$. Seja $f''(x) = 0$: $x = 1$

	f(x)	f'(x)	f"(x)	Conclusão: f; gráfico
$x < 1$		-	+	decrescente; côncavo para cima
$x = 1$	0	0	0	mínimo relativo; não há ponto de inflexão
$1 < x$		+	+	crescente; côncavo para cima

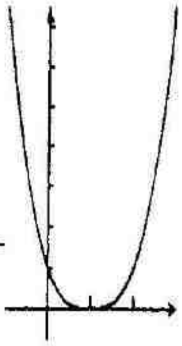


FIGURA 4-25

27. $f(x) = (x-3)^{5/3} + 1$; $f'(x) = \frac{5}{3}(x-3)^{2/3}$; $f''(x) = \frac{10}{9}(x-3)^{-1/3}$

Seja $f'(x) = 0$: $x = 3$. $f''(x)$ nunca é 0. $f''(3)$ não existe

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão: f; gráfico
$x < 3$		+	−	crescente; côncavo para baixo
$x = 3$	1	0	n.e.	ponto de inflexão a reta tangente é horizontal
$3 < x$		+	+	crescente; côncavo para cima

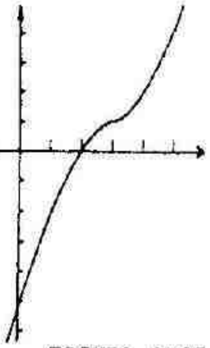


FIGURA 4-27

29. $f(x) = (x+1)^{2/3}(x-3)^2$

$f'(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{-1/3}(x-3)^2 + (x+1)^{2/3}(x-3)$

$= \frac{2}{3}(x+1)^{-1/3}(x-3)[x - 3 + 3(x+1)] = \frac{8}{3}(x+1)^{-1/3}(x-3)x$

$f''(x) = -\frac{8}{9}(x+1)^{-4/3}(x^2 - 3x) + \frac{8}{3}(x+1)^{-1/3}(2x-3)$

$= \frac{8}{9}(x+1)^{-4/3}[-x^2 + 3x + 3(x+1)(2x-3)] = \frac{8}{9}(x+1)^{-4/3}(5x^2 - 9)$

Seja $f'(x) = 0$: $x = 0$, $x=3$. Seja $f''(x) = 0$: $x = x_1 = -\frac{3}{5}\sqrt{5} \approx -1,346$, $x = x_2 = \frac{3}{5}\sqrt{5} \approx 1,346$.

$f'(-1)$ e $f''(-1)$ não existem e -1 está no domínio de f.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão: f; gráfico
$x < x_1$		−	+	decrescente; côncavo para cima
$x = x_1$	9,21	−22,2	0	decrescente; ponto de inflexão
$x_1 < x < -1$		−	−	decrescente; côncavo para baixo
$x = -1$	0	n.e.	n.e.	mínimo relativo; tangente vertical, pois $\lim_{x \to -1^+} f'(x) = +\infty$
$-1 < x < 0$		+	−	crescente; côncavo para baixo
$x = 0$	9	0	−	máximo relativo; côncavo para baixo
$0 < x < x_2$		−	−	decrescente; côncavo para baixo
$x = x_2$	4,85	−4,4	0	decrescente; ponto de inflexão
$x_2 < x < 3$		−	+	decrescente; côncavo para cima
$x = 3$	0	0	+	mínimo relativo; côncavo para cima
$3 < x$		+	+	crescente; côncavo para cima

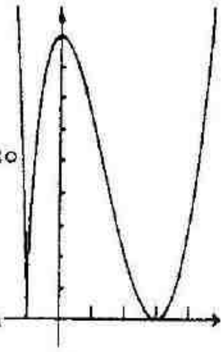


FIGURA 4-29

31. $f(x) = \text{sen } 2x - \cos 2x$, $x \in [-\frac{3}{8}\pi, \frac{5}{8}\pi]$, $2x \in [-\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi]$

$f'(x) = 2\cos 2x + 2\,\text{sen } 2x$; $f''(x) = -4\,\text{sen } 2x + 4\cos 2x$

Seja $f'(x) = 0$: $\text{sen } 2x = -\cos 2x$; $\text{tg } 2x = -1$; $2x = -\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi$; $x = -\frac{1}{8}\pi, \frac{3}{8}\pi$

Seja $f''(x) = 0$: $\text{sen } 2x = \cos 2x$; $\text{tg } 2x = 1$; $2x = -\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi$; $x = -\frac{3}{8}\pi, \frac{1}{8}\pi$

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão: f; gráfico
$x = -\frac{3}{8}\pi$	0			
$-\frac{3}{8}\pi < x < -\frac{1}{8}\pi$		−	+	decrescente; côncavo para cima
$x = -\frac{1}{8}\pi$	$-\sqrt{2}$	0	+	mínimo relativo; côncavo para cima
$-\frac{1}{8}\pi < x < \frac{1}{8}\pi$		+	+	crescente; côncavo para cima
$x = \frac{1}{8}\pi$	0	$\sqrt{2}$	0	crescente; ponto de inflexão
$\frac{1}{8}\pi < x < \frac{3}{8}\pi$		+	−	crescente; côncavo para baixo
$x = \frac{3}{8}\pi$	$\sqrt{2}$	0	−	mínimo relativo; côncavo para baixo
$\frac{3}{8}\pi < x < \frac{5}{8}\pi$		−	−	decrescente; côncavo para baixo
$x = \frac{5}{8}\pi$	0			

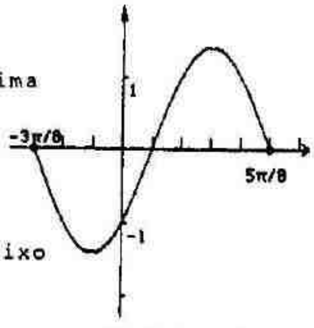


FIGURA 4-31

33. $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$, $x \in [-2, 1]$; $f'(x) = 3x^2 - 2x - 4$

$$f(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 - 4(-2) + 4 = 0;\quad f(1) = (1)^3 - (1)^2 - 4(1) + 4 = 0$$

Como f é um polinômio, é contínua e derivável em toda parte; logo, a hipótese do Teorema de Rolle está satisfeita. Assim, existe um c em $(-2, 1)$ para o qual

$$f'(c) = 0;\quad 3c^2 - 2c - 4 = 0;\quad c = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{3}$$

Como $\frac{1}{3}(1 - \sqrt{13}) \approx -0{,}86$ está em $(-1, 2)$, $\frac{1}{3}(1 - \sqrt{13})$ qualifica-se como c.

35. $f(x) = \sqrt{3 - x}$, $x \in [-6, -1]$; $f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{3 - x}}$

f é contínua em $(-\infty, 3]$ e derivável em $(-\infty, 3)$. Assim, f é contínua em $[-6, -1]$ e derivável em $(-6, -1)$; logo, a hipótese do teorema do valor médio está satisfeita Então, existe um c em $(-6, -1)$ para o qual

$$f'(c) = \frac{f(-1) - f(-6)}{-1 - (-6)} = \frac{2 - 3}{5} = -\frac{1}{5};\quad \frac{-1}{2\sqrt{3 - c}} = -\frac{1}{5};\quad 2\sqrt{3 - c} = 5;\quad 12 - 4c = 25;\quad c = -\frac{13}{4}$$

Como $-\frac{13}{4}$ está em $(-6, -1)$, $-\frac{13}{4}$ qualifica-se como c.

37. (a) Se f for uma função polinomial, será contínua e derivável em toda parte, em particular em $[a, b]$ e (a, b). Além disso, f' é uma função polinomial para a qual o acima exposto é verdadeiro. Como $f(a) = f(b) = 0$, o Teorema de Rolle é válido, e então há um número c em (a, b), tal que $f'(c) = 0$. Então, $f'(a) = f'(c) = 0$ e $f'(c) = f'(b) = 0$. Logo, pelo Teorema de Rolle, há um número d em (a, c) e um número e em (c, b), tal que $f''(d) = 0$ e $f''(e) = 0$.

(b) Se $f(x) = (x^2 - 4)^2$, $f'(x) = x(x^2 - 4)$, e $f''(x) = 12x^2 - 16$. Então, $f(-2) = f(2) = f'(-2) = f'(2) = 0$. Também $f'(0) = 0$ e $f''(-\frac{2}{3}\sqrt{3}) = f''(\frac{2}{3}\sqrt{3}) = 0$. Então, f satisfaz a parte (a) onde $a = -2$, $b = 2$, $c = 0$, $d = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$, e $e = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

39. Seja $h(x) = f(x) - g(x)$. Então, $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ para todo x em [a, b]. Pelo Teore 4.3.3, $h(x)$ é uma constante em [a, b]. Assim, $h(x) = h(a)$, isto é, $f(x) - g(x) = f(a) - g(a)$.

41. $f(x) = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx$. Seja θ o ângulo de inclinação da reta que une a origem ao ponto (A, B). Então,

$$f(x) = \sqrt{A^2 + B^2}\left(\operatorname{sen} kx \cdot \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} + \cos kx \cdot \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right) = \sqrt{A^2+B^2}(\operatorname{sen} kx \cos\theta + \cos kx \operatorname{sen}\theta)$$

$$= \sqrt{A^2+B^2}\operatorname{sen}(kx + \theta)$$

Como o valor máximo absoluto da função seno é 1, o valor máximo absoluto de $f(x) = \sqrt{A^2+B^2}$.

43. $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{se } x < 0 \\ x^2 + 2 & \text{se } 0 \le x \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x < 0 \\ 2x & \text{se } 0 \le x \end{cases}$; $f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } 0 < x \end{cases}$.

$f'(0) = 0$, pois $f'_-(0) = 0$ e $f'_+(0) = 0$; $f''(0)$ não existe, pois $f''_-(0) = -2$ e $f''_+(0) = 2$.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$x < 0$		+	−	f é crescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = 0$	2	0	n.e.	ponto de inflexão; a reta tangente é horizontal
$0 < x$		+	+	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima

45. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$

O gráfico de f deve ter um ponto de inflexão em (1, −1). Assim, $f(1) = -1$ e $f''(1) = 0$;

$$a + b + c = -1 \qquad (1)$$

$$6a + 2b = 0 \qquad (2)$$

Como a inclinação da tangente de inflexão em (1, −1) é −3, então, $f'(1) = -3$;

$$3a + 2b + c = -3 \qquad (3)$$

Resolvendo as equações (1), (2) e (3) simultaneamente, obtemos $a = 2$, $b = -6$ e $c = 3$.

47. $f(x) = x|x| = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \ge 0 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x < 0 \\ 2x & \text{se } x > 0 \end{cases}$; $f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

$f'(0) = 0$, pois $f'_-(0) = 0$ e $f'_+(0) = 0$. Se $x < 0$, $f''(x) < 0$; e se $x > 0$, $f''(x) > 0$. Logo, pela Definição 4.5.4, o gráfico de f tem um ponto de inflexão na origem.

49. $f(x) = (x^2 + a^2)^p$; $f'(x) = 2px(x^2 + a^2)^{p-1}$

$f''(x) = 2p(x^2 + a^2)^{p-1} + 4p(p-1)x^2(x^2 + a^2)^{p-2} = 2p(x^2 + a^2)^{p-2}[x^2 + a^2 + 2x^2(p-1)]$

$= 2p(x^2 + a^2)^{p-2}[a^2 - (1-2p)x^2]$

Se $p \geq \frac{1}{2}$, então, $(1 - 2p) \leq 0$ e $f''(x) > 0$. Assim, pela Definição 4.5.4, o gráfico de f não apresenta pontos de inflexão. Suponha que $p < \frac{1}{2}$.

Seja $f''(x) = 0$: $a^2 = (1-2p)x^2$; $x^2 = \dfrac{a^2}{1-2p}$; $x = x_1 = -\sqrt{\dfrac{a^2}{1-2p}}$ e $x = x_2 = \sqrt{\dfrac{a^2}{1-2p}}$

	$f''(x)$	Conclusão
$x < x_1$	+	o gráfico é côncavo para cima
$x = x_1$	0	o gráfico tem um ponto de inflexão
$x_1 < x < x_2$	−	o gráfico é côncavo para baixo
$x = x_2$	0	o gráfico tem um ponto de inflexão
$x_2 < x$	+	o gráfico é côncavo para cima

Assim, o gráfico de f tem dois pontos de inflexão.

51. Seja x um número não-negativo. Então, o outro número não-negativo é 12-x.

Se S(x) for a soma dos quadrados dos dois números, então

$S(x) = x^2 + (12-x)^2 = 2x^2 - 24x + 144$, $x \in [0, 12] = I$; $S'(x) = 4x - 24$. Seja $S'(x) = 0$: $x = 6$.

S é contínua em I; logo, os extremos absolutos ocorrem em um ponto extremo ou em um número crítico.

$$S(0) = 144, \quad S(6) = 72, \quad S(12) = 144$$

O valor mínimo absoluto de S é $S(6) = 72$. Assim, os dois números são 6 e 6.

53. Seja x cm o comprimento de dois lados opostos do retângulo. Então, o comprimento dos dois outros lados é (18 − x) cm. Se A(x) cm² for a área do retângulo, então

$$A(x) = (18-x)x = 18x - x^2, \quad 0 \leq x \leq 18; \quad A'(x) = 18 - 2x; \quad A''(x) = -2.$$

Seja $A'(x) = 0$: $x = 9$ é o número crítico, e $A''(9) < 0$. Assim, A(x) é um máximo relativo quando $x = 9$; é um máximo absoluto pelo Teorema 4.8.1 (i). Isso significa que o retângulo é, de fato, um quadrado de 9 cm, como deveríamos mostrar.

55. Seja x cm o comprimento de um lado da base; logo, sua área é x^2 cm². Então, a altura da caixa é $\dfrac{4.000}{x^2}$ cm. Se A(x) cm² for a quantidade de material necessário para se construir a caixa.

$$A(x) = x^2 + 4x\left(\frac{4.000}{x^2}\right) = x^2 + \frac{16.000}{x}, \quad 0 < x < +\infty; \quad A'(x) = 2x - \frac{16.000}{x^2}; \quad A''(x) = 2 + \frac{32.000}{x^3}$$

Seja $A'(x) = 0$: $2x = \dfrac{16.000}{x^2}$; $2x^3 = 16.000$; $x^3 = 8.000$; $x = 20$ é o número crítico.

Como $A''(20) > 0$, A(x) tem um valor mínimo relativo quando $x = 20$; é um mínimo absoluto pelo Teorema 4.8.1 (ii). Portanto, as dimensões da caixa requerida são 20 cm por 20 cm por 10 cm.

57. Seja x cm o comprimento de um lado da base; logo, sua área é x^2 cm^2. Então, a altura da caixa é $\frac{k}{x^2}$ cm. Se $A(x)$ cm^2 é a quantidade de material necessário para construir a caixa,

$$A(x) = x^2 + 4x\left(\frac{k}{x^2}\right) = x^2 + \frac{4k}{x}, \quad 0 < x < +\infty; \quad A'(x) = 2x - \frac{4k}{x^2}; \quad A''(x) = 2 + \frac{8k}{x^3}$$

Seja $A'(x) = 0$: $2x = \frac{4k}{x^2}$; $x^3 = 2k$; $x = \sqrt[3]{2k}$ é o único número crítico.

Como $A''(\sqrt[3]{2k}) > 0$, $A(x)$ tem um valor mínimo relativo qdo $x = \sqrt[3]{2k}$; é um mínimo absoluto pelo Teorema 4.8.1 (ii). Portanto, as dimensões da caixa requerida são

$\sqrt[3]{2k}$ cm por $\sqrt[3]{2k}$ cm por $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2k}$ cm.

59. G(x) é a taxa de crescimento da população quando a população é x. Para algum $k > 0$

$$G(x) = kx(3.000 - x) = k(3.000x - x^2), \quad x \in [0, 3.000] = I; \quad G'(x) = k(3.000 - 2x)$$

Seja $G'(x) = 0$: $3.000 = 2x$; $x = 1.500$ é o número crítico.

G é contínua em I; logo, os extremos absolutos ocorrem em um ponto extremo ou em um número crítico.

$$G(0) = 0, \quad G(1500) = 2.250.000, \quad G(3000) = 0$$

G(x) é máximo quando o tamanho da população é 1.500.

61. Seja C o ponto mais próximo de A. Veja a Figura 4.61. Se f(x) km for a quantidade de água fornecida quando a estação estiver a x km de C, então

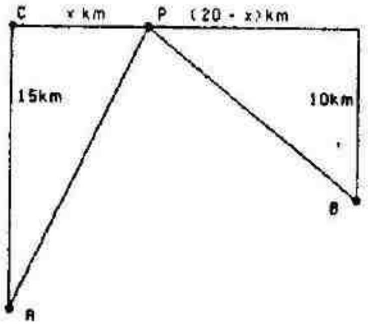


FIGURA 4.61

$$f(x) = |\overline{AP}| + |\overline{PB}| = \sqrt{x^2 + 15^2} + \sqrt{(20 - x)^2 + 10^2}, \quad x \in [0, 20] = I$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 15^2}} - \frac{20 - x}{\sqrt{(20 - x)^2 + 10^2}}$$

Seja $f'(x) = 0$:

$$\frac{\sqrt{x^2 + 15^2}}{x} = \frac{\sqrt{(20 - x)^2 + 10^2}}{20 - x}; \quad \frac{x^2 + 15^2}{x^2} = \frac{(20 - x)^2 + 10^2}{(20 - x)^2}; \quad 1 + \frac{15^2}{x^2} = 1 + \frac{10^2}{(20 - x)^2}; \quad \frac{15}{x} = \frac{10}{20 - x}$$

(x e 20 − x são positivos); $300 - 15x = 10x$; $300 = 25x$; $x = 12$ é o número crítico.

f é contínua em I; logo, os extremos absolutos ocorrem em um ponto extremo ou em um número crítico. $f(0) = 15 + 10\sqrt{5} \approx 37,36$, $f(12) = \sqrt{369} + \sqrt{164} = 3\sqrt{41} + 2\sqrt{41} = 5\sqrt{41} \approx 32,02$, $f(20) = 35$

A quantidade mínima de bombeamento de água é requerida qdo a estação de tratamento estiver a 12 km de C.

63. $F(\theta) = \frac{1.000k}{k \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$, $\theta \in [0, \frac{1}{2}\pi] = I$; $F'(\theta) = \frac{-1.000k(k \cos \theta - \operatorname{sen} \theta)}{(k \operatorname{sen} \theta + \cos \theta)^2}$

Seja $F'(\theta) = 0$: $k \cos \theta = -\operatorname{sen} \theta$; tg θ = de modo que $\operatorname{sen} \theta = \frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}}$, $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}$

F é contínua em I; logo, os extremos absolutos ocorrem em um ponto extremo ou em um número crítico.

$$F(0) = 1.000k, \quad F(\theta)\Big]_{\operatorname{tg} \theta = k} = \frac{1.000k}{\sqrt{k^2 + 1}}, \quad F(\tfrac{1}{2}\pi) = 1.000$$

Como $0 < k < 1$, F é mínima quando tg $\theta = k$.

65. Qdo p for o preço por unidade, 100x unidades serão demandadas e $x^2 + p^2 = 36$; $p = \sqrt{36 - x^2}$.

$R(x) = (100x)p = 100x\sqrt{36 - x^2}$, $x \in [0, 6] = I$. $R'(x) = 100\sqrt{36 - x^2} + 100x \cdot \dfrac{-x}{\sqrt{36 - x^2}} = \dfrac{3.600 - 200x^2}{\sqrt{36 - x^2}}$

Seja $R'(x) = 0$: $3.600 - 200x^2 = 0$; $x^2 = 18$; $x = 3\sqrt{2}$

R é contínua em I; logo, os extremos absolutos ocorrem em um ponto extremo ou em um número crítico.

$$R(0) = 0, \quad R(3\sqrt{2}) = 1.800, \quad R(6) = 0$$

Assim, R tem um valor máximo absoluto qdo $x = 3\sqrt{2}$. O rendimento total máximo é $1.800.

67. P(x) é o lucro quando x rádios são vendidos, onde

$$P(x) = 75x - (x^2 + 25x + 100) = -x^2 + 50x - 100, \quad x \geq 0; \quad P'(x) = -2x + 50 = 2(25 - x)$$

$P'(x) > 0$ se $x < 25$; $P'(x) < 0$ se $x > 25$. Logo, P(x) tem um valor máximo absoluto se $x = 25$.

25 rádios deveriam ser produzidos diariamente $P(25) = -(25)^2 + 50(25) - 100 = 525$. O lucro é $525.

69. Após t s as partículas estão em (x,0) e (0,y), onde $x = t^2 - 2t$ e $y = t^2 - 2$, e seja F(t) cm a distância entre eles.

$$F(t) = \sqrt{(t^2 - 2t)^2 + (t^2 - 2)^2}, \quad t \geq 0$$

$$F'(t) = \tfrac{1}{2}(2t^4 - 4t^3 + 4)^{-1/2}(8t^3 - 12t^2) = 4t^2(2t^4 - 4t^3 + 4)^{-1/2}(t - \tfrac{3}{2})$$

Como $F'(t) \leq 0$ se $0 < t < \frac{3}{2}$ e $F'(t) > 0$ se $t > \frac{3}{2}$, F tem um valor mínimo absoluto qdo $t = \frac{3}{2}$. Como $D_t x = 2t - 2$ e $D_t y = 2t$, qdo $t = \frac{3}{2}$ a velocidade da partícula horizontal é $2(\frac{3}{2}) - 2 = 1$ e a velocidade da partícula vertical é $2(\frac{3}{2}) = 3$. Daí, a distância entre as partículas é menor qdo o tempo é $\frac{3}{2}$ s, e a velocidade da partícula horizontal é 1 cm/s e a velocidade da partícula vertical é 3 cm/s.

71. Seja L m o comprimento da escada.

Veja a Figura 4.71.

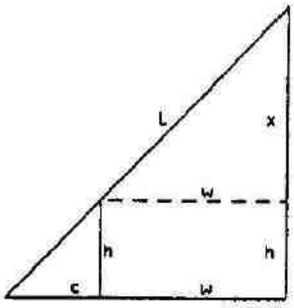


FIGURA 4.71

Da semelhança de triângulos, obtemos $\frac{c}{h} = \frac{w}{x}$; $c = \frac{hw}{x}$. Então,

$$L(x) = \sqrt{(c + w)^2 + (x + h)^2} = \sqrt{\left(\frac{hw}{x} + w\right)^2 + (x + h)^2}, \quad x > 0$$

$$L'(x) = \frac{\left(\frac{hw}{x} + w\right)\left(-\frac{hw}{x^2}\right) + (x + h)}{L(x)} = \frac{(x + h)\left(1 - \frac{hw^2}{x^3}\right)}{L(x)}$$

Seja $L'(x) = 0$: $(x + h)\left(1 - \frac{hw^2}{x^3}\right) = 0$; $x = -h$, $x = h^{1/3}w^{2/3}$. O único número crítico é $h^{1/3}w^{2/3}$.

Como $L'(x) < 0$ se $0 < x < h^{1/3}w^{2/3}$ e $L'(x) > 0$ se $x > h^{1/3}w^{2/3}$, L tem um valor mínimo absoluto qdo $x = h^{1/3}w^{2/3}$. Qdo $x = h^{1/3}w^{2/3}$, o comprimento mínimo é

$$L(h^{1/3}w^{2/3}) = \sqrt{\left(\frac{hw}{h^{1/3}w^{2/3}} + w\right)^2 + (h^{1/3}w^{2/3} + h)^2} = \sqrt{w^{2/3}(h^{2/3} + w^{2/3})^2 + h^{2/3}(w^{2/3} + h^{2/3})^2}$$

$$= (h^{2/3} + w^{2/3})^{3/2}$$

73. Seja x m a largura do letreiro. Então, a sua altura será $\frac{50}{x}$ m. Se $A(x)$ m² for a área, então

$$A(x) = (x + 4)\left(\frac{50}{x} + 8\right) = 8x + \frac{200}{x} + 32,\quad 0 < x < +\infty;\quad A'(x) = 8 - \frac{200}{x^2};\quad A''(x) = \frac{400}{x^3}$$

Seja $A'(x) = 0$: $8 = \frac{200}{x^2}$; $x^2 = 25$; $x = \pm 5$. O único número crítico é 5.

Qdo $x = 5$, $A''(x) > 0$ logo A tem um mínimo relativo quando $x=5$; é um valor mínimo relativo pelo Teorema 4.8.1 (ii). Qdo $x = 5$, $x + 4 = 9$ e $\frac{50}{x} + 8 = 18$. Portanto, a placa com a menor área tem dimensões 9 m por 18 m.

75. Seja R cm o raio e H cm a altura do cone circular reto. Da semelhança de triângulos, $\frac{R}{H} = \frac{r}{H - h}$ de modo que $\frac{Hr}{H - h}$. Se $V(H)$ cm³ for o volume do cone, então

$$V(H) = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi r^2 \frac{H^3}{(H - h)^2},\quad H > h;\quad V'(H) = \frac{1}{3}\pi r^2 \frac{3H^2(H - h)^2 - 2H^3(H - h)}{(H - h)^4} = \frac{1}{3}\pi r^2 \frac{H^2(H - 3h)}{(H - h)^3}$$

Como $V'(H) < 0$ se $h < H < 3h$ e $V'(H) > 0$ se $H > 3h$, V tem um valor mínimo absoluto qdo $H = 3h$. Então, $R = \frac{Hr}{H - h} = \frac{3hr}{2h} = \frac{3}{2}r$.

77. Seja x cm o comprimento de um pedaço de arame. Então, $(20 - x)$ cm é o comprimento do outro pedaço de arame. Se $A(x)$ cm² for a área combinada de dois quadrados, então

$$A(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{20 - x}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{2}x + 25,\quad 0 \le x \le 20;\quad A'(x) = \frac{1}{4}x - \frac{5}{2} = \frac{1}{4}(x - 10)$$

Como $A'(x) < 0$ se $x < 10$ e $A'(x) > 0$ se $x > 10$, A tem um valor mínimo absoluto qdo $x=10$. Portanto, a área total dos dois quadrados será menor se cada pedaço de arame tiver 10 cm; isto é, o arame deveria ser cortado ao meio.

79. Resolvendo a equação de demanda para P, e substituindo P por P(x), obtemos

$$P(x) = 10^3x^{-1} - 2 + 18\cdot 10^{-3}x - 6\cdot 10^{-6}x,\quad x \ge 100$$

$R(x) = xP(x) = 10^3 - 2x + 18\cdot 10^{-3}x^2 - 6\cdot 10^{-6}x^2$ and $C(x) = xQ(x) = 20\cdot 10^{-3}x^2 - 24x + 11\cdot 10^3$

Se S(x) for o lucro semanal, então

$$S(x) = R(x) - C(x) = -10^4 + 22x - 2\cdot 10^{-3}x^2 - 6\cdot 10^{-6}x^3$$

$S'(x) = 22 - 4\cdot 10^{-3}x - 18\cdot 10^{-6}x^2 = (1 - 10^{-3}x)(22 + 18\cdot 10^{-3}x) = 10^{-3}(1000 - x)(22 + 18\cdot 10^{-3}x)$

Como $S'(x) > 0$ se $100 \le x < 1000$ e $S'(x) < 0$ se $x > 1000$, tem um máximo absoluto qdo $x=1.000$. P(1.000)=11. 1.000 unidades são produzidas a $11 cada.

81. $y = 80x - 16x^2$, $dy = (80 - 32x)\,\Delta x$.

$\Delta y = [80(x + \Delta x) - 16(x + \Delta x)^2] - (80x - 16x^2) = 80\Delta x - 32x\Delta x - 16(\Delta x^2)$. $\Delta y dy = -16(\Delta x)^2$

(a) Se $\Delta x = 0,1$, $\Delta y - dy = -16(0,1)^2 = -0,16$ (b) Se $\Delta x = -0,2$, $\Delta y - dy = -16(-0,2)^2 = -0,64$

83. O volume do material é o volume de um invólucro esférico, sendo um incremento do volume de uma esfera. Seja r cm o raio da esfera, seja V cm^3 o volume da esfera e seja ΔV cm^3 o volume do invólucro esférico.

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$; $dV = 4\pi r^2 dr$. Seja $r = 2$ e $dr = \frac{1}{8}$. Então, $\Delta V \approx dV = 4\pi(2)^2\frac{1}{8} = 2\pi$.

Portanto, o volume do material é de aproximadamente 2π cm^3

85. O tempo para que um pêndulo simples de comprimento ℓ m complete uma volta é t s. Então,

$$4\pi^2\ell = 32{,}2t^2;\quad 4\pi^2 d\ell = 64{,}4t\, dt;\quad dt = \frac{\pi^2}{16{,}1t}d\ell$$

Seja $d\ell = \Delta\ell = 0{,}01$. Então $\Delta t \approx \frac{\pi^2}{16{,}1t}(0{,}01) = \frac{\pi^2}{1.610t}$. Portanto, o erro no tempo para que o pêndulo complete uma volta é de aproximadamente $\frac{\pi^2}{1.610t}$ s

87. (a) $f(x) = 3|x| + 4|x-1| = \begin{cases} -7x+4 & \text{se } x < 0 \\ 4 & \text{se } x = 0 \\ -x+4 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \\ 7x-4 & \text{se } x > 1 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} -7 & \text{se } x < 0 \\ -1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 7 & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Como f é contínua em [0,1] e não há números críticos em [0,1], o valor mínimo absoluto de f em [0,1] é o menor de $f(0)=4$ e $f(1)=3$. Logo, $f(x) \geq 3$ para todo x em [0,1]. Se $x < 0$, então, $f'(x) < 0$; logo f é decrescente em $(-\infty, 0]$. Então, $f(x) > f(0) = 4 > 3$ para todo x em $(-\infty, 0)$. Se $x > 1$, então, $f'(x) > 0$; logo, f é crescente em $[1, +\infty)$. Logo, $f(x) > f(1)=3$ para todo x em $(1, +\infty)$.

Assim, $f(x) \geq 3$ para todo x, então, 3 é o valor mínimo absoluto.

(b) $g(x) = 4|x| + 3|x-1| = \begin{cases} -7x+3 & \text{se } x < 0 \\ 3 & \text{se } x = 0 \\ x+3 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 4 & \text{se } x = 1 \\ 7x-3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$; $g'(x) = \begin{cases} -7 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 7 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

Como g é contínua em [0,1] e não há números críticos em [0,1] o valor mínimo absoluto de g em [0,1] é o menor de $g(0) = 3$ e $f(1)=4$. Logo, $g(x) \geq 3$ para todo x em [0,1].

Se $x < 0$, então $g'(x) < 0$ logo g é decrescente em $(-\infty, 0]$.

Logo, $g(x) > g(0)=3$ para todo x em $(-\infty, 0)$. Se $x > 1$, então, $g'(x) > 0$; logo g é crescente em $[1, +\infty)$. Logo, $g(x) > g(1) = 4 > 3$ para todo x em $(1, +\infty)$.

Assim, $g(x) \geq 3$ para todo x; logo, 3 é o valor mínimo absoluto.

(c) $h(x) = a|x| + b|x-1| = \begin{cases} -ax - bx + b & \text{se } x < 0 \\ b & \text{se } x = 0 \\ ax - bx + b & \text{se } 0 < x < 1; \\ a & \text{se } x = 1 \\ ax + bx - b & \text{se } x > 1 \end{cases}$ $h'(x) = \begin{cases} -a - b & \text{se } x < 0 \\ a - b & \text{se } 0 < x < 1 \\ a + b & \text{se } x > 1 \end{cases}$

Como h é contínua em [0,1] e não há números críticos em [0,1], o valor mínimo absoluto de h de [0,1] é o menor de $h(0)=b$ e $h(1)=a$. Chamemos este número de m. Logo, $h(x) \geq m$ para todo x em [0,1]. Se $x < 0$, então, $h'(x)<0$; logo h é decrescente em $(-\infty,0]$. Então, $h(x)>h(0)=b \geq m$ para todo x em $(-\infty,0)$. Se $x > 1$, então, $h'(x)>0$; logo, h é crescente em $[1,+\infty)$. Daí, $h(x)>h(1)=a \geq m$ para todo x em $(1,+\infty)$.

Assim, $h(x) \geq m$ para todo x; logo, m é o valor mínimo absoluto.

89. As funções f e g são deriváveis em todo número no intervalo fechado [a,b].

Seja $h(x) = f(x) - g(x)$. Então, h é contínua em [a,b] e derivável em (a,b).

$$h(a) = f(a) - g(a) = 0 \quad \text{e} \quad h(b) = f(b) - g(b) = 0$$

Portanto, o Teorema de Rolle é válido para a função h e para o intervalo (a,b); logo, há um número c em (a,b), tal que $f'(c) - g'(c) = 0$, isto é $f'(c) = g'(c)$.

91. $4x^4 - 3x^3 + 2x - 5 = 0$. Seja $f(x) = 4x^4 - 3x^3 + 2x - 5$; $f'(x) = 16x^3 - 9x^2 + 2$.

Como $f(1)=-2$ e $f(2) = 39$, $f(x) = 0$ tem uma raiz positiva entre 1 e 2; tomemos $x_1 = 1$.

$x_4 = x_5 = x = 1,168$ para três casas decimais.

n	x_n −	$(4x_n^4 - 3x_n^3 + 2x_n - 5)$ ÷	$(16x_n^3 - 9x_n^2 + 2)$	= STO
1	1	-2	9	1.22222
2	1.22222	0.893154	17.768	1.17196
3	1.17196	0.060722	15.393	1.16801
4	1.16801	0.000346	15.217	1.16799

93. $y = \text{sen}\, x$, $y = 2x - 3$. No ponto de intersecção $\text{sen}\, x - 2x + 3 = 0$. Seja $f(x) = \text{sen}\, x - 2x + 3$; $f'(x) = \cos x - 2$. Como $f(\frac{1}{2}\pi) = 0,8584$ e $f(\pi) = -3,2832$, $f(x) = 0$ tem uma raiz entre $\frac{1}{2}\pi$ e π tomemos $x_1 = \frac{1}{2}\pi$ 1,5708. Veja a Nota da Solução do Exercício 4.10.15.

$x_4 = x_5 = x = 1,9622$ para quatro casas decimais.

n	x_n −	$(\text{sen}\, x_n - 2x_n + 3)$ ÷	$(\cos x_n - 2)$	= STO
1	1,5708	0,8584	-2,0000	2,0000
2	2,00000	-0,09070	-2,4161	1,96246
3	1,96246	-0,00064	-2,3817	1,96219
4	1,96219	0	-2,3814	1,96219

CAPÍTULO 5

INTEGRAÇÃO E A INTEGRAL DEFINIDA

EXERCÍCIOS 5.1 Antidiferenciação

1. $\int 3x^4\,dx = 3\cdot\frac{1}{5}x^5 + C = \frac{3}{5}x^5 + C$

3. $\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx = -\frac{1}{2}x^{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$

5. $\int 5u^{3/2}\,du = 5\cdot\frac{2}{5}u^{5/2} + C = 2u^{5/2} + C$

7. $\int \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int 2x^{-1/3}\,dx = 2\cdot\frac{3}{2}x^{2/3} + C = 3x^{2/3} + C$

9. $\int 6t^2\sqrt[3]{t}\,dt = \int 6t^{7/3}\,dt = 6\cdot\frac{3}{10}x^{10/3} + C = \frac{9}{5}t^{10/3} + C$

11. $\int (4x^3 + x^2)\,dx = x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C$

13. $\int y^3(2y^2 - 3)\,dy = \int (2y^5 - 3y^3)\,dy = \frac{1}{3}y^6 - \frac{3}{4}y^4 + C$

15. $\int (3 - 2t + t^2)\,dt = 3t - t^2 + \frac{1}{3}t^3 + C$

17. $\int (8x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 5)\,dx = \frac{8}{5}x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 5x + C$

19. $\int \sqrt{x}(x + 1)\,dx = \int (x^{3/2} + x^{1/2})\,dx = \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{2}{3}x^{3/2} + C$

21. $\int (x^{3/2} - x)\,dx = \frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{1}{2}x^2 + C$

23. $\int \left(\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^2} + 5\right)dx = \int (2x^{-3} + 3x^{-2} + 5)\,dx = -x^{-2} - 3x^{-1} + 5x + C = -\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 5x + C$

25. $\int \frac{x^2 + 4x - 4}{\sqrt{x}}\,dx = \int (x^{3/2} + 4x^{1/2} - 4x^{-1/2})\,dx = \frac{2}{5}x^{5/2} + 4\cdot\frac{2}{3}x^{3/2} - 4\cdot 2x^{1/2} + C$

$= \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{8}{3}x^{3/2} - 8x^{1/2} + C$

27. $\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx = \int (x^{1/3} + x^{-1/3})\,dx = \frac{3}{4}x^{4/3} + \frac{3}{2}x^{2/3} + C$

29. $\int (3\,\text{sen}\,t - 2\cos t)\,dt = -3\cos t - 2\,\text{sen}\,t + C$

31. $\int \frac{\text{sen}\,x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\text{sen}\,x}{\cos x}\,\frac{1}{\cos x}\,dx = \int \text{tg}\,x\,\sec x\,dx = \sec x + C$

33. $\int (4\,\text{cosec}\,x\,\text{cotg}\,x + 2\sec^2 x)\,dx = -4\,\text{cosec}\,x + 2\,\text{tg}\,x + C$

35. $\int (2\,\text{cotg}^2\theta - 3\,\text{tg}^2\theta)\,d\theta = [2(\text{cosec}^2\theta - 1) - 3(\sec^2\theta - 1)]\,d\theta = \int (2\,\text{cosec}^2\theta - 3\sec^2\theta + 1)\,d\theta$

$= -2\,\text{cotg}\,\theta - 3\,\text{tg}\,\theta + \theta + C$

37. $\frac{dy}{dx} = 2x - 3$; $y = \int (2x - 3)\,dx$; $y = x^2 - 3x + C$. Substituindo $(x, y) = (3, 2)$ resulta $2 = (3)^2 - 3(3) + C$; $C = 2$. Assim, uma equação da curva é $y = x^2 - 3x + 2$.

39. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = 2 - 4x$; $y' = \int (2 - 4x)\,dx$; $\frac{dy}{dx} = 2x - 2x^2 + C_1$; $y = \int (2x - 2x^2 + C_1)\,dx$; $y = x^2 - \frac{2}{3}x^3 + C_1x + C_2$. Substituindo $(x, y) = (0, 2)$ resulta $2 = 0 + C_2$; $C_2 = 2$, logo, $y = x^2 - \frac{2}{3}x^3 + C_1x + 2$. Substituindo $(x, y) = (-1, 3)$ resulta $3 = (-1)^2 - \frac{2}{3}(-1)^3 + C_1(-1) + 2$; $C_1 = \frac{2}{3}$. Assim, uma equação da curva é $y = x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x + 2$.

41. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = 1 - x^2$; $y' = \int (1 - x^2)\,dx$; $\frac{dy}{dx} = x - \frac{1}{3}x^3 + C_1$. Em $(1,1)$, a inclinação da reta tangente é -1. Tomando $\frac{dy}{dx} = -1$ qdo $x = 1$ resulta $-1 = \frac{2}{3} + C_1$; $C_1 = -\frac{5}{3}$. Assim, $\frac{dy}{dx} = x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}$; $y = \int \left(x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}\right)dx$; $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{5}{3}x + C_2$. Substituindo $(x, y) = (1, 1)$ resulta $1 = -\frac{5}{4} + C_2$; $C_2 = \frac{9}{4}$. Assim, uma equação da curva é $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{5}{3}x + \frac{9}{4}$.

43. $C'(x) = 3x^2 + 8x + 4$, e $C(0) = 6$. $C(x) = \int (3x^2 + 8x + 4)\,dx = x^3 + 4x^2 + 4x + K$. Como $C(0) = 6$, então, $K = 6$. Portanto, $C(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 6$.

45. $C'(x) = 6x$. $C(x) = \int 6x\,dx = 3x^2 + K$. Como $C(2) = 20$, então, $20 = 3(2)^2 + K$; $K = 8$.

(a) $C(x) = 3x^2 + 8$ (b) $C(0) = 8$. Assim, o custo geral é \$800.

47. $R'(x) = 15 - 4x$. $R(x) = \int (15 - 4x)\,dx = 15x - 2x^2 + K$. Como $R(0) = 0$, $0 = K$.

(a) $R(x) = 15x - x^2$ (b) Como $R(x) = px$, então, $px = 15x - 2x^2$ de modo que $p = 15 - 2x$.

49. O volume de água em um tanque é $V\,m^3$ quando a profundidade da água é h m.

$\frac{dV}{dh} = \pi(4h^2 + 12h + 9)$; $V = \int \pi(4h^2 + 12h + 9)\,dh$; $V = \pi(\frac{4}{3}h^3 + 6h^2 + 9h) + C$. Como $V = 0$ quando $h = 0$, então $C = 0$; logo, $V = \pi(\frac{4}{3}h^3 + 6h^2 + 9h)$. Quando $h = 3$, $V = 117\pi$, logo, o volume é $117\pi\,m^3$.

51. $f(x) = 1$ para todo x em $(-1,1)$. Portanto, $f'(x) = 0$ para todo x em $(-1,1)$.

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 < x \le 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$g'(x) = 0$ se x estiver em $(-1,1)$ e $x \neq 0$. $g'(0)$ não existe, pois g é descontínua em 0. Logo, g não é diferenciável em $(-1,1)$ e o Teorema 5.1.2 não se aplica.

53. $f(x) = |x|$

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{se } x \ge 0 \end{cases} \qquad F'(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \ge 0 \end{cases} = |x|$$

Como $F'_-(0) = \lim_{x \to 0^-}(-x) = 0$ e $F'_+(0) = \lim_{x \to 0^+}(x) = 0$, então, $F'(0) = 0$.

Logo, F é uma antiderivada de f em $(-\infty, +\infty)$.

EXERCÍCIOS 5.2 Algumas Técnicas de Antidiferenciação

1. $\int \sqrt{1-4y}\, dy = -\frac{1}{4}\int (1-4y)^{1/2}(-4\, dy) = -\frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}(1-4y)^{3/2}\right] + C = -\frac{1}{6}(1-4y)^{3/2} + C$

3. $\int \sqrt[3]{6-2x}\, dx = -\frac{1}{2}\int (6-2x)^{1/3}(-2\, dx) = -\frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}(6-2x)^{4/3}\right] + C = -\frac{3}{8}(6-2x)^{4/3} + C$

5. $\int x\sqrt{x^2-9}\, dx = \frac{1}{2}\int (x^2-9)^{1/2}(2x\, dx) = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(x^2-9)^{3/2}\right] + C = \frac{1}{3}(x^2-9)^{3/2} + C$

7. $\int x^2(x^3-1)^{10}dx = \frac{1}{3}\int (x^3-1)^{10}(3x^2\, dx) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{11}(x^3-1)^{11}\right] + C = \frac{1}{33}(x^3-1)^{11} + C$

9. $\int 5x\sqrt[3]{(9-4x^2)^2}\, dx = -\frac{5}{8}\int (9-4x^2)^{2/3}(-8x\, dx) = -\frac{5}{8}\left[\frac{3}{5}(9-4x^2)^{5/3}\right] + C = -\frac{3}{8}(9-4x^2)^{5/3} + C$

11. $\int \frac{y^3 dy}{(1-2y^4)^5} = -\frac{1}{8}\int (1-2y^4)^{-5}(-8y^3\, dy) = -\frac{1}{8}\left[-\frac{1}{4}(1-2y^4)^{-4}\right] + C = \frac{1}{32}(1-2y^4)^{-4} + C$

13. $\int (x^2-4x+4)^{4/3}dx = \int [(x-2)^2]^{4/3}dx = \int (x-2)^{8/3}dx = \frac{3}{11}(x-2)^{11/3} + C$

15. $\int x\sqrt{x+2}\, dx$. Seja $u = x + 2$. Então, $du = dx$, e $x = u - 2$. Assim,

$$\int x\sqrt{x+2}\, dx = \int (u-2)\sqrt{u}\, du = \int (u^{3/2} - 2u^{1/2})\, du = \frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{4}{3}u^{3/2} + C = \frac{2}{5}(x+2)^{5/2} - \frac{4}{3}(x+2)^{3/2} + C$$

17. $\int \frac{2r\, dr}{(1-r)^7}$. Seja $u = 1 - r$. Então, $du = -dr$, e $r = 1 - u$. Assim,

$$\int \frac{2r\, dr}{(1-r)^7} = \int 2(1-u)u^{-7}(-du) = \int (-2u^{-7} + 2u^{-6})\, du = \frac{1}{3}u^{-6} - \frac{2}{5}u^{-5} + C = \frac{1}{3}(1-r)^{-6} - \frac{2}{5}(1-r)^{-5} + C$$

19. $\int \sqrt{3-2x}\, x^2\, dx$. Seja $u = 3 - 2x$. Então, $x = \frac{1}{2}(3-u)$ e $dx = -\frac{1}{2}\, du$. Assim,

$$\int \sqrt{3-2x}\, x^2\, dx = \int u^{1/2}\cdot\frac{1}{4}(3-u)^2\left(-\frac{1}{2}\, du\right) = -\frac{1}{8}\int u^{1/2}(9-6u+u^2)\, du = -\frac{1}{8}\int (9u^{1/2} - 6u^{3/2} + u^{5/2})\, du$$

$$= -\frac{1}{8}\left[6u^{3/2} - \frac{12}{5}u^{5/2} + \frac{2}{7}u^{7/2}\right] + C = -\frac{3}{4}(3-2x)^{3/2} + \frac{3}{10}(3-2x)^{5/2} - \frac{1}{28}(3-2x)^{7/2} + C$$

21. $\int \cos 4\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\int \cos 4\theta(4\, d\theta) = \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4\theta + C$

23. $\int 6x^2 \operatorname{sen} x^3\, dx = 2\int \operatorname{sen} x^3(3x^2\, dx) = -2\cos x^3 + C$

25. $\int \sec^2 5x\, dx = \frac{1}{5}\int \sec^2 5x(5\, dx) = \frac{1}{5}\operatorname{tg} 5x + C$

27. $\int y \operatorname{cosec} 3y^2 \operatorname{cotg} 3y^2\, dy = \frac{1}{6}\int \operatorname{cosec} 3y^2 \operatorname{cotg} 3y^2(6y\, dy) = -\frac{1}{6}\operatorname{cosec} 3y^2 + C$

29. $\int \cos x(2 + \operatorname{sen} x)^5 dx$. Seja $u = 2 + \operatorname{sen} x$, $du = \cos x\, dx$.

$$\int \cos x(2 + \operatorname{sen} x)^5 dx = \int u^5 du = \frac{1}{6}u^6 + C = \frac{1}{6}(2 + \operatorname{sen} x)^6 + C$$

31. $\int \sqrt{1 + \frac{1}{3x}}\, \frac{dx}{x^2}$. Seja $u = 1 + \frac{1}{3x}$; $du = -\frac{1}{3x^2}dx$; $\frac{dx}{x^2} = -3\, du$.

$$\int \sqrt{1 + \frac{1}{3x}}\, \frac{dx}{x^2} = -3\int \sqrt{u}\, du = -2u^{3/2} + C = -2\left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3/2} + C$$

33. $\int 2\,\text{sen}\,x\,\sqrt[3]{1+\cos x}\,dx$. Seja $u = 1 + \cos x$, $du = -\,\text{sen}\,x\,dx$.

$\int 2\,\text{sen}\,x(1+\cos x)^{1/3}dx = -2\int u^{1/3}du = -\frac{3}{2}u^{4/3} + C = -\frac{3}{2}(1+\cos x)^{4/3} + C$

35. $\int \cos^2 t\,\text{sen}\,t\,dt$. Seja $u = \cos t$, $du = -\,\text{sen}\,t\,dt$. $\int \cos^2 t\,\text{sen}\,t\,dt = -\int u^2 du = -\frac{1}{3}u^3 + C = -\frac{1}{3}\cos^3 t + C$

37. $\int (\text{tg}\,2x + \text{cotg}\,2x)^2 dx = \int (\text{tg}^2 2x + 2 + \text{cotg}^2 2x)\,dx = \int [(\sec^2 2x - 1) + 2 + (\text{cosec}^2 2x - 1)]\,dx$

$= \int (\sec^2 2x + \text{cosec}^2 2x)\,dx = \frac{1}{2}\,\text{tg}\,2x - \frac{1}{2}\text{cotg}\,2x + C$

39. $\int \frac{\cos 3x}{\sqrt{1-2\,\text{sen}\,3x}}\,dx$. Seja $u = 1 - 2\,\text{sen}\,3x$; $du = -6\cos 3x\,dx$

$\int \frac{\cos 3x}{\sqrt{1-2\,\text{sen}\,3x}}\,dx = -\frac{1}{6}\int u^{-1/2}du = -\frac{1}{6}(2u^{1/2}) + C = -\frac{1}{3}\sqrt{1-2\,\text{sen}\,3x} + C$

41. $\int \frac{(x^2+2x)\,dx}{\sqrt{x^3+3x^2+1}}$. Seja $u = x^3 + 3x^2 + 1$; $du = (3x^2 + 6x)\,dx = 3(x^2+2x)\,dx$

$\int \frac{(x^2+2x)\,dx}{\sqrt{x^3+3x^2+1}} = \frac{1}{3}\int u^{-1/2}du = \frac{2}{3}u^{1/2} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+3x^2+1} + C$

43. $\int \frac{x(3x^2+1)\,dx}{(3x^4+2x^2+1)^2}$. Seja $u = 3x^4 + 2x^2 + 1$; $du = (12x^3 + 4x)\,dx = 4x(3x^2+1)\,dx$.

$\int \frac{x(3x^2+1)\,dx}{(3x^4+2x^2+1)^2} = \frac{1}{4}\int u^{-2}du = -\frac{1}{4}u^{-1} + C = -\frac{1}{4}(3x^4+2x^2+1)^{-1} + C = -\frac{1}{4(3x^4+2x^2+1)} + C$

45. $\int \frac{(y+3)\,dy}{(3-y)^{2/3}}$. Seja $u = 3 - y$. Então, $y = 3 - u$, e $dy = -du$.

$\int \frac{(y+3)\,dy}{(3-y)^{2/3}} = \int \frac{(6-u)(-du)}{u^{2/3}} = \int (u^{1/3} - 6u^{-2/3})\,du = \frac{3}{4}u^{4/3} - 18u^{1/3} + C = \frac{3}{4}(3-y)^{4/3} - 18(3-y)^{1/3} + C$

47. $\int \frac{(r^{1/3}+2)^4 dr}{\sqrt[3]{r^2}}$. Seja $u = r^{1/3} + 2$; $du = \frac{1}{3}r^{-2/3}dr$.

$\int \frac{(r^{1/3}+2)^4 dr}{\sqrt[3]{r^2}} = 3\int u^4 du = \frac{3}{5}u^5 + C = \frac{3}{5}(r^{1/3}+2)^5 + C$

49. $\int \frac{x^3 dx}{(x^2+4)^{3/2}} = \int \frac{x^2(x\,dx)}{(x^2+4)^{3/2}}$. Seja $u = x^2 + 4$. Então, $x^2 = u - 4$, e $du = 2x\,dx$. $\int \frac{x^3 dx}{(x^2+4)^{3/2}}$

$= \frac{1}{2}\int (u-4)u^{-3/2}du = \frac{1}{2}\int (u^{-1/2} - 4u^{-3/2})\,du = \frac{1}{2}(2u^{1/2} + 8u^{-1/2}) + C = (x^2+4)^{1/2} + 4(x^2+4)^{-1/2} + C$

51. $\int \text{sen}\,x\,\text{sen}\,(\cos x)\,dx$. Seja $u = \cos x$; $du = -\text{sen}\,x\,dx$.

$\int \text{sen}\,x\,\text{sen}\,(\cos x)\,dx = -\int \text{sen}\,u\,du = \cos u + C = \cos(\cos x) + C$

53. $\int (2x+1)^3 dx$

(a) $\int (2x+1)^3 dx = \int (8x^3 + 12x^2 + 6x + 1)\,dx = 2x^4 + 4x^3 + 3x^2 + x + C_1$

(b) Seja $u = 2x + 1$; $du = 2\,dx$. $\int (2x+1)^3 dx = \frac{1}{2}\int u^3 du = \frac{1}{8}u^4 + C_2 = \frac{1}{8}(2x+1)^4 + C_2$

$= \frac{1}{8}(16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1) + C_2 = 2x^4 + 4x^3 + 3x^2 + x + \frac{1}{8} + C_2.$

(c) As respostas das partes (a) e (b) são as mesmas com $C_1 = \frac{1}{8} + C_2$.

55. $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

(a) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}}\,dx = \int (x - 2x^{1/2} + 1)x^{-1/2}dx = \int (x^{1/2} - 2 + x^{-1/2})\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} - 2x + 2x^{1/2} + C_1$

(b) Seja $u = \sqrt{x} - 1$; $du = \frac{1}{2}x^{-1/2}dx$. $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int u^2 du = \frac{2}{3}u^3 + C_2 = \frac{2}{3}(\sqrt{x}-1)^3 + C_2$

$= \frac{2}{3}(x^{3/2} - 3x + 3x^{1/2} - 1) + C_2 = \frac{2}{3}x^{3/2} - 2x + 2x^{1/2} - \frac{2}{3} + C_2$

(c) As respostas em (a) e (b) são as mesmas com $C_1 = -\frac{2}{3} + C_2$.

57. $\int 2 \operatorname{sen} x \cos x\,dx$

(a) Seja $u = \operatorname{sen} x$; $du = \cos x\,dx$. $\int 2 \operatorname{sen} x \cos x\,dx = 2\int u\,du = u^2 + C_1 = \operatorname{sen}^2 x + C_1$

(b) Seja $u = \cos x$; $du = -\operatorname{sen} x\,dx$. $\int 2 \operatorname{sen} x \cos x\,dx = -2\int u\,du = -u^2 + C_2 = -\cos^2 x + C_2 = \operatorname{sen}^2 x - 1 + C_2$

(c) $\int 2 \operatorname{sen} x \cos x\,dx = \int \operatorname{sen} 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C_3 = -\frac{1}{2}(1 - 2\operatorname{sen}^2 x) + C_3 = \operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{2} + C_3$

(d) As respostas em (a), (b) e (c) são as mesmas com $C_2 = C_1 + 1$ e $C_3 = C_1 + \frac{1}{2}$.

59. $C'(x) = 3(5x+4)^{-1/2}$ e $C(0) = 10$. Então, $C(x) = 3\int (5x+4)^{-1/2}dx = \frac{6}{5}(5x+4)^{1/2} + K$.

Como $C(0) = 10$, $10 = \frac{6}{5}(2) + K$; $K = \frac{38}{5}$. Assim, $C(x) = \frac{6}{5}\sqrt{5x+4} + \frac{38}{5}$.

61. $R'(x) = 4 + 10(x+5)^{-2}$. Portanto, $R(x) = \int [4 + 10(x+5)^{-2}]\,dx = 4x - \frac{10}{x+5} + C$.

Como $R(0) = 0$, $0 = 0 - \frac{10}{5} + C$; $C = 2$. Então, $R(x) = 4x - \frac{10}{x+5} + 2$.

Se x unidades forem demandadas quando p unidades monetárias for o preço unitário, então $px = R(x)$. Assim, $px = 4x - \frac{10}{x+5} + 2$; $px(x+5) = 4x^2 + 20x - 10 + 2x + 10$; $px(x+5) = 4x^2 + 22x$; $p(x+5) = 4x + 22$

63. q coulombs é a carga de eletricidade em t s e $\frac{dq}{dt} = 5 \operatorname{sen} 60t$.

$q = \int 5 \operatorname{sen} 60t\,dt = -\frac{1}{12}\cos 60t + C$. Como $q = 0$ quando $t = \frac{1}{2}\pi$, então, $0 = -\frac{1}{12} + C$; $C = \frac{1}{12}$.

Assim, $q = -\frac{1}{12}\cos 60t + \frac{1}{12} \le \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$. Então, a carga maior será $\frac{1}{6}$ coulombs

65. V unidades monetárias é o volume da maquinaria após t anos, e $\frac{dV}{dt} = -500(t+1)^{-2}$.

$V = \int -500(t+1)^{-2}dt = 500(t+1)^{-1} + C$. Como $V = 700$ quando $t = 0$, então, $700 = 500 + C$; $C = 200$. Assim, $V(t) = 500(t+1)^{-1} + 200$, e $V(3) = 500(4)^{-1} + 200 = 325$. Logo, após 3 anos o valor da maquinaria é \$325.

67. Se $V\ \mu m^3$ for o volume da célula t dias após dezembro, então $\frac{dV}{dt} = (12-t)^{-2}$.

$V = \int (12-t)^{-2}dt = (12-t)^{-1} + C$. Como $V = 3$ quando $t = 2$, então, $3 = 10^{-1} + C$; $C = 2,9$.

Assim, $V = (12-t)^{-1} + 2,9$. Em 8 de dezembro, $t = 7$, $V = 5^{-1} + 2,9 = 3,1$, e o volume é $3,1\ \mu m^3$.

EXERCÍCIOS 5.3 Equações Diferenciais e Movimento Retilíneo

1. $\frac{dy}{dx} = 4x - 5$; $dy = (4x - 5)dx$; $\int dy = \int (4x - 5)dx$; $y = 2x^2 - 5x + C$

3. $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2x - 7$; $dy = (3x^2 + 2x - 7)dx$; $\int dy = \int (3x^2 + 2x - 7)dx$; $y = x^3 + x^2 - 7x + C$

5. $\frac{dy}{dx} = 3xy^2$; $\frac{dy}{y^2} = 3x\,dx$; $\int y^{-2}dy = 3\int x\,dx$; $-\frac{1}{y} = \frac{3}{2}x^2 + \frac{C}{2}$; $y = \frac{-2}{3x^2 + C}$

7. $\frac{du}{dv} = \frac{3v\sqrt{1+u^2}}{u}$; $\frac{u\,du}{\sqrt{1+u^2}} = 3v\,dv$; $\frac{1}{2}\int (1+u^2)^{-1/2}(2u\,du) = 3\int v\,dv$; $(1+u^2)^{1/2} = \frac{3}{2}v^2 + \frac{C}{2}$;

$2\sqrt{1+u^2} = 3v^2 + C$

9. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg}^2 y}$; $\operatorname{tg}^2 y\,dy = \sec^2 x\,dx$; $\int (\sec^2 y - 1)dy = \int \sec^2 x\,dx$; $\operatorname{tg} y - y = \operatorname{tg} x + C$

11. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = 5x^2 + 1$; $dy' = (5x^2 + 1)dx$; $\int dy' = \int (5x^2 + 1)dx$; $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{5}{3}x^3 + x + C_1$;

$\int dy = \int \left(\frac{5}{3}x^3 + x + C_1\right)dx$; $y = \frac{5}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2$

13. $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{ds'}{dt} = \operatorname{sen} 3t + \cos 3t$; $ds' = (\operatorname{sen} 3t + \cos 3t)dt$; $\int ds' = \int (\operatorname{sen} 3t + \cos 3t)dt$

$s' = \frac{ds}{dt} = -\frac{1}{3}\cos 3t + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3t + C_1$; $ds = \left(-\frac{1}{3}\cos 3t + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3t + C_1\right)dt$;

$\int ds = \int \left(-\frac{1}{3}\cos 3t + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3t + C_1\right)dt$; $s = -\frac{1}{9}\operatorname{sen} 3t - \frac{1}{9}\cos 3t + C_1t + C_2$

15. $\frac{dy}{dx} = x^2 - 2x - 4$; $\int dy = \int (x^2 - 2x - 4)dx$; $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 4x + C$. Como $y = -6$ quando $x = 3$

$-6 = 9 - 9 - 12 + C$; $C = 6$. Portanto, $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 4x + 6$.

17. $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos 3x}{\operatorname{sen} 2y}$; $\int \operatorname{sen} 2y\,dy = \int \cos 3x\,dx$; $-\frac{1}{2}\cos 2y = \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + C$. Como $y = \frac{1}{3}\pi$ quando $x = \frac{1}{2}\pi$,

$-\frac{1}{2}\cos\frac{2}{3}\pi = \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi + C$; $-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}(-1) + C$; $C = \frac{7}{12}$. Portanto, $-\frac{1}{2}\cos 2y = \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \frac{7}{12}$;

$\cos 2y = -\frac{2}{3}\operatorname{sen} 3x - \frac{7}{6}$

19. $\frac{d^2u}{dv^2} = 4(1+3v)^2$; $u = -1$ e $\frac{du}{dv} = -2$ qdo $v = -1$.

$\frac{du'}{dv} = 4(1+3v)^2 = 4(9v^2+6v+1)$; $\int du' = 4\int(9v^2+6v+1)\,dv$; $u' = 4(3v^3+3v^2+v)+C_1$.

Como $u' = -2$ qdo. $v = -1$, $-2 = 4(-1)+C_1$; $C_1 = 2$. Portanto,

$\frac{du}{dv} = 12v^3+12v^2+4v+2$; $\int du = \int(12v^3+12v^2+4v+2)\,dv$; $u = 3v^4+4v^3+2v^2+2v+C_2$.

Como $u = -1$ qdo. $v = -1$, $-1 = 3-4+2-2+C_2$; $C_2 = 0$. Portanto, $u = 3v^4+4v^3+2v^2+2v$.

21. $v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2t+4}$; $ds = (2t+4)^{1/2}dt$; $\int ds = \frac{1}{2}\int(2t+4)^{1/2}(2\,dt)$; $s = \frac{1}{3}(2t+4)^{3/2}+C$.

Como $s = 0$ qdo. $t = 0$, $0 = \frac{1}{3}(4)^{3/2}+C$; $C = -\frac{8}{3}$. Portanto, $s = \frac{1}{3}(2t+4)^{3/2}-\frac{8}{3}$

23. $a = 5-2t$; $v = 2$ e $s = 0$ quando $t = 0$.

$\frac{dv}{dt} = 5-2t$; $dv = (5-2t)\,dt$; $\int dv = \int(5-2t)\,dt$; $v = 5t-t^2+C_1$. Como $v = 2$ quando $t = 0$, $2 = C_1$.

Portanto, $v = \frac{ds}{dt} = 5t-t^2+2$; $\int ds = \int(5t-t^2+2)\,dt$; $s = \frac{5}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3+2t+C_2$.

Como $s = 0$ qdo. $t = 0$, obtemos $C_2 = 0$. Portanto, $s = 2t+\frac{5}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3$.

25. $a = t^2+2t$; $s = 1$ quando $t = 0$ e $s = -3$ quando $t = 2$.

$\frac{dv}{dt} = t^2+2t$; $dv = (t^2+2t)\,dt$; $\int dv = \int(t^2+2t)\,dt$; $v = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{3}t^3+t^2+C_1$;

$\int ds = \int\left(\frac{1}{3}t^3+t^2+C_1\right)dt$; $s = \frac{1}{12}t^4+\frac{1}{3}t^3+C_1t+C_2$

Como $s = 1$ qdo. $t = 0$, $C_2 = 1$. Como $s = -3$ qdo. $t = 2$, $-3 = \frac{4}{3}+\frac{8}{3}+2C_1+1$; $C_1 = -4$.

Portanto, $s = \frac{1}{12}t^4+\frac{1}{3}t^3-4t+1$ e $v = \frac{1}{3}t^3+t^2-4$.

27. $a = -4\sqrt{2}\cos(2t-\frac{1}{4}\pi)$; $v = 2$ e $s = 1$ quando $t = 0$.

$\frac{dv}{dt} = -4\sqrt{2}\cos(2t-\frac{1}{4}\pi)$; $\int dv = -2\sqrt{2}\int\cos(2t-\frac{1}{4}\pi)(2\,dt)$; $v = -2\sqrt{2}\,\text{sen}(2t-\frac{1}{4}\pi)+C_1$

Como $v = 2$ qdo. $t = 0$; $2 = -2\sqrt{2}\,\text{sen}(-\frac{1}{4}\pi)+C_1$; $2 = -2\sqrt{2}(-\frac{1}{2}\sqrt{2})+C_1$; $C_1 = 0$.

Portanto, $v = \frac{ds}{dt} = -2\sqrt{2}\,\text{sen}(2t-\frac{1}{4}\pi)$; $\int ds = -\sqrt{2}\int\text{sen}(2t-\frac{1}{4}\pi)(2\,dt)$; $s = \sqrt{2}\cos(2t-\frac{1}{4}\pi)+C_2$.

Como $s = 1$, qdo. $t = 0$, $1 = \sqrt{2}\cos(-\frac{1}{4}\pi)+C_2$; $1 = \sqrt{2}(\frac{1}{2}\sqrt{2})+C_2$; $C_2 = 0$. Assim, $s = \sqrt{2}\cos(2t-\frac{1}{4}\pi)$.

29. $a = 800$; $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt}$; $v\frac{dv}{ds} = 800$; $\int v\,dv = 800\int ds$; $\frac{1}{2}v^2 = 800s + C$. Como $v = 20$ qdo $s = 1$

$\frac{1}{2}(400) = 800 + C$; $C = -600$. Portanto, $\frac{1}{2}v^2 = 800s - 600$; $1600s = v^2 + 1200$.

31. $a = 5s + 2$; $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt}$; $v\frac{dv}{ds} = 5s + 2$; $\int v\,dv = \int(5s + 2)\,ds$; $\frac{1}{2}v^2 = \frac{5}{2}s^2 + 2s + \frac{C}{2}$; $v^2 = 5s^2 + 4s + C$

Como $v = 4$ qdo $s = 2$, $16 = 20 + 8 + C$; $C = -12$. Portanto, $v^2 = 5s^2 + 4s - 12$.

33. Em t s, seja s m a distância orientada da pedra, a partir do chão, e seja , v m/s a sua velocidade. A direção positiva é para cima. Temos uma tabela de condições laterais quando $\bar{t}$ s e $\bar{v}$ m/s são o tempo e a velocidade quando a pedra bate no chão e T s e S m são o tempo e a distância quando a pedra atinge seu ponto mais alto. A aceleração da pedra é aquela devido à gravidade. Portanto, $a = -10$. Assim,

t	s	v
0	0	20
$\bar{t}$	0	$\bar{v}$
T	S	0

$\frac{dv}{dt} = -10$, $\int dv = -10\int dt$; $v = -10t + C_1$. Como $v = 20$ quando $t = 0$, obtemos $C_1 = 20$. Então,

$$v = -10t + 20 \qquad (1)$$

$\frac{ds}{dt} = -10t + 20$; $\int ds = \int(-10t + 20)\,dt$; $s = -5t^2 + 20t + C_2$. Como $s = 0$ qdo $t = 0$, $C_2 = 0$. Assim,

$$s = -5t^2 + 20t \qquad (2)$$

De (2) com $s = 0$ e $t = \bar{t}$, temos $-5\bar{t}^2 + 20\bar{t} = 0$, $-5\bar{t}(\bar{t} - 4) = 0$; $\bar{t} = 4$.

(a) Logo, levará 4 s para a pedra atingir o solo.

De (1) com $t = 4$ e $v = \bar{v}$, temos $\bar{v} = -10[4] + 20 = -20$.

(b) Portanto, a pedra atingirá o solo com a velocidade escalar de 20 m/s.

De (1) com $v = 0$ e $t = \bar{t}$, temos $0 = -10\bar{t} + 20$; $\bar{t} = 2$.

(c) Assim, a pedra subirá durante 2 s.

De (2) com $t = 2$ e $s = \bar{s}$, obtemos $\bar{s} = -5[4] + 20[2] = 20$.

(d) Logo, a pedra atingirá a altura de 20 m.

35. Em t s, seja s m a distância orientada da bola, do topo do monumento de Washington e seja v m/s sua velocidade. A direção positiva é para cima. Temos uma tabela de condições laterais onde $\bar{t}$ s e $\bar{v}$ m/s são o tempo e a velocidade quando a bola atinge o solo. A aceleração é aquela devido à gravidade. Portanto, a = -10 m/s². Assim,

t	s	v
0	0	0
$\bar{t}$	-165	$\bar{v}$

$$\frac{dv}{dt} = -10; \quad \int dv = -10\int dt; \quad v = -10t + C_1$$

Como v = 0 qdo t = 0, então $C_1 = 0$. Logo,

$$v = -10t; \quad \frac{ds}{dt} = -10t; \quad \int ds = -10\int t\,dt; \quad s = -5t^2 + C_2$$

Como s = 0 qdo t = 0, então, $C_2 = 0$. Portanto, $s = -5t^2$. Com s = -165 e t = $\bar{t}$ temos

$$5\bar{t}^2 = -165; \quad \bar{t}^2 = \frac{165}{5} = 33; \quad \bar{t} \approx 5,7$$

(a) Levará $\sqrt{33} \approx 5,7$ s para a bola atingir o solo. Em v = -10t, seja

$t = \sqrt{33}$ e $v = \bar{v}$. Obtemos $\bar{v} = -10\sqrt{33} = -57$.

(b) A bola atingirá o solo com a velocidade escalar de $10\sqrt{33} \approx 57$ m/s.

37. Em t s, seja s m a distância orientada do binóculo até o chão e seja o v m/s a sua velocidade. A direção é positiva para cima. Temos uma tabela das condições laterais quando $\bar{t}$ s e $\bar{v}$ m/s são o tempo e a velocidade quando o binóculo atingir o solo. A aceleração do binóculo é aquela devido à gravidade. Então,

t	s	v
0	150	10
$\bar{t}$	0	$\bar{v}$

$a = -10$; $\frac{dv}{dt} = -10$; $\int dv = -10\int dt$; $v = -10t + C_1$. Como v = 10 qdo t = 0, $C_1 = 10$. Portanto,

$$v = -10t + 10 \qquad (1)$$

$\frac{ds}{dt} = -10t + 10$; $\int ds = \int(-10t + 10)\,dt$; $s = -5t^2 + 10t + C_2$. Como s = 150 qdo t = 0, $C_2 = 150$.

Assim, $s = -5t^2 + 10t + 150$. Com s = 0 e t = $\bar{t}$ temos $-5\bar{t}^2 + 10\bar{t} + 150 = 0$;

$$\bar{t} = \frac{10 + \sqrt{3.100}}{10} = 6,6.$$

(a) Levará $\frac{10 + \sqrt{3.100}}{10} \approx 6,6$ s para o binóculo atingir o solo.

Em (1) seja $t = \frac{10 + \sqrt{3.100}}{10}$ e $v = \bar{v}$. Temos $\bar{v} = [10 + \sqrt{3.100}] \approx -65,7$.

(b) Assim, a velocidade escalar do binóculo no impacto é $10 + \sqrt{3.100} \approx 65,7$ m/s.

39. Em t s, seja s m a distância orientada da bola, a partir do ponto inicial e seja v m/s a sua velocidade. A direção positiva é para cima. Temos uma tabela das condições laterais onde $\bar{v}$ m/s é a velocidade da bola quando ela está 36 m acima do solo (ou, de modo equivalente, 16 m acima do ponto inicial). A aceleração da bola é aquela devido a gravidade. Então, $a = -10$; $v\frac{dv}{ds} = -10$. $\int v\,dv = -10\int ds$; $\frac{1}{2}v^2 = -10s + C_1$.

t	s	v
0	0	40
	16	$\bar{v}$

(a) Como $v = 40$ qdo $s = 0$, obtemos $C_1 = 800$. Portanto, $v^2 = -20s + 1.600$.

Seja $s = 16$ e $v = \bar{v}$. Como a bola está subindo, $\bar{v} > 0$. Temos

$\bar{v}^2 = -20(16) + 1.600 = 1.280$. $\bar{v} = 35,8$ Portanto,

(b) a velocidade da bola é 35,8 m/s quando ela estiver a 36 m do solo, e subindo.

41. Em t s, s cm, é a distância orientada da partícula à direita da origem, v cm/s é sua velocidade e $v = \operatorname{sen} \pi t$. Então, $\frac{ds}{dt} = \operatorname{sen} \pi t$; $\int ds = \int \operatorname{sen} \pi t$; $s = -\frac{1}{\pi}\cos \pi t + C$. Como $s = 0$ qdo $t = 0$, $C = \frac{1}{\pi}$ de modo q. $s = -\frac{1}{\pi}\cos \pi t + \frac{1}{\pi}$. Qdo $t = \frac{2}{3}$, $s = -\frac{1}{\pi}\cos\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{\pi} = \frac{3}{2\pi}$.

Então, em $\frac{2}{3}$ s, a partícula está a $\frac{3}{2\pi}$ cm à direita da origem.

43. $40\frac{km}{h} = 40\frac{km}{h}\cdot\frac{1.000\,m}{1\,km}\cdot\frac{1\,h}{3.600\,s} = \frac{100}{9}\frac{m}{s}$; $100\frac{km}{h} = 100\frac{km}{h}\cdot\frac{1000\,m}{1\,km}\cdot\frac{1\,h}{3.600\,s} = \frac{250}{9}\frac{m}{s}$

Considere o ponto inicial na posição do automóvel quando sua velocidade é $\frac{100}{9}$ m/s. Em t s, seja s m a sua distância a partir do ponto inicial, e seja v m/s a sua velocidade. Seja a direção positiva aquela na qual o automóvel está se deslocando. Temos uma tabela das condições laterais. Seja A m/s² a aceleração constante. Então, $A = v\frac{dv}{ds}$; $A\int ds = \int v\,dv$; $As = \frac{1}{2}v^2 + C$.

t	s	v
0	0	$\frac{100}{9}$
	200	$\frac{250}{9}$

Como $v = \frac{100}{9}$ quando $s = 0$, temos $0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{10.000}{81} + C$; $C = -\frac{5.000}{81}$. Portanto, $As = \frac{1}{2}v^2 - \frac{5.000}{81}$.

Como $v = \frac{250}{9}$ quando $s = 200$, temos $200A = \frac{1}{2}\left(\frac{250}{9}\right)^2 - \frac{5.000}{81} = \frac{26.250}{81}$; $A = \frac{175}{108} \approx 1,62$.

Portanto, o automóvel deveria manter uma aceleração constante de 1,62 m/s².

45. Considere o ponto inicial na posição do carro quando sua velocidade é $100\ \frac{km}{h} = \frac{250}{9}\ \frac{m}{s}$. (Veja o Exercício 43). Em t s, seja s m a distância do carro a partir do ponto inicial e seja v m/s a sua velocidade. Seja a direção positiva aquela na qual o carro está se deslocando. Na tabela de condições laterais $\bar{t}$ s é o tempo e $\bar{s}$ m é a distância do carro, do ponto inicial quando o carro começa a parar. A aceleração é $-8\ m/s^2$.

t	s	v
0	0	$\frac{250}{9}$
$\bar{t}$	$\bar{s}$	0

Então, $\frac{dv}{dt} = -8$; $\int dv = -8\int dt$; $v = -8t + C_1$.

Como $v = \frac{250}{9}$ qdo $t = 0$, então, $C_1 = \frac{250}{9}$. Portanto,

$$v = -8t + \frac{250}{9} \qquad (1)$$

$\frac{ds}{dt} = -8t + \frac{250}{9}$; $\int ds = \int\left(-8t + \frac{250}{9}\right)dt$; $s = -4t^2 + \frac{250}{9}t + C_2$. Como $s = 0$ qdo $t = 0$, $C_2 = 0$. Assim,

$$s = -4t^2 + \frac{250}{9}t \qquad (2)$$

Em (1) seja $v = 0$ e $t = \bar{t}$. Temos $0 = -8\bar{t} + \frac{250}{9}$; $\bar{t} = \frac{125}{36} \approx 3,47$.

(a) Portanto, levará 3,47 s para o carro parar.

Em (2) seja $t = \frac{125}{36}$ e $s = \bar{s}$. Então, $\bar{s} = -4\left(\frac{125}{36}\right)^2 + \frac{250}{9}\left(\frac{125}{36}\right) = \frac{15625}{324} \approx 48,22$.

(b) Então, o carro andará 48,22 m antes de parar.

47. Seja a origem na posição do carro quando os freios são acionados. Em t s, seja s m a sua distância a partir da origem, e seja v m/s a sua velocidade. Seja a direção na qual o carro está se deslocando, positiva. Na tabela das condições laterais, $\bar{v}$ m/s é a velocidade do carro na origem se v = 0 quando s = 25, e qualquer velocidade maior na origem dará a velocidade positiva quando s = 25. Como a aceleração é constante em $-8m/s^2$, temos a equação diferencial

t	s	v
0	0	$\bar{v}$
	25	0

$$v\frac{dv}{ds} = -8;\quad \int v\,dv = -8\int ds;\quad \tfrac{1}{2}v^2 = -8s + C$$

Como v = 0 quando s = 25, obtemos C = 200. Portanto, $\frac{1}{2}v^2 = -8s + 200$; $v^2 = -16s + 400$.

Com s = 0 e $v = \bar{v}$ temos $\bar{v}^2 = 400$; $\bar{v} = 20$. Como $20\ \frac{m}{s} = 20\ \frac{m}{s}\cdot\frac{3600\ s}{1\ h}\cdot\frac{1\ km}{1.000\ m} = 72\ \frac{km}{h}$

A maior velocidade escalar é 20 m/s ou, equivalentemente, 72 km/h.

49. $x^2 = 4ay$; $2x = 4a\frac{dy}{dx}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2}\frac{1}{a} = \frac{x}{2}\frac{4y}{x^2}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$. Então, em qualquer ponto, P = (x, y) que não esteja sobre o eixo, a inclinação da reta tangente à parábola da família dada, que passa por P é $\frac{2y}{x}$ de modo q. a inclinação da reta tangente à curva da família que nós procuramos, passando por P, deve ser $-\frac{x}{2y}$. Assim, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$; $2y\,dy = -x\,dx$; $\int 2y\,dy = -\int x\,dx$; $y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$; $x^2 + 2y^2 = C$.

EXERCÍCIOS 5.4 Área

Nota: $\sum_{i=1}^{n}(i-1)^p = 0^p + 1^p + \cdots + (n-1)^p = 1^p + \cdots + (n-1)^p + n^p - n^p = \sum_{i=1}^{n} i^p - n^p$

1. $\sum_{i=1}^{6}(3i-2) = 3\sum_{i=1}^{6} i - \sum_{i=1}^{6} 2 = 3\cdot\frac{6\cdot 7}{2} - 6\cdot 2 = 63 - 12 = 51$

3. $\sum_{i=1}^{7}(i^2+1) = \sum_{i=1}^{7} i^2 + \sum_{i=1}^{7} 1 = \frac{7\cdot 8(2\cdot 7+1)}{6} + 7\cdot 1 = 140 + 7 = 147$

5. $\sum_{i=1}^{10}(1-i)^3 = \sum_{i=0}^{9} i^3 = 0 + \sum_{i=1}^{9} i^3 = \frac{9^2\cdot 10^2}{4} = \frac{81\cdot 100}{4} = 2025$

7. $\sum_{i=2}^{5}\frac{i}{i-1} = \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} = \frac{73}{12}$

9. $\sum_{i=-2}^{3} 2^i = 2^{-2} + 2^{-1} + 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 + 8 = \frac{63}{4}$

11. $\sum_{k=1}^{4}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

13. $\sum_{i=1}^{25} 2i(i-1) = 2\sum_{i=1}^{25} i^2 - 2\sum_{i=1}^{25} i = 2\cdot\frac{25\cdot 26(2\cdot 25+1)}{6} - 2\cdot\frac{25\cdot 26}{2} = 10.400.$

15. $\sum_{k=1}^{n}(2^k - 2^{k-1}) = 2^n - 2^0 = 2^n - 1$, usando o Teorema 5.4.6 com $F(k) = 2^k$.

17. $\sum_{k=1}^{100}\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] = -\sum_{k=1}^{100}\left[\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right] = -\left[\frac{1}{101} - \frac{1}{1}\right] = \frac{100}{101}$, usando o Teorema 5.4.6 com $F(k) = \frac{1}{k+1}$.

19. $\sum_{i=1}^{n} 4i^2(i-2) = \sum_{i=1}^{n}(4i^3 - 8i^2) = 4\sum_{i=1}^{n} i^3 - 8\sum_{i=1}^{n} i^2 = 4\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4} - 8\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$= \frac{1}{3}n(n+1)[3n(n+1) - 4(2n+1)] = \frac{1}{3}n(n+1)(3n^2-5n-4) = n^4 - \frac{2}{3}n^3 - 3n^2 - \frac{4}{3}n$

21. Seja $f(x) = x^2$. O intervalo fechado $[0,2]$ está dividido em n subintervalos, cada um com $\Delta x = \frac{2}{n}$ de comprimento. O i-ésimo subintervalo é $[x_{i-1}, x_i]$, onde $i = 1,2,3,\ldots,n$. Como f é crescente em $[0,2]$, o valor mínimo absoluto de f em $[x_{i-1}, x_i]$ é $f(x_{i-1})$.

$$f(x_{i-1}) = (x_{i-1})^2 = [(i-1)\Delta x]^2 = (i-1)^2(\Delta x)^2 = \frac{4(i-1)^2}{n^2}$$

Se A unidades quadradas for a área da região, então (veja a Nota)

$$A = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{4(i-1)^2}{n^2}\cdot\frac{2}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{8}{n^3}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 - n^2\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{8}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n^2\right) = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) - \frac{8}{n}\right] = \frac{8}{3}$$

Portanto, a área da região é $\frac{8}{3}$ unidades quadradas.

23. Seja $f(x) = 2x$. O intervalo fechado $[1, 4]$ é dividido em n subintervalos, cada um com $\Delta x = \frac{3}{n}$ de comprimento. O i-ésimo subintervalo é $[x_{i-1}, x_i]$, onde $i = 1,2,3,\ldots,n$. Como f é crescente em $[1,4]$, o valor máximo absoluto de f em $[x_{i-1}, x_i]$ é $f(x_i)$.

$$f(x_i) = 2x_i = 2(1 + i\Delta x) = 2 + \frac{6}{n}i$$

Se A unidades quadradas for a área da região, então

$$A = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(2+\frac{6}{n}i\right)\frac{3}{n} = \lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{6}{n} + \frac{18}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{6}{n}\cdot n + \frac{18}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right]$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left[6 + 9\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = 15$$

Portanto, a área da região é 15 unidades quadradas.

25. Seja $f(x) = 4 - x^2$. O intervalo fechado $[1, 2]$ é dividido em n subintervalos, cada um com $\Delta x = \frac{1}{n}$ de comprimento. O i-ésimo subintervalo é $[x_{i-1}, x_i]$, onde $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Como f é decrescente em $[1, 2]$, o valor mínimo absoluto de f em $[x_{i-1}, x_i]$ é $f(x_i)$.

$$f(x_i) = f(1 + i\Delta x) = f\left(1 + \frac{i}{n}\right) = 4 - \left(1 + \frac{i}{n}\right)^2 = 3 - \frac{2i}{n} - \frac{i^2}{n^2}$$

Se A unidades quadradas for a área da região, então

$$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(3 - \frac{2i}{n} - \frac{i^2}{n^2}\right)\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[3 - \frac{2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[3 - \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)\right] = 3 - 1 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

Portanto, a área da região é $\frac{5}{3}$ unidades quadradas.

27. Seja $f(x) = 4 - x^2$. Queremos encontrar a área da região limitada pela curva $y = f(x)$, o eixo x e a reta $x = 1$. Como f é crescente em $[-2, 0]$ e decrescente em $[0, 1]$ e queremos usar retângulos circunscritos, consideramos os dois intervalos separados $[-2, 0]$ e $[0, 1]$.

Seja A_1 unidades quadradas a área da região limitada pela curva $y = f(x)$, o eixo x e o eixo y. O intervalo fechado $[-2, 0]$ é dividido em n subintervalos, cada um com $\Delta x = \frac{2}{n}$ de comprimento. O i-ésimo subintervalo é $[x_{i-1}, x_i]$ onde $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Como f é crescente em $[-2, 0]$, o valor máximo absoluto de f em $[x_{i-1}, x_i]$ é $f(x_i)$.

$$f(x_i) = f(-2 + i\Delta x) = 4 - \left(-2 + \frac{2}{n}i\right)^2 = \frac{8}{n}i - \frac{4}{n^2}i^2$$

$$A_1 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{8}{n}i - \frac{4}{n^2}i^2\right)\cdot\frac{2}{n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{16}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{16}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} - \frac{8}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[8\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{4}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)\right] = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

Seja A_2 unidades quadradas a área da região limitada pela curva $y = f(x)$, o eixo x, o eixo y e a reta $x = 1$. O intervalo fechado $[0, 1]$ é dividido em n subintervalos, cada um com $\Delta x = \frac{1}{n}$ de comprimento. O i-ésimo subintervalo é $[x_{i-1}, x_i]$ onde $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Como f é decrescente em $[0, 1]$, o valor máximo absoluto de f em $[x_{i-1}, x_i]$ é $f(x_{i-1})$.

$$f(x_{i-1}) = f(0 + (i-1)\Delta x) = 4 - \left[(i-1)\frac{1}{n}\right]^2$$

$$A_2 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[4 - \frac{(i-1)^2}{n^2}\right]\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{4}{n} - \frac{1}{n^3}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 - n^2\right)\right] \text{ (Veja a Nota)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[4 - \frac{1}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n^2\right)\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[4 - \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right] = 4 - \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$$

Se A unidades quadradas for a área da região limitada pela curva $y = f(x)$, o eixo x e a reta $x = 1$, então, $A = A_1 + A_2 = \frac{16}{3} + \frac{11}{3} = 9$. Assim, a área requerida é 9 unidades quadradas.

29. Seja $f(x) = 3x^4$. O intervalo fechado $[0,1]$ é dividido em n subintervalos, cada um com $\Delta x = \frac{1}{n}$ de comprimento. O i-ésimo subintervalo é $[x_{i-1}, x_i]$ onde $i = 1,2,3,\ldots,n$. Como f é crescente em $[0,1]$, o valor mínimo absoluto de f em $[x_{i-1}, x_i]$ é $f(x_{i-1})$.

$$f(x_{i-1}) = f(0 + (i-1)\Delta x) = 3[(i-1)\Delta x]^4 = \frac{3}{n^4}(i-1)^4$$

Se A unidades quadradas for a área da região, então

$$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n^4}(i-1)^4 \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n^5}\left(\sum_{i=1}^{n} i^4 - n^4\right) \text{ (Veja a Nota)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n^5}\left[\frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30} - n^4\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{10}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(6+\frac{9}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right) - \frac{3}{n}\right] = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Portanto, a área da região é $\frac{3}{5}$ unidades quadradas.

31. Seja $f(x) = x^3$. Queremos encontrar a área da região limitada pela curva $y = f(x)$, o eixo x e as retas $x = -1$ e $x = 2$. Como $f(x)$ é não-positiva em $[-1,0]$ e não-negativa em $[0,2]$, consideramos os dois intervalos separados $[-1,0]$ e $[0,2]$. Veja a Figura 5.4.31.

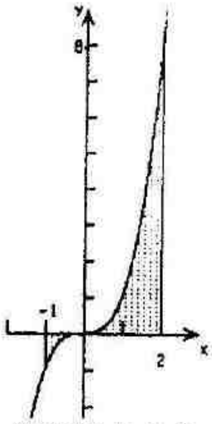


FIGURA 5.4.31

Seja A_1 unidades quadradas a área da região limitada pela curva $y = f(x)$, a reta $x = -1$ e o eixo x. O intervalo fechado $[-1,0]$ é dividido em n subintervalos, cada um com $\Delta x = \frac{1}{n}$ de comprimento. O i-ésimo subintervalo é $[x_{i-1}, x_i]$ onde $i = 1,2,3,\ldots,n$. A função f é crescente em $[-1,0]$, para termos retângulos inscritos, tomamos $-f(x_i)$ como a altura do i-ésimo retângulo.

$$-f(x_i) = -f(-1 + i\Delta x) = -\left(-1+\frac{i}{n}\right)^3 = \frac{(n-i)^3}{n^3}$$

$$A_1 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} -f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-i)^3}{n^3}\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4}[(n-1)^3 + (n-2)^3 + \cdots + 1^3 + 0^3]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4}\left[\sum_{i=1}^{n} i^3 - n^3\right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4} - n^3\right] = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - \frac{1}{n}\right] = \frac{1}{4}$$

Seja A_2 unidades quadradas a área da região limitada pela curva $y = f(x)$, a reta $x = 2$ e o eixo x. O intervalo fechado $[0,2]$ será dividido em n subintervalos, cada um com $\Delta x = \frac{2}{n}$ de comprimento. O i-ésimo subintervalo é $[x_{i-1}, x_i]$ onde $i = 1,2,3,\ldots,n$. A função f é crescente em $[0,2]$ e para termos retângulos circunscritos, tomamos $f(x_{i-1})$ como a altura do i-ésimo retângulo.

$$f(x_{i-1}) = f(0 + (i-1)\Delta x) = \left[(i-1)\frac{2}{n}\right]^3$$

$$A_2 = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[(i-1)\frac{2}{n}\right]^3\cdot\frac{2}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{16}{n^4}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^3 = \lim_{n\to+\infty}\frac{16}{n^4}\left[\sum_{i=1}^{n} i^3 - n^3\right]$$

$$\text{(Veja a Nota)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{16}{n^4}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4} - n^3\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[4\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - \frac{1}{n}\right] = 4$$

Se A unidades quadradas for a área da região limitada pela curva $y = f(x)$, o eixo x e as retas $x = -1$ e $x = 2$, então $A = A_1 + A_2 = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4}$. Assim, a região requerida é $\frac{17}{4}$ unidades quadradas.

33. Seja $f(x) = x^3 + x$. Queremos encontrar a área da região limitada pela curva $y = f(x)$, o eixo x e as retas $x = -2$ e $x = 1$. Como $f(x)$ é não-positiva em $[-2,0]$ e não-negativa em $[0,1]$, consideramos os dois intervalos separados $[-2,0]$ e $[0,1]$. Veja a Figura 5.4.33

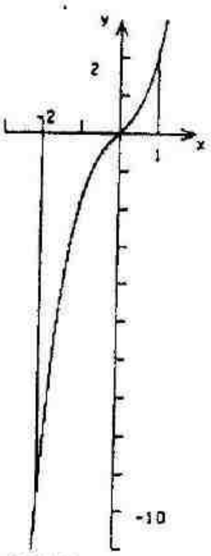


FIGURA 5.4.33

Seja A_1 unidades quadradas a área da região limitada pela curva $y = f(x)$, a reta $x = -1$ e o eixo x. O intervalo fechado $[-2,0]$ é dividido em n subintervalos, cada um com $\Delta x = \frac{2}{n}$ de comprimento. O i-ésimo subintervalo é $[x_{i-1}, x_i]$ onde $i = 1,2,3,\ldots,n$. A função f é crescente em $[-2,0]$, e para termos retângulos circunscritos, tomamos $-f(x_{i-1})$ como a altura do i-ésimo retângulo.

$$-f(x_{i-1}) = -f(-2 + (i-1))\Delta x = -\left[-2 + (i-1)\frac{2}{n}\right]^3 - \left[-2 + (i-1)\frac{2}{n}\right]$$

$$= 8\left(1 - \frac{i-1}{n}\right)^3 + 2\left(1 - \frac{i-1}{n}\right) = 8\left(\frac{n+1-i}{n}\right)^3 + 2\left(\frac{n+1-i}{n}\right)$$

$$A_1 = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} -f(x_{i-1})\Delta x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[8\,\frac{(n+1-i)^3}{n^3} + 2\left(\frac{n+1-i}{n}\right)\right]\cdot\frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{16}{n^4}\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)^3 + \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{16}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 + \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{16}{n^4}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[4\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = 4 + 2 = 6$$

Seja A_2 unidades quadradas a área da região limitada pela curva $y = f(x)$, a reta $x = 1$ e o eixo x. O intervalo fechado $[0,1]$ será dividido em n subintervalos, cada um com $\Delta x = \frac{1}{n}$, de comprimento. O i-ésimo subintervalo é $[x_{i-1}, x_i]$ onde $i = 1,2,3,\ldots,n$. A função f é crescente em $[0,1]$ e para termos retângulos circunscritos, tomamos $f(x_i)$ como a altura do i-ésimo retângulo.

$$f(x_i) = f(0 + i\,\Delta x) = \left(\frac{i}{n}\right)^3 + \frac{i}{n}$$

$$A_2 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i^3}{n^3} + \frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n^4}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Se A unidades quadradas for a área da região limitada pela curva $y = f(x)$, o eixo x e as retas $x = -2$ e $x = 1$, então $A = A_1 + A_2 = 6 + \frac{3}{4}$. Assim, a área requerida é $\frac{27}{4}$ unidades quadradas.

35. Seja $f(x) = mx$, com $m > 0$. O intervalo fechado $[a,b]$ é dividido em n subintervalos, cada um com $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ de comprimento. O i-ésimo subintervalo é $[x_{i-1}, x_i]$ onde $i = 1,2,3,\ldots,n$. Como f é crescente em $[a,b]$, o valor máximo absoluto de f em $[x_{i-1}, x_i]$ é $f(x_i)$.

$$f(x_i) = f(a + i\,\Delta x) = m\left(a + i\cdot\frac{b-a}{n}\right)$$

Se A unidades quadradas for a área da região, então

$$A = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} m\left(a + \frac{b-a}{n}\,i\right)\cdot\frac{b-a}{n} = \lim_{n\to+\infty} m(b-a)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{n} + \frac{b-a}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} m(b-a)\left[a + \frac{b-a}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right] = \lim_{n\to+\infty} m(b-a)\left[a + \frac{b-a}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = m(b-a)\left(a + \frac{b-a}{2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}m(b-a)(b+a) = \tfrac{1}{2}m(b^2-a^2)$$

Portanto, a área da região é $\frac{1}{2}m(b^2-a^2)$ unidades quadradas.

37. Veja Figura 5.4.37 onde $a = \frac{1}{2}(b_1 - b_2)$; $b = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)$.

Calculamos a área do trapézio OCDE, determinando a área dos dois triângulos OAE e BCD e a área do retângulo ABDE, através de retângulos circunscritos.

Para a medida A_1 da área do triângulo OAE, dividimos o intervalo fechado $[0, a]$ em n subintervalos, com $\Delta x = \frac{a}{n}$ de largura. Calculamos a medida da área da região sob o segmento de reta cuja equação

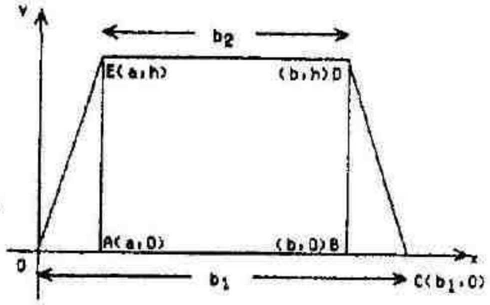


FIGURA 5.4.37

é dada por $y = \frac{h}{a}x$. Seja $f(x) = \frac{h}{a}x$. Como f é crescente no intervalo, o valor mínimo absoluto de f no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ é $f(x_{i-1})$.

$$f(x_{i-1}) = \frac{h}{a}x_{i-1} = \frac{h}{a}(i-1)\Delta x = \frac{h}{a}(i-1)\cdot\frac{a}{n} = \frac{h}{n}(i-1)$$

$$A_1 = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{h}{n}(i-1)\cdot\frac{a}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{ah}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1) = \lim_{n\to+\infty}\frac{ah}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2} - n\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} ah\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right] = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{4}(b_1 - b_2)h$$

Do mesmo modo, se A_2 unidades quadradas for a área do triângulo BCD, então, $A_2 = \frac{1}{4}(b_1 - b_2)h$.

Se A_3 unidades quadradas for a área do retângulo ABDE, então dividimos o intervalo fechado $[a,b]$ em n subintervalos, cada um com $\Delta x = \frac{b_2}{n}$ de largura. Uma equação da reta ED é $y = h$. Seja $f(x) = h$, e f é uma constante no intervalo.

$$A_3 = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} h\cdot\frac{b_2}{n} = \lim_{n\to+\infty} hb_2 = hb_2$$

Se A unidades quadradas for a área do trapézio, então

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \tfrac{1}{4}(b_1 - b_2)h + \tfrac{1}{4}(b_1 - b_2)h + hb_2 = \tfrac{1}{2}(b_1 + b_2)h$$

39. Seja $f(x) = x^2$. O intervalo fechado $[0,3]$ é dividido em n subintervalos, cada um com $\Delta x = \frac{3}{n}$ de comprimento. O i-ésimo subintervalo é $[x_{i-1}, x_i]$ onde $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Seja a altura do i-ésimo retângulo $f(m_i)$, onde $m_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})$.

$$f(m_i) = \left[\frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})\right]^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{n}i + \frac{3}{n}(i-1)\right]^2 = \frac{9}{4n^2}(2i-1)^2 = \frac{9}{4n^2}(4i^2 - 4i + 1)$$

Se A unidades quadradas for a área da região limitada pela curva $y = f(x)$, o eixo x e a reta $x = 3$, então

$$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{9}{4n^2}(4i^2 - 4i + 1)\frac{3}{n} = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{27}{4n^3}\sum_{i=1}^{n} 1\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{27}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{27}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + \frac{27}{4n^3}\cdot n\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{9}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) - \frac{27}{2n}\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{27}{4n^2}\right] = 9$$

Portanto, a área da região é 9 unidades quadradas.

41. Seja $f(x) = 2x$. O intervalo fechado $[1,4]$ é dividido em n subintervalos, cada um com $\Delta x = \frac{3}{n}$ de comprimento. O i-ésimo subintervalo é $[x_{i-1}, x_i]$ onde $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Seja a altura do i-ésimo retângulo $f(m_i)$ onde $m_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})$.

$$f(m_i) = 2\cdot\tfrac{1}{2}(x_i + x_{i-1}) = x_i + x_{i-1} \quad \text{e} \quad \Delta x = x_i - x_{i-1}$$

Se A unidades quadradas for a área da região limitada por $y = f(x)$, o eixo x e as retas $x = 1$ e $x = 4$, então

$$A = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - x_{i-1}^2) = \lim_{n\to+\infty}(x_n^2 - x_0^2)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}(4^2 - 1^2) = \lim_{n\to+\infty} 15 = 15$$

Portanto, a área da região é 15 unidades quadradas.

43. Seja $f(x) = 4 - x^2$. O intervalo fechado $[-2,1]$ é dividido em n subintervalos, cada um com $\Delta x = \frac{3}{n}$ de comprimento. O i-ésimo subintervalo é $[x_i \cdot x_{i-1}]$ onde $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Seja a altura do i-ésimo retângulo $f(m_i)$ onde $m_i = x_i - \frac{1}{2}\Delta x = -2 + \frac{3}{n}i - \frac{1}{2}\frac{3}{n}$.

$$f(m_i) = 4 - \left[\left(-2 - \frac{3}{2n}\right) + \frac{3}{n}i\right]^2 = 4 - \left(2 + \frac{3}{2n}\right)^2 + \left(4 + \frac{3}{n}\right)\frac{3}{n}i - \frac{9}{n^2}i^2 = -\frac{6}{n} - \frac{9}{4n^2} + \left(4 + \frac{3}{n}\right)\frac{3}{n}i - \frac{9}{n^2}i^2$$

Se A unidades quadradas for a área da região acima do eixo x e à esquerda da reta $x=1$ limitada pelo eixo x, a reta $x = 1$ e a curva $y = f(x)$, então

$$A = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{6}{n} - \frac{9}{4n^2} + \left(4 + \frac{3}{n}\right)\frac{3}{n}i - \frac{9}{n^2}i^2\right]\cdot\frac{3}{n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\left(-\frac{18}{n^2} - \frac{27}{4n^3}\right)\sum_{i=1}^{n} 1 + \left(4 + \frac{3}{n}\right)\frac{9}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\left(-\frac{18}{n^2} - \frac{27}{4n^3}\right)\cdot n + \left(4 + \frac{3}{n}\right)\frac{9}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} - \frac{27}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[-\frac{18}{n} - \frac{27}{4n^2} + \frac{9}{2}\left(4 + \frac{3}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{9}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)\right] = 18 - 9 = 9$$

Portanto, a área da região é 9 unidades quadradas.

45. $f(x) = \frac{1}{x}$. O intervalo [1,3] é dividido em 10 subintervalos com $\frac{3-1}{10} = 0{,}2$ de comprimento. Queremos usar retângulos circunscritos. Como $\frac{1}{x}$ é decrescente em [1,3], o valor mínimo absoluto de $\frac{1}{x}$ em $[x_{i-1}, x_i]$ é $\frac{1}{x_i}$. Se A unidades quadradas for a área, então

$$A > [f(1,2) + f(1,4) + f(1,6) + f(1,8) + f(2,0) + f(2,2) + f(2,4) + f(2,6) + f(2,8) + f(3)]0,2$$

$$= \left[\frac{1}{1,2} + \frac{1}{1,4} + \frac{1}{1,6} + \frac{1}{1,8} + \frac{1}{2,0} + \frac{1}{2,2} + \frac{1}{2,4} + \frac{1}{2,6} + \frac{1}{2,8} + \frac{1}{3}\right]0,2 = 1,0349$$

47. $f(x) = \frac{1}{x}$. O intervalo [1,3] é dividido em 10 subintervalos com $\frac{3-1}{10} = 0{,}2$ de comprimento. Queremos usar retângulos circunscritos. Como $\frac{1}{x}$ é decrescente em [1,3], o valor máximo absoluto de $\frac{1}{x}$ em $[x_{i-1}, x_i]$ é $\frac{1}{x_{i-1}}$. Se A unidades quadradas for a área, então

$$A < [f(1) + f(1,2) + f(1,4) + f(1,6) + f(1,8) + f(2,0) + f(2,2) + f(2,4) + f(2,6) + f(2,8)]0,2$$

$$= \left[1 + \frac{1}{1,2} + \frac{1}{1,4} + \frac{1}{1,6} + \frac{1}{1,8} + \frac{1}{2,0} + \frac{1}{2,2} + \frac{1}{2,4} + \frac{1}{2,6} + \frac{1}{2,8}\right]0,2 = 1,1682$$

49. $f(x) = \text{sen } x$. O intervalo $\left[\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi\right]$ é dividido em 8 subintervalos com $\frac{\frac{5}{6}\pi - \frac{1}{6}\pi}{8} = \frac{1}{12}\pi$ de comprimento. Queremos usar retângulos circunscritos. Em $\left[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$, sen x é crescente; assim, seu valor máximo absoluto está no extremo direito de um subintervalo; em $\left[\frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi\right]$ sen x é decrescente; então, seu valor máximo absoluto está no extremo esquerdo de um subintervalo. A unidades quadradas é a área.

$$A < \left[\text{sen } \frac{3}{12}\pi + \text{sen } \frac{4}{12}\pi + \text{sen } \frac{5}{12}\pi + \text{sen } \frac{6}{12}\pi + \text{sen } \frac{6}{12}\pi + \text{sen } \frac{7}{12}\pi + \text{sen } \frac{8}{12}\pi + \text{sen } \frac{9}{12}\pi\right]\frac{1}{12}\pi \approx 1,8530$$

51. $f(x) = \text{sen } x$. O intervalo $\left[\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi\right]$ é dividido em 8 subintervalos com $\frac{\frac{5}{6}\pi - \frac{1}{6}\pi}{8} = \frac{1}{12}\pi$ de comprimento. Queremos usar retângulos circunscritos. Em $\left[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$, sen x é crescente; logo, seu valor mínimo absoluto está no extremo esquerdo de um subintervalo; em $\left[\frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi\right]$, sen x é decrescente; logo, seu valor mínimo absoluto está no extremo direito de um subintervalo. A unidades quadradas é a área.

$$A > \left[\text{sen } \frac{2}{12}\pi + \text{sen } \frac{3}{12}\pi + \text{sen } \frac{3}{12}\pi + \text{sen } \frac{5}{12}\pi + \text{sen } \frac{7}{12}\pi + \text{sen } \frac{8}{12}\pi + \text{sen } \frac{9}{12}\pi + \text{sen } \frac{10}{12}\pi\right]\frac{1}{12}\pi \approx 1,5912$$

53. Queremos provar $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Como $(i-1)^3 = i^3 - 3i^2 + 3i - 1$ então $i^2 = \frac{1}{3}[i^3 - (i-1)^3] + i - \frac{1}{3}$. Usando o Teorema 5.4.6 com $F(i) = i^3$ no primeiro termo e a fórmula 1 no segundo termo, temos

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}[i^3 - (i-1)^3] + \sum_{i=1}^{n} i - \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{3}n = \frac{n}{6}[2n^2 + 3(n+1) - 2]$$

$$= \frac{n}{6}[2(n^2-1) + 3(n+1)] = \frac{n(n+1)}{6}[2(n-1) + 3] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

55. Queremos provar $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}$.

Como $(i-1)^5 = i^5 - 5i^4 + 10i^3 - 10i^2 + 5i - 1$ então, $i^4 = \frac{1}{5}[i^5 - (i-1)^5] + 2i^3 - 2i^2 + i - \frac{1}{5}$.

Usando o Teorema 4.4.6 com $F(i) = i^5$ no primeiro termo e as fórmulas 3, 2 e 1 nos termos sucessivos, temos

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{n}[i^5 - (i-1)^5] + 2\sum_{i=1}^{n} i^3 - 2\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i - \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= \frac{1}{5}\cdot n^5 + 2\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4} - 2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{5}\cdot n$$

$$= \frac{1}{5}n(n^4 - 1) + \frac{1}{2}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{3}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)}{30}[6(n-1)(n^2+1) + 15n(n+1) - 10(2n+1) + 15]$$

$$= \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30} = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)}{30}$$

57. Queremos provar que $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, para todos os números naturais n. Evidentemente, o resultado é verdadeiro para $n = 1$. Agora suponhamos que a fórmula sejá válida para $n = k$. Então, para $n = k + 1$,

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \sum_{i=1}^{k} i^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + \frac{4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)(k^2 + 4k + 4)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

Portanto, a fórmula é válida para $n = k + 1$, então, também é válida, para todos os números naturais n.

59. Queremos provar que $\sum_{i=1}^{n}[F(i) + G(i)] = \sum_{i=1}^{n} F(i) + \sum_{i=1}^{n} G(i)$.

$$\sum_{i=1}^{n}[F(i) + G(i)] = [F(1) + G(1)] + [F(2) + G(2)] + [F(3) + G(3)] + \cdots + [F(n) + G(n)]$$

Aplicando as leis associativa e comutativa de adição ao segundo membro da equação acima, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n}[F(i) + G(i)] = [F(1) + F(2) + F(3) + \cdots + F(n)] + [G(1) + G(2) + G(3) + \cdots + G(n)]$$

$$\sum_{i=1}^{n}[F(i) + G(i)] = \sum_{i=1}^{n} F(i) + \sum_{i=1}^{n} G(i)$$

EXERCÍCIOS 5.5 A Integral Definida

1. $f(x) = x^2,\quad 0 \le x \le 3$

$$\sum_{i=1}^{4} f(\xi_i)\Delta_i x = f(\xi_1)\Delta_1 x + f(\xi_2)\Delta_2 x + f(\xi_3)\Delta_3 x + f(\xi_4)\Delta_4 x$$

$$= f\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2} - 0\right) + f(1)\left(1\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + f\left(1\frac{1}{2}\right)\left(2\frac{1}{4} - 1\frac{1}{4}\right) + f\left(2\frac{1}{2}\right)\left(3 - 2\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{3}{4} + \frac{9}{4}\cdot 1 + \frac{25}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{32} + \frac{3}{4} + \frac{9}{4} + \frac{75}{16} = \frac{247}{32}$$

3. $f(x) = \frac{1}{x},\quad 1 \le x \le 2$

$$\sum_{i=1}^{4} f(\xi_i)\Delta_i x = f(\xi_1)\Delta_1 x + f(\xi_2)\Delta_2 x + f(\xi_3)\Delta_3 x + f(\xi_4)\Delta_4 x$$

$$= f\left(1\frac{1}{4}\right)\left(1\frac{2}{3} - 1\right) + f(2)\left(2\frac{1}{4} - 1\frac{2}{3}\right) + f\left(2\frac{1}{2}\right)\left(2\frac{2}{3} - 2\frac{1}{4}\right) + f\left(2\frac{3}{4}\right)\left(3 - 2\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{12} + \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{12} + \frac{4}{11}\cdot\frac{1}{3} = \frac{8}{15} + \frac{7}{24} + \frac{1}{6} + \frac{1}{33} = \frac{1.469}{1.320}$$

5. $f(x) = x^2 - x + 1,\quad 0 \le x \le 1$

$$\sum_{i=1}^{4} f(\xi_i)\Delta_i x = f(\xi_1)\Delta_1 x + f(\xi_2)\Delta_2 x + f(\xi_3)\Delta_3 x + f(\xi_4)\Delta_4 x$$

$$= f(0{,}1)(0{,}2) + f(0{,}4)(0{,}3) + f(0{,}6)(0{,}2) + f(0{,}9)(0{,}3)$$

$$= (0{,}91)(0{,}2) + (0{,}76)(0{,}3) + (0{,}76)(0{,}2) + (0{,}91)(0{,}3) = 0{,}835$$

7. $f(x) = \operatorname{sen} x,\quad 0 \le x \le \pi$

$$\sum_{i=1}^{5} f(\xi_i)\Delta_i x$$

$$= f(\xi_1)\Delta_1 x + f(\xi_2)\Delta_2 x + f(\xi_3)\Delta_3 x + f(\xi_4)\Delta_4 x + f(\xi_5)\Delta_5 x$$

$$= f\left(\frac{1}{6}\pi\right)\left(\frac{1}{4}\pi - 0\right) + f\left(\frac{1}{3}\pi\right)\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi\right) + f\left(\frac{1}{2}\pi\right)\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi\right) + f\left(\frac{3}{4}\pi\right)\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{2}{3}\pi\right) + f\left(\frac{5}{6}\pi\right)\left(\pi - \frac{3}{4}\pi\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{4} + 1\cdot\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\right)\pi = \frac{1}{24}(10 + \sqrt{2} + 3\sqrt{3})\pi$$

9. $f(x) = [\![x]\!] + 2,\quad -3 \le x \le 3$

$$\sum_{i=1}^{4} f(\xi_i)\Delta_i x = f(\xi_1)\Delta_1 x + f(\xi_2)\Delta_2 x + f(\xi_3)\Delta_3 x + f(\xi_4)\Delta_4 x$$

$$= f(-2{,}5)[-1 - (-3)] + f(-0{,}5)[0 - (-1)] + f(1)[2 - 0] + f(2{,}5)[3 - 2]$$

$$= (-1)(2) + 1(1) + 3(2) + 4(1) = 9$$

11. Seja $f(x) = x^2$. Considere uma partição regular do intervalo fechado $[0,2]$, $\Delta x = 2/n$. O i-ésimo subintervalo é $[x_{i-1}, x_i]$ onde $i = 1,2,3,\ldots,n$. Escolha $\xi_i = x_i$; então, $\xi_i = 0 + i\cdot\frac{2}{n} = \frac{2i}{n}$.

$$\int_0^2 x^2 dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i}{n}\right)\cdot\frac{2}{n} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n}\right)^2\cdot\frac{2}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{8}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{8}{3}$$

13. Seja $f(x) = x^3$. Considere uma partição regular do intervalo fechado $[1,2]$, $\Delta x = 1/n$. O i-ésimo subintervalo é $[x_{i-1}, x_i]$ onde $i = 1,2,3,\ldots,n$. Escolha $\xi_i = x_i$; então, $\xi_i = 1 + \frac{i}{n}$.

$$\int_1^2 x^3 dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(1+\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1+\frac{i}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1+\frac{3i}{n}+\frac{3i^2}{n^2}+\frac{i^3}{n^3}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{3}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot n + \frac{3}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + \frac{3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{n^4}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[1 + \frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right] = 1 + \frac{3}{2} + 1 + \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$$

15. Seja $f(x) = x^2 + 4x + 5$. Considere uma partição regular do intervalo fechado $[1,4]$, $\Delta x = 3/n$. O i-ésimo subintervalo é $[x_{i-1}, x_i]$ onde $i = 1,2,3,\ldots,n$. Escolha $\xi_i = x_i$; então, $\xi_i = 1 + \frac{3}{n}i$.

$$f(\xi_i) = \left(1+\frac{3}{n}i\right)^2 + 4\left(1+\frac{3}{n}i\right) + 5 = 1 + \frac{6}{n}i + \frac{9}{n^2}i^2 + 4 + \frac{12}{n}i + 5 = 10 + \frac{18}{n}i + \frac{9}{n^2}i^2$$

$$\int_1^4 (x^2+4x+5)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(10 + \frac{18}{n}i + \frac{9}{n^2}i^2\right)\cdot\frac{3}{n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{30}{n} + \frac{54}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2\right) = \lim_{n\to+\infty}\left[30 + \frac{54}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + \frac{27}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[30 + 27\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{9}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right] = 30 + 27 + 9 = 66$$

17. Seja $f(x) = x^3 + 1$. Considere uma partição regular do intervalo fechado $[-2,2]$, $\Delta x = 4/n$. O i-ésimo subintervalo é $[x_{i-1}, x_i]$ onde $i = 1,2,3,\ldots,n$. Como $[-2,2]$ é simétrico em relação a 0, escolha $\xi_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1}) = x_i - \frac{1}{2}\Delta x$. Então, $\xi_i = -2 + \frac{4}{n}i - \frac{2}{n} = \frac{2}{n}(2i - n - 1)$.

$$f(\xi_i) = \left[\frac{2}{n}(2i-n-1)\right]^3 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)^3 = (1-n)^3 + (3-n)^3 + \cdots + (n-3)^3 + (n-1)^3 = 0$$

$$\int_{-2}^{2}(x^3+1)\,\Delta x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{8}{n^3}(2i-n-1)^3 + 1\right]\cdot\frac{4}{n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{32}{n^4}\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)^3 + \sum_{i=1}^{n}\frac{4}{n}\right] = \lim_{n\to+\infty}[0+4] = 4$$

19. Seja $f(x) = 2x - 1$. Considere uma partição regular do intervalo fechado $[1,5]$; $\Delta x = 4/n$. O i-ésimo subintervalo é $[x_{i-1}, x_i]$ onde $i = 1,2,3,\ldots,n$. Como f é uma função linear, escolha $\xi_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})$.

$$f(x_i) = 2\cdot\tfrac{1}{2}(x_i + x_{i-1}) - 1 = x_i + x_{i-1} - 1 \quad \text{e} \quad \Delta x = x_i - x_{i-1}$$

Se A unidades quadradas for a área da região requerida, então

$$A = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x = \int_1^5 (2x-1)\,dx$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i + x_{i-1} - 1)(x_i - x_{i-1}) = \lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - x_{i-1}^2) - \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}[(x_n^2 - x_0^2) - (x_n - x_0)] = \lim_{n\to+\infty}[(5^2 - 1^2) - (5-1)] = 20$$

Portanto, a área da região requerida é 20 unidades quadradas.

21. Seja $f(x) = -3x + 2$. Considere uma partição regular do intervalo fechado $[1,5]$, $\Delta x = 4/n$. O i-ésimo subintervalo é $[x_{i-1}, x_i]$ onde $i = 1,2,3,\ldots,n$. Como f é uma função linear, escolha $\xi_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})$.

$$f(x_i) = -\tfrac{3}{2}(x_i + x_{i-1}) + 2 \quad \text{e} \quad \Delta x = x_i - x_{i-1}$$

Se A unidades quadradas for a área da região requerida, então

$$A = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x = \int_{-5}^{-1}(-3x+2)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{3}{2}(x_i + x_{i-1}) + 2\right](x_i - x_{i-1})$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[-\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - x_{i-1}^2) + 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[-\frac{3}{2}(x_n^2 - x_0^2) + 2(x_n - x_0)\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\{-\tfrac{3}{2}[(-1)^2 - (-5)^2] + 2[(-1) - (-5)]\} = 36 + 8 = 44$$

Portanto, a área da região requerida é 44 unidades quadradas.

23. Seja $f(x) = 4 - x^2$. Considere uma partição regular do intervalo fechado $[1,2]$, $\Delta x = 1/n$. O i-ésimo subintervalo é $[x_{i-1}, x_i]$ onde $i = 1,2,3,\ldots,n$. Escolha $\xi_i = x_i$; então, $\xi_i = 1 + \frac{i}{n}$.

$$f(\xi_i) = 4 - \left(1 + \frac{i}{n}\right)^2 = 4 - \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{i^2}{n^2}\right) = 3 - \frac{2}{n}i - \frac{i^2}{n^2}$$

Se A unidades quadradas for a área da região requerida, então

$$A = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x = \int_1^2 (4 - x^2)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(3 - \frac{2}{n}i - \frac{i^2}{n^2}\right)\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}1 - \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i - \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2\right)$$

$$= \left[\frac{3}{n}\cdot n - \frac{2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[3 - \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)\right] = 3 - 1 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

Portanto, a área da região requerida é $\frac{5}{3}$ unidades quadradas.

25. Seja $f(x) = 12 - x - x^2$. Considere uma partição regular do intervalo fechado $[-3, 2]$, $\Delta x = 5/n$. O i-ésimo subintervalo é $[x_{i-1}, x_i]$ onde $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Escolha $\xi_i = x_i$; então, $\xi_i = -3 + \frac{5}{n} i$.

$$f(x_i) = 12 - \left(-3 + \frac{5}{n} i\right) - \left(-3 + \frac{5}{n} i\right)^2 = 12 + 3 - \frac{5}{n} i - 9 + \frac{30}{n} i - \frac{25}{n^2} i^2 = 6 + \frac{25}{n} i - \frac{25}{n^2} i^2$$

Se A unidades quadradas for a área da região requerida, então

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta_i x = \int_{-3}^{2} (12 - x - x^2)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(6 + \frac{25}{n} i - \frac{25}{n^2} i^2\right) \cdot \frac{5}{n}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{30}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{125}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i - \frac{125}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2\right) = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{30}{n} \cdot n + \frac{125}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{125}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left[30 + \frac{125}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{125}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)\right] = 30 + \frac{125}{2} - \frac{125}{3} = \frac{305}{6}$$

Portanto, a área da região requerida é $\frac{305}{6}$ unidades quadradas.

27. Seja $f(x) = x^3 - 4$. Considere uma partição regular do intervalo fechado $[-2, -1]$, $\Delta x = 1/n$. O i-ésimo subintervalo é $[x_{i-1}, x_i]$ onde $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Escolha $\xi_i = x_i$; então, $\xi_i = -2 + \frac{i}{n}$.

$$f(\xi_i) = \left(-2 + \frac{i}{n}\right)^3 - 4 = -12 + \frac{12}{n} i - \frac{6}{n^2} i^2 + \frac{i^3}{n^3}$$

Como $f(x) < 0$ em $[-2, -1]$, a altura do i-ésimo retângulo é $-f(\xi_i)$. Portanto, se A unidades quadradas for a área da região requerida, então

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [-f(\xi_i)] \Delta_i x = \int_{-2}^{-1} (4 - x^3)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(12 - \frac{12}{n} i + \frac{6}{n^2} i^2 - \frac{i^3}{n^3}\right) \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{12}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{12}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i + \frac{6}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3\right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{12}{n} \cdot n - \frac{12}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{6}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{n^4} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left[12 - 6\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2\right] = 12 - 6 + 2 - \frac{1}{4} = \frac{31}{4}$$

Portanto, a área da região requerida é $\frac{31}{4}$ unidades quadradas.

29. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $n = 9$, ξ_i é o extremo direito. $\Delta x = \frac{5 - 2}{9} = \frac{1}{3}$.

$$\int_2^5 f(x)\,dx \approx \left[f\left(\frac{7}{3}\right) + f\left(\frac{8}{3}\right) + f\left(\frac{9}{3}\right) + f\left(\frac{10}{3}\right) + f\left(\frac{11}{3}\right) + f\left(\frac{12}{3}\right) + f\left(\frac{13}{3}\right) + f\left(\frac{14}{3}\right) + f\left(\frac{15}{3}\right)\right]\frac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{9}{49} + \frac{9}{64} + \frac{9}{81} + \frac{9}{100} + \frac{9}{121} + \frac{9}{144} + \frac{9}{169} + \frac{9}{196} + \frac{9}{225}\right]\frac{1}{3} \approx 0,2672$$

31. $n = 8$, ξ_i é o extremo esquerdo. $\Delta x = \dfrac{\pi/3 - (-\pi/3)}{8} = \dfrac{1}{12}\pi$. $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sec x\, dx \approx$

$$\left[\sec\left(-\frac{4}{12}\pi\right) + \sec\left(-\frac{3}{12}\pi\right) + \sec\left(-\frac{2}{12}\pi\right) + \sec\left(\frac{1}{12}\pi\right) + \sec 0 + \sec\frac{1}{12}\pi + \sec\frac{2}{12}\pi + \sec\frac{3}{12}\pi\right]\frac{1}{12}\pi \approx 2,6725$$

33. Para cada inteiro positivo n, considere a partição regular de $[0,2]$ para a qual $\Delta x = \dfrac{2}{n}$. Seja $\xi_i = \dfrac{2i}{n}$ para $1 \le i \le n$. Se f for a função para o qual $f(x) = x^2$, então a soma de Riemann correspondente será $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\frac{4i^2}{n^2}\cdot\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{8i^2}{n^3}$. Então, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{8i^2}{n^3} = \int_0^2 x^2\,dx$.

35. Para cada inteiro positivo n, considere a partição regular de $[0,1]$ para a qual $\Delta x = \dfrac{1}{n}$. Seja $\xi_i = \dfrac{i}{n}$ para $1 \le i \le n$. Se f for a função para a qual $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, então a soma de Riemann correspondente será $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(i/n)^2}\cdot\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{n}{i^2}$. Portanto, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{i^2} = \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$.

37. $$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\operatorname{sgn} x = -1$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\operatorname{sgn} x = 1$. Logo, a função sinal é descontínua em 0 e, portanto, descontínua em $[-1,1]$.

Seja Δ uma partição de $[-1,1]$ em n subintervalos. Seja a largura do i-ésimo subintervalo $\Delta_i x$ e escolha um ξ_i em cada subintervalo, de modo q., $\xi_1 \le \xi_2 \le \cdots \le \xi_n$. Seja 0 um número de r-ésimo subintervalo ou o seu extremo direito. Então,

$$\sum_{i=1}^{n}\operatorname{sgn}(\xi_i)\Delta_i x = \sum_{i=1}^{r-1}(-1)\Delta_i x + \operatorname{sgn}(\xi_r)\Delta_r x + \operatorname{sgn}(\xi_{r+1})\Delta_{r+1} x + \sum_{i=r+2}^{n}(1)\Delta_i x \qquad (1)$$

Mas, $1 - \|\Delta\| \le \displaystyle\sum_{i=1}^{r-1}\Delta_i x \le 1$ e então, $-1 \le \displaystyle\sum_{i=1}^{r-1}(-1)\Delta_i x \le \|\Delta\| - 1$. Também, $-\|\Delta\| \le \operatorname{sgn}(\xi_r)\Delta_r x \le \|\Delta\|$, $0 \le \operatorname{sgn}(\xi_{r+1})\Delta_{r+1}x \le \|\Delta\|$, e $1 - 2\|\Delta\| \le \displaystyle\sum_{i=r+2}^{n}(1)\Delta_i x \le 1 - \|\Delta\|$. Logo, de (1) temos

$$-3\|\Delta\| \le \sum_{i=1}^{n}\operatorname{sgn}(\xi_i)\Delta_i x \le 2\|\Delta\|$$

Logo, se $\delta = \frac{1}{3}\epsilon$, temos

$$\text{se } \|\Delta\| < \delta, \text{ então, } \left|\sum_{i=1}^{n}\operatorname{sgn}(\xi_i)\Delta_i x\right| < \epsilon$$

Portanto, pela Definição 5.5.1, a função sinal é integrável em $[-1,1]$ e pela Definição 5.5.2, $\displaystyle\int_{-1}^{1}\operatorname{sgn}(x)\,dx = 0$.

EXERCÍCIOS 5.6 Propriedades da Integral Definida

1. Do Teorema 5.6.3 $\int_{2}^{5} 4\,dx = 4[5 - 2] = 12$

3. Do Teorema 5.6.3 $\int_{-2}^{2} \sqrt{5}\,dx = \sqrt{5}[2 - (-2)] = 4\sqrt{5}$

5. Do Teorema 5.6.3 $\int_{-5}^{-10} dx = 1\cdot[-10 - (-5)] = -5$

7. $\int_{-1}^{2}(2x^2 - 4x + 5)\,dx = 2\int_{-1}^{2} x^2\,dx - 4\int_{-1}^{2} x\,dx + 5\int_{-1}^{2} dx = 2(3) - 4\left(\frac{3}{2}\right) + 5[2 - (-1)] = 6 - 6 + 15 = 15$

9. $\int_{-1}^{2}\left(2 - 5x + \frac{1}{2}x^2\right)dx = 2\int_{-1}^{2} dx - 5\int_{-1}^{2} x\,dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} x^2 dx = 2[2 - (-1)] - 5\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}(3) = 6 - \frac{15}{2} + \frac{3}{2} = 0$

11. $\int_{2}^{-1}(2x + 1)^2 dx = -\int_{-1}^{2}(4x^2 + 4x + 1)\,dx = -4\int_{-1}^{2} x^2 dx - 4\int_{-1}^{2} x\,dx - \int_{-1}^{2} dx$

$= -4(3) - 4(3/2) - 1\cdot[2 - (-1)] = -12 - 6 - 3 = -21$

13. $\int_{-1}^{2}(x - 1)(2x + 3)\,dx = \int_{-1}^{2}(2x^2 + x - 3)\,dx = 2\int_{-1}^{2} x^2 dx + \int_{-1}^{2} x\,dx - 3\int_{-1}^{2} dx$

$= 2(3) + 3/2 - 3[2 - (-1)] = 6 + 3/2 - 9 = -3/2$

15. $\int_{0}^{\pi}(2\,\text{sen}\,x + 3\cos x + 1)\,dx = 2\int_{0}^{\pi}\text{sen}\,x\,dx + 3\int_{0}^{\pi}\cos x\,dx + \int_{0}^{\pi} dx = 2(2) + 3(0) + 1\cdot[\pi - 0] = 4 + \pi$

17. $\int_{0}^{\pi}(\cos x + 4)^2 dx = \int_{0}^{\pi}(\cos^2 x + 8\cos x + 16)\,dx = \int_{0}^{\pi}(1 - \text{sen}^2 x + 8\cos x + 16)\,dx$

$= 17\int_{0}^{\pi} dx - \int_{0}^{\pi}\text{sen}^2 x\,dx + 8\int_{0}^{\pi}\cos x\,dx = 17\cdot[\pi - 0] - \frac{1}{2}\pi + 8\cdot 0 = \frac{33}{2}\pi$

19. Se x está em $[3,7]$, então, $6 \le 2x \le 14$. Portanto, do Teorema 5.6.9

$$6(7 - 3) \le \int_{3}^{7} 2x\,dx \le 14(7 - 3);\quad 24 \le \int_{3}^{7} 2x\,dx \le 56$$

Portanto, o valor da integral definida dada está em $[24, 56]$.

21. Se x está em $[0,4]$, então, $0 \le x^2 \le 16$. Portanto, do Teorema 5.6.9

$$0(4 - 0) \le \int_{0}^{4} x^2\,dx \le 16(4 - 0);\quad 0 \le \int_{0}^{4} x^2\,dx \le 64$$

Portanto, o valor da integral definida dada está em $[0, 64]$.

23. Se x está em $[-3,6]$, então, $0 \le \sqrt{3 + x} \le 3$. Portanto, do Teorema 5.6.9

$$0\cdot[6 - (-3)] \le \int_{-3}^{6}\sqrt{3 + x}\,dx \le 3[6 - (-3)];\quad 0 \le \int_{-3}^{6}\sqrt{3 + x} \le 27$$

Portanto, o valor da integral definida dada está em $[0, 27]$.

25. Se $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$, $f'(x) = 4x^3 - 16x$. Seja $f'(x) = 0$: $x = 0$, $x = \pm 2$.

$$f(-4) = 144, \quad f(-2) = 0, \quad f(0) = 16$$

Portanto, o valor mínimo absoluto de f em $[-4,0]$ é 0 e o valor máximo absoluto de f em $[-4,0]$ é 144. Logo, do Teorema 5.6.9,

$$0[0-(-4)] \le \int_{-4}^{0}(x^4 - 8x^2 + 16)\,dx \le 144[0-(-4)]; \quad 0 \le \int_{-4}^{0}(x^4 - 8x^2 + 16)\,dx \le 576$$

Portanto, o valor da integral definida dada está em $[0,576]$.

27. Se x está em $\left[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi\right]$, então, $\frac{1}{2} \le \operatorname{sen} x \le \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Assim, do Teorema 5.6.9,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{6}\pi\right) \le \int_{\pi/6}^{\pi/3}\operatorname{sen} x\,dx \le \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{6}\pi\right); \quad \frac{1}{12}\pi \le \int_{\pi/6}^{\pi/3}\operatorname{sen} x\,dx \le \frac{1}{12}\sqrt{3}\,\pi$$

Portanto, o valor da integral definida dada está em $\left[\frac{1}{12}\pi, \frac{1}{12}\sqrt{3}\,\pi\right]$.

29. Se x está em $[1,4]$, então, $0 \le |x-2| \le 2$. Logo, do Teorema 5.6.9,

$$0(4-1) \le \int_{1}^{4}|x-2|\,dx \le 2(4-1); \quad 0 \le \int_{1}^{4}|x-2|\,dx \le 6$$

Portanto, o valor da integral definida dada está em $[0,6]$.

31. Se $f(x) = \frac{x}{x+2}$, $f'(x) = \frac{2}{(x+2)^2}$. Como $f'(x) > 0$ para todo $x \ne -2$, f é crescente em $[-1,2]$. Logo, se x estiver em $[-1,2]$, então, $-1 \le f(x) \le \frac{1}{2}$. Portanto, do Teorema 5.6.9,

$$-1[2-(-1)] \le \int_{-1}^{2}\frac{x}{x+2}\,dx \le \frac{1}{2}[2-(-1)]; \quad -3 \le \int_{-1}^{2}\frac{x}{x+2}\,dx \le \frac{3}{2}$$

Portanto, o valor da integral definida dada está em $[-3, \frac{3}{2}]$.

33. Se $f(x) = 4\cos^3 x - 9\cos x$, então, $f'(x) = -12\cos^2 x \operatorname{sen} x + 9 \operatorname{sen} x = 12 \operatorname{sen} x(\frac{3}{4} - \cos^2 x)$.

Seja $f'(x) = 0$: $\operatorname{sen} x = 0$ e $\cos x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Se x estiver em $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, $f'(x) = 0$ qdo. $x = 0$, $x = \pm\frac{1}{6}\pi$.

$f(-\frac{1}{2}\pi) = 0$, $f(-\frac{1}{6}\pi) = 4(\frac{3}{8}\sqrt{3}) - 9(\frac{1}{2}\sqrt{3}) = -3\sqrt{3} \approx -5{,}20$, $f(0) = -5$, $f(\frac{1}{6}\pi) = -3\sqrt{3}$, $f(\frac{1}{2}\pi) = 0$

Portanto, o valor mínimo absoluto de f em $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ é $-3\sqrt{3}$ e o valor máximo absoluto de f em $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ é 0. Assim, do Teorema 5.6.9,

$$-3\sqrt{3}\left[\frac{1}{2}\pi - \left(-\frac{1}{2}\pi\right)\right] \le \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(4\cos^3 x - 9\cos x)\,dx \le 0\left[\frac{1}{2}\pi - \left(-\frac{1}{2}\pi\right)\right]$$

$$-3\sqrt{3}\,\pi \le \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(4\cos^3 x - 9\cos x)\,dx \le 0$$

Portanto, o valor da integral definida dada está em $[-3\sqrt{3}\pi, 0]$.

35. Como $2x^2 - 4 \geq x^2 - 6$ para todo x, segue do Teorema 5.6.8 que

$$\int_{-1}^{3} (2x^2 - 4)\,dx \geq \int_{-1}^{3} (x^2 - 6)\,dx$$

37. Se x estiver em $[\frac{5}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi]$, então $\operatorname{sen}^2 x \leq \cos^2 x$. Portanto, do Teorema 5.6.8,

$$\int_{3\pi/4}^{5\pi/4} \operatorname{sen}^2 x\,dx \leq \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} \cos^2 x\,dx$$

39. Como f é contínua em $[-3,4]$, então, do Teorema 5.5.3, f é integrável em $[-3,4]$. Aplicando o Teorema 5.6.7 e, então, a Definição 5.5.5, obtemos

$$\int_{3}^{-1} f(x)\,dx + \int_{4}^{3} f(x)\,dx + \int_{-3}^{4} f(x)\,dx + \int_{-1}^{-3} f(x)\,dx = \left(\int_{-3}^{4} f(x)\,dx + \int_{4}^{3} f(x)\,dx\right) + \left(\int_{3}^{-1} f(x)\,dx + \int_{-1}^{-3} f(x)\,dx\right)$$

$$= \int_{-3}^{3} f(x)\,dx + \int_{3}^{-3} f(x)\,dx = \int_{-3}^{3} f(x)\,dx - \int_{-3}^{3} f(x)\,dx = 0$$

41. Se x está em $[0,1]$, então, $x \geq x^2$. Portanto, do Teorema 5.6.8;

$$\int_{0}^{1} x\,dx \geq \int_{0}^{1} x^2\,dx$$

Se x está em $[1,2]$, então, $x \leq x^2$. Portanto, do Teorema 5.6.8,

$$\int_{1}^{2} x\,dx \leq \int_{1}^{2} x^2\,dx$$

43. Do Teorema 5.4.3, $\sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\,\Delta_i x = k \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x$. Portanto,

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\,\Delta_i x = \lim_{\|\Delta\| \to 0} k \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x = k \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x$$

45. Desejamos provar o Teorema 5.6.7 se $b < c < a$. Do Teorema 4.4.6;

$$\int_{b}^{a} f(x)\,dx = \int_{b}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{a} f(x)\,dx$$

$$-\int_{b}^{a} f(x)\,dx = -\int_{c}^{a} f(x)\,dx - \int_{b}^{c} f(x)\,dx$$

Aplicando a Definição 5.5.5, obtemos

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b} f(x)\,dx$$

47. Desejamos provar o Teorema 5.6.7 se $c < b < a$. Do Teorema 5.6.6,

$$\int_{c}^{a} f(x)\,dx = \int_{c}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{a} f(x)\,dx$$

$$-\int_{b}^{a} f(x)\,dx = -\int_{c}^{a} f(x)\,dx + \int_{c}^{b} f(x)\,dx$$

Aplicando a Definição 5.5.5, obtemos

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b} f(x)\,dx$$

49. Desejamos provar o Teorema 5.6.7 se $a = b < c$. Da Definição 5.5.5 como $a = b$, $\int_{a}^{c} f(x)\,dx = -\int_{c}^{b} f(x)\,dx$ e da Definição 5.5.6. como $a = b$, $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = 0$. Assim,

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b} f(x)\,dx$$

EXERCÍCIOS 5.7 O Teorema do Valor Médio para Integrais

1. Do Exercício 5.5.11, $\int_0^2 x^2\,dx = \frac{8}{3}$.

Pelo teorema do valor médio para integrais, existe um número χ em $[0,2]$, tal que

$$\int_0^2 x^2 dx = \chi^2(2);\quad \frac{8}{3} = 2\chi^2;\quad \chi^2 = \frac{4}{3};\quad \chi = \pm\frac{2}{3}\sqrt{3};\quad \frac{2}{3}\sqrt{3}\ \text{está em } [0,2].$$

3. Do Exercício 5.5.13, $\int_1^2 x^3 dx = \frac{15}{4}$.

Pelo teorema do valor médio para integrais, existe um número χ em $[1,2]$, tal que

$$\int_1^2 x^3 dx = \chi^3(1);\quad \chi^3 = \frac{15}{4} = \frac{30}{8};\quad \chi = \frac{1}{2}\sqrt[3]{30}$$

5. Do Exercício 5.5.15, $\int_1^4 (x^2 + 4x + 5)\,dx = 66$.

Pelo teorema do valor médio para integrais, existe um número χ em $[1,4]$, tal que

$$\int_1^4 (x^2 + 4x + 5)\,dx = (\chi^2 + 4\chi + 5)(3);\quad 66 = (\chi^2 + 4\chi + 5)(3);\quad \chi^2 + 4\chi - 17 = 0$$

$$\chi = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 68}}{2} = -2 \pm \sqrt{21};\quad -2 + \sqrt{21} \approx 2,6\ \text{está em } [1,4].$$

7. Do Exercício 5.5.17, $\int_{-2}^2 (x^3 + 1)\,dx = 4$.

Pelo teorema do valor médio para integrais, existe um número χ em $[-2,2]$, tal que

$$\int_{-2}^2 (x^3 + 1)\,dx = (\chi^3 + 1)(4);\quad 4 = (\chi^3 + 1)(4);\quad \chi^3 = 0;\quad \chi = 0$$

9. Pelo teorema do valor médio para integrais, existe um número χ em $[0,2]$, tal que

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2 + 4}\,dx = \frac{1}{\chi^2 + 4}(2)$$

Mas, $\frac{1}{\chi^2 + 4} \le \frac{1}{4}$ pois, χ está em $[0,2]$. Portanto, $\int_0^2 \frac{1}{x^2 + 4}\,dx \le \frac{1}{4}\cdot 2 = \frac{1}{2}$.

11. Pelo teorema do valor médio para integrais, existe um número χ em $[-\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi]$ tal que $\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos x^2\,dx = (\cos \chi^2)\frac{\pi}{3}$. Mas, $\cos \chi^2 \le 1$. Portanto, $\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos x^2\,dx \le \frac{\pi}{3}$.

13. Pelo teorema do valor médio para integrais, existe um número χ em $[2,5]$, tal que

$$\int_2^5 \frac{1}{x^3 + 1}\,dx = \frac{1}{\chi^3 + 1}(3)$$

Mas, $0 \le \frac{1}{\chi^3 + 1} \le \frac{1}{2^3 + 1} = \frac{1}{9}$ se χ estiver em $[2,5]$. Portanto, $0 \le \int_2^5 \frac{1}{x^3 + 1}\,dx \le \frac{1}{3}$.

15. Pelo teorema do valor médio para integrais, existe um número χ em $[0,2]$, tal que

$$\int_0^2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\pi x\,dx = (\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\pi\chi)(2)$$

Mas, $0 \le \operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi\chi \le 1$ se χ estiver em $[0,2]$. Portanto, $0 \le \int_0^2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi x\,dx \le 2$.

17. Dada $\int_{-1}^2 x\,dx = \frac{3}{2}$, o valor médio de x em $[-1,2]$ é $\dfrac{\int_{-1}^2 x\,dx}{2 - (-1)} = \dfrac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$ e ocorre em $x = \frac{1}{2}$.

19. Dada $\int_0^{\pi} \text{sen}\, x\, dx = 2$, o valor médio da função seno em $[0, \pi]$ é $\dfrac{\int_0^{\pi} \text{sen}\, x\, dx}{\pi - 0} = \dfrac{2}{\pi}$.

21. Se a direção positiva for para baixo

$$\frac{dv}{dt} = 32; \quad \int dv = 32\int dt; \quad v = 32t + C$$

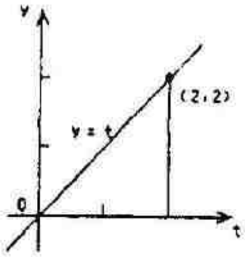


FIGURA 5.7.21

Como v = 0 qdo t = 0, então C = 0. Assim, v = 32t. Seja $f(t) = 32t$. Seja V.M. o valor médio de f em [0,2]. Então,

$$\text{V.M.} = \frac{1}{2}\int_0^2 32t\, dt = 16\int_0^2 t\, dt$$

Observe da Figura 5.7.21 que $\int_0^2 t\, dt$ é a área da região encerrada pelo triângulo. Assim, $\int_0^2 t\, dt = 2$. Logo, V.M. = 32.

23. $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$. O gráfico de f é o semicírculo superior de raio 4 e centro na origem. Logo, $\int_{-4}^{4} f(x)\,dx$ é a medida da área da região encerrada pelo semicírculo e o eixo x. Portanto, $\int_{-4}^{4} \sqrt{16 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\pi(4^2) = 8\pi$.

Então, o valor médio de f em [-4,4] é $\dfrac{1}{4 - (-4)}\int_{-4}^{4}\sqrt{16 - x^2}\, dx = \frac{1}{8}\cdot 8\pi = \pi$.

25. Temos $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Como f é contínua em [a,b] segue do teorema do valor médio para integrais, que há um número C em [a,b], tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a); \quad 0 = f(c)(b - a); \quad f(c) = 0$$

27. O teorema do Exercício 26 estabelece que se f e g forem duas funções contínuas em [a, b] e $g(x) > 0$ para todo x no intervalo aberto (a, b), então existirá um número χ em [a, b], tal que $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\chi)\int_a^b g(x)\,dx$.

Se $g(x) = 1$, então essa equação se torna $\int_a^b f(x)\,dx = f(\chi)\int_a^b dx$.

Mas do Teorema 5.6.3 $\int_a^b dx = b - a$. Portanto, se f for contínua em [a,b], existirá um número χ em [a, b], tal que $\int_a^b f(x)\,dx = f(\chi)(b - a)$.

29. No teorema do Exercício 26, seja $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}$ e $g(x) = x^2$. Então, existe um número χ em [-1,1], tal que $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{\chi^2 + 4}}\int_{-1}^{1} x^2 dx$.

Como $\dfrac{1}{\sqrt{\chi^2 + 4}} < 1$ se χ estiver em [-1,1], então, $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 4}} < \int_{-1}^{1} x^2 dx$.

31. No teorema do Exercício 26, seja $f(x) = \text{sen}^2 \pi x$ e $g(x) = \cos \pi x$. Então, existe um número χ em $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ tal que $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \text{sen}^2 \pi x \cos \pi x\, dx = \text{sen}^2 \pi\chi \int_{-1/2}^{1/2} \cos \pi x\, dx$

Mas, $\text{sen}^2 \pi\chi \le 1$ para todo χ. Portanto, $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \text{sen}^2 \pi x \cos \pi x\, dx \le \int_{-1/2}^{1/2} \cos \pi x\, dx$.

EXERCÍCIOS 5.8 Os Teoremas Fundamentais do Cálculo

1. $\int_0^3 (3x^2 - 4x + 1)\,dx = x^3 - 2x^2 + x\Big]_0^3 = (27 - 18 + 3) - 0 = 12$

3. $\int_3^6 (x^2 - 2x)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - x^2\Big]_3^6 = (72 - 36) - (9 - 9) = 36$

5. $\int_1^2 \frac{x^2 + 1}{x^2}\,dx = \int_1^2 (1 + x^{-2})\,dx = x - \frac{1}{x}\Big]_1^2 = \left(2 - \frac{1}{2}\right) - (1 - 1) = \frac{3}{2}$

7. $\int_0^1 \frac{z}{(z^2 + 1)^3}\,dz = \frac{1}{2}\int_0^1 (z^2 + 1)^{-3}(2z\,dz) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(z^2 + 1)^{-2}}{-2}\Big]_0^1 = -\frac{1}{4(z^2 + 1)^2}\Big]_0^1 = -\frac{1}{16} - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}$

9. $\int_1^{10} \sqrt{5x - 1}\,dx = \frac{1}{5}\int_1^{10} (5x - 1)^{1/2}(5\,dx) = \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}(5x - 1)^{3/2}\Big]_1^{10} = \frac{2}{15}(343 - 8) = \frac{134}{3}$

11. $\int_{-2}^0 3w\sqrt{4 - w^2}\,dw = -\frac{3}{2}\int_{-2}^0 (4 - w^2)^{1/2}(-2w\,dw) = -(4 - w^2)^{3/2}\Big]_{-2}^0 = -8$

13. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2x(2\,dx) = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$

15. $\int_1^2 t^2\sqrt{t^3 + 1}\,dt = \frac{1}{3}\int_1^2 (t^3 + 1)^{1/2}(3t^2 dt) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}(t^3 + 1)^{3/2}\Big]_1^2 = \frac{2}{9}(27 - 2\sqrt{2})$

17. $\int_0^1 \frac{(y^2 + 2y)\,dy}{\sqrt[3]{y^3 + 3y^2 + 4}} = \frac{1}{3}\int_0^1 (y^3 + 3y^2 + 4)^{-1/3}(3y^2 + 6y)\,dy = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(y^3 + 3y^2 + 4)^{2/3}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}(4 - 2\sqrt[3]{2}) = 2 - \sqrt[3]{2}$

19. Seja $z = (1 + w)^{3/4}$. Então, $w = z^{4/3} - 1$; $dw = \frac{4}{3}z^{1/3}dz$. Qdo. $w = 0$, $z = 1$; qdo. $w = 15$, $z = 8$.

$$\int_0^{15} \frac{w\,dw}{(1 + w)^{3/4}} = \int_1^8 \frac{(z^{4/3} - 1)(\frac{4}{3}z^{1/3}dz)}{z} = \frac{4}{3}\int_1^8 (z^{2/3} - z^{-2/3})\,dz = \frac{4}{3}\left[\frac{3}{5}z^{5/3} - 3z^{1/3}\right]_1^8$$

$$= \frac{4}{3}\left[\left(\frac{3}{5}\cdot 32 - 3\cdot 2\right) - \frac{3}{5} + 3\right] = \frac{104}{5}$$

21. $\int_{-2}^5 |x - 3|\,dx = \int_{-2}^3 |x - 3|\,dx + \int_3^5 |x - 3|\,dx = \int_{-2}^3 (3 - x)\,dx + \int_3^5 (x - 3)\,dx = \left[3x - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^3 + \left[\frac{x^2}{2} - 3x\right]_3^5$

$$= \left[\left(9 - \frac{9}{2}\right) - (-6 - 2)\right] + \left[\left(\frac{25}{2} - 15\right) - \left(\frac{9}{2} - 9\right)\right] = \frac{29}{2}$$

23. $\int_{-1}^1 \sqrt{|x| - x}\,dx = \int_{-1}^0 \sqrt{|x| - x}\,dx + \int_0^1 \sqrt{|x| - x}\,dx = \int_{-1}^0 \sqrt{-x - x}\,dx + \int_0^1 \sqrt{x - x}\,dx$

$$= -\sqrt{2}\int_{-1}^0 \sqrt{-x}(-dx) + \int_0^1 0\,dx = -\frac{2}{3}\sqrt{2}(-x)^{3/2}\Big]_{-1}^0 = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

25. Seja $u = \sqrt{x + 1}$. Então, $x = u^2 - 1$; $dx = 2u\,du$. Qdo. $x = 0$, $u = 1$; qdo. $x = 3$, $u = 2$.

$$\int_0^3 (x + 2)\sqrt{x + 1}\,dx = \int_1^2 (u^2 + 1)u(2u\,du) = 2\int_1^2 (u^4 + u^2)\,du = \frac{2}{5}u^5 + \frac{2}{3}u^3\Big]_1^2 = \left(\frac{64}{5} + \frac{16}{3}\right) - \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{62}{5} + \frac{14}{3} = \frac{256}{15}$$

27. $\int_0^1 \frac{x^3 + 1}{x + 1}\,dx = \int_0^1 \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x + 1}\,dx = \int_0^1 (x^2 - x + 1)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\Big]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{6}$

29. $\int_1^{64} \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} + \sqrt[3]{t}\right)dt = \int_1^{64} (t^{1/2} - t^{-1/2} + t^{1/3})\,dt = \frac{2}{3}t^{3/2} - 2t^{1/2} + \frac{3}{4}t^{4/3}\Big]_1^{64}$

$$= \left(\frac{1024}{3} - 16 + 192\right) - \left(\frac{2}{3} - 2 + \frac{3}{4}\right) = \frac{1022}{3} + 178 - \frac{3}{4} = \frac{6215}{12}$$

31. $\int_1^2 \frac{x^3+2x^2+x+2}{(x+1)^2}\,dx = \int_1^2 \frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+2x+1}\,dx = \int_1^2 \left[x + \frac{2}{(x+1)^2}\right] dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{x+1} = \left(2-\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{11}{6}$

33. $\int_0^1 \text{sen}\,\pi x \cos \pi x\,dx = \frac{1}{2\pi}(\text{sen}\,\pi x)^2\Big]_0^1 = \frac{1}{2\pi}(0-0) = 0$

35. $\int_{\pi/8}^{\pi/4} 3\,\text{cosec}^2 2x\,dx = -\frac{3}{2}\text{cotg}\,2x\Big]_{\pi/8}^{\pi/4} = -\frac{3}{2}(0-1) = \frac{3}{2}$

37. $\frac{d}{dx}\int_0^x \sqrt{4+t^6} = \sqrt{4+x^6}$

39. $\frac{d}{dx}\int_x^3 \sqrt{\text{sen}\,t}\,dt = \frac{d}{dx}\left[-\int_3^x \sqrt{\text{sen}\,t}\,dt\right] = -\sqrt{\text{sen}\,x}$

41. $\frac{d}{dx}\int_{-x}^x \frac{dt}{3+t^2} = \frac{d}{dx}\left[\int_{-x}^0 \frac{dt}{3+t^2} + \int_0^x \frac{dt}{3+t^2}\right] = \frac{d}{dx}\int_0^{-x}\frac{-dt}{3+t^2} + \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{dt}{3+t^2} = \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{d(-t)}{3+(-t)^2} + \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{dt}{3+t^2}$

$= \frac{1}{3+x^2} + \frac{1}{3+x^2} = \frac{2}{3+x^2}$

43. Seja $u = x^3$. $\frac{d}{dx}\int_1^{x^3} \sqrt[3]{t^2+1}\,dt = \frac{d}{du}\int_1^u \sqrt[3]{t^2+1}\,dt \cdot \frac{du}{dx} = \sqrt[3]{u^2+1}\,(3x^2) = 3x^2\sqrt[3]{x^6+1}$

45. Seja $u = \text{tg}\,x$. $\frac{d}{dx}\int_2^{\text{tg}\,x} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{d}{du}\int_2^u \frac{1}{1+t^2}dt \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1}{1+u^2}\cdot \sec^2 x = \frac{\sec^2 x}{1+\text{tg}^2 x} = 1$.

47. O valor médio do $9-x^2$ em $[0,3]$ é $\frac{1}{3-0}\int_0^3 (9-x^2)\,dx = \frac{1}{3}\left[9x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = \frac{1}{3}(18-0) = 6$

é $9 - x^2 = 6$; $x^2 = 3$ qdo. $x = \sqrt{3} \in [0,3]$.

49. O valor médio de $3x\sqrt{x^2-16}$ em $[4,5]$ é

$$\frac{1}{5-4}\int_4^5 3x\sqrt{x^2-16}\,dx = 1\cdot\frac{3}{2}\int_4^5 (x^2-16)^{1/2}(2x\,dx) = (x^2-16)^{3/2}\Big]_4^5 = 9^{3/2} - 0 = 27$$

51. O valor médio de $E = 2\,\text{sen}\,3t$ de $t = 0$ a $t = \frac{1}{3}\pi$ é

$$\frac{1}{\frac{1}{3}\pi - 0}\int_0^{\pi/3} 2\,\text{sen}\,3t\,dt = \frac{6}{\pi}.\frac{1}{3}\int_0^{\pi/3} \text{sen}\,3t(3\,dt) = \frac{2}{\pi}\left[-\cos 3t\right]_0^{\pi/3} = \frac{2}{\pi}\left[-(-1)+1\right] = \frac{4}{\pi}$$

53. Tome a direção positiva para baixo. Então, $\frac{dv}{dt} = 32$; $\int dv = 32\int dt$; $v = 32t + C$.

Como $v = 0$ qdo. $t = 0$, então, $C = 0$. Portanto, $v = 32t$.

O valor médio de v de $t = 0$ a $t = \frac{1}{2}T$ é dado por

$$V_1 = \frac{1}{\frac{1}{2}T - 0}\int_0^{T/2} 32t\,dt = \frac{2}{T}\left[16t^2\right]_0^{T/2} = 8T$$

O valor médio de v de $t = \frac{1}{2}T$ a $t = T$ é dado por

$$V_2 = \frac{1}{T - \frac{1}{2}T}\int_{T/2}^T 32t\,dt = \frac{2}{T}\left[16t^2\right]_{T/2}^T = \frac{2}{T}(16T^2 - 4T^2) = 24T$$

Portanto, $V_1 = \frac{1}{3}V_2$.

55. $\int_4^{16}\left[D_x\int_5^x (2\sqrt{t}-1)\,dt\right]dx = \int_4^{16}(2\sqrt{x}-1)\,dx = \frac{4}{3}x^{3/2} - x\Big]_4^{16} = \left(\frac{256}{3}-16\right) - \left(\frac{32}{3}-4\right) = \frac{224}{3} - 12 = \frac{188}{3}$

EXERCÍCIOS 5.9 Área de uma Região Plana

1. A unidades quadradas é a área da região limitada por $y = 4 - x^2$; eixo x.

Δ é uma partição do intervalo [0,2] no eixo x.

$$A = 2\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}(4-\xi_i^2)\Delta_i x = 2\int_0^2(4-x^2)\,dx = 2\left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = 2\left(\frac{16}{3}\right) = \frac{32}{3}$$

3. A unidades quadradas é a área da região limitada por $y = 4x - x^2$; eixo x; $x = 1$; $x = 3$.

Δ é uma partição do intervalo [1,3] no eixo x.

$$A = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}(4\xi_i - \xi_i^2)\Delta_i x = \int_1^3(4x-x^2)\,dx = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3\Big]_1^3 = 9 - \frac{5}{3} = \frac{22}{3}$$

5. A unidades quadradas é a área da região limitada por $y = \sqrt{x+1}$; eixo x; eixo y; x = 8.

Δ é uma partição do intervalo [0,8] no eixo x.

$$A = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\xi_i + 1}\,\Delta_i x = \int_0^8\sqrt{x+1}\,dx = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\Big]_0^8 = \frac{2}{3}(27-1) = \frac{52}{3}$$

7. A unidades quadradas é a área da região limitada por $x^2 + x - 12$; eixo x. Seja $x^2 + x - 12 = 0$.

Δ é uma partição do intervalo [-4,3] no eixo x.

$$A = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i^2 + \xi_i - 12)\Delta_i x = \int_{-4}^3(x^2+x-12)\,dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 12x\Big]_{-4}^3 = \frac{45}{2} - \left(-\frac{104}{3}\right) = \frac{343}{6}$$

9. A unidades quadradas é a área da região limitada por y = sen x; eixo x; $x = \frac{1}{3}\pi$; $x = \frac{2}{3}\pi$.

Δ é uma partição do intervalo $[\frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi]$ no eixo x.

$$A = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{sen}\xi_i\,\Delta_i x = \int_{\pi/3}^{2\pi/3}\operatorname{sen}x\,dx = -\cos x\Big]_{\pi/3}^{2\pi/3} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

11. A unidades quadradas é a área da região limitada por $y = \sec^2 x$; eixo x; eixo y; $x = \frac{1}{4}\pi$.

Δ é uma partição do intervalo $[0, \frac{1}{4}\pi]$ no eixo x.

$$A = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sec^2\xi_i\,\Delta_i x = \int_0^{\pi/4}\sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x\Big]_0^{\pi/4} = 1 - 0 = 1$$

13. A unidades quadradas é a área da região limitada por $x^2 = -y$; $y = -4$. A região é simétrica.

Δ é uma partição do intervalo [0,2] no eixo x.

$$A = 2\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}[-\xi_i^2 - (-4)]\Delta_i x = 2\int_0^2(-x^2+4)\,dx = 2\left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x\right]_0^2 = 2\left(-\frac{8}{3}+8\right) = 2\left(\frac{16}{3}\right) = \frac{32}{3}$$

15. A unidades quadradas é a área da região limitada por $x^2 + y + 4 = 0$; $y = -8$. A região é simétrica.

Δ é uma partição do intervalo [-8,-4] no eixo y.

$$A = 2\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{-\xi_i - 4}\,\Delta_i y = 2\int_{-8}^{-4}\sqrt{-y-4}\,dy = -2\int_{-8}^{-4}(-y-4)^{1/2}(-dy) = -2\cdot\frac{2}{3}(-y-4)^{3/2}\Big]_{-8}^{-4}$$

$$= -\frac{4}{3}[0 - 4^{3/2}] = \frac{32}{3}$$

17. A unidades quadradas é a área da região limitada por $x^2 - y + 1 = 0$; $x - y + 1 = 0$. Seja $x^2 + 1 = x + 1$. Δ é uma partição do intervalo [0,1] no eixo x. Como $x^2 \le x$ em [0,1],

$$A = \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[(\xi_i + 1) - (\xi_i^2 + 1)\right]\Delta_i x = \int_0^1 [(x+1) - (x^2+1)]\,dx = \int_0^1 (-x^2 + x)\,dx = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\Big]_0^1 = \frac{1}{6}$$

19. A unidades quadradas é a área da região limitada por $x^3 = 2y^2$; $x = 0$; $y = -2$ no quarto quadrante. Veja a Figura 5.9.19.

Δ é uma partição do intervalo [-2,0] no eixo y.

$$A = \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt[3]{2\xi_i^2}\,\Delta_i y = \int_{-2}^{0}\sqrt[3]{2y^2}\,dy$$

$$= \sqrt[3]{2}\int_{-2}^{0} y^{2/3}\,dy = \sqrt[3]{2}\cdot\frac{3}{5}y^{5/3}\Big]_{-2}^{0}$$

$$= \frac{3}{5}\sqrt[3]{2}[0 - (-2)^{5/3}] = \frac{3}{5}\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{32}) = \frac{3}{5}\sqrt[3]{64} = \frac{12}{5}$$

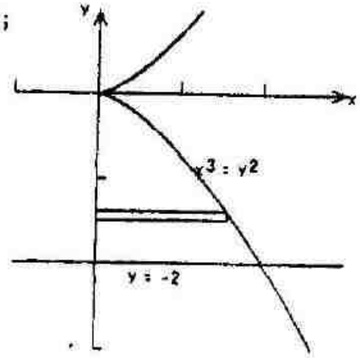


FIGURA 5.9.19

21. A unidades quadradas é a área da região limitada por $y = 2 - x^2$; $y = -x$. Seja $2 - x^2 = -x$; $0 = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$. As duas curvas interceptam-se nos pontos $(-1, 1)$ e $(2, -2)$.

Δ é uma partição do intervalo [-1,2] no eixo x.

$$A = \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n}[(2 - \xi_i^2) - (-\xi_i)]\Delta_i x = \int_{-1}^{2}[(2 - x^2) - (-x)]\,dx = \int_{-1}^{2}(-x^2 + x + 2)\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\Big]_{-1}^{2} = \left(-\frac{8}{3} + 2 + 4\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{9}{2}$$

23. A unidades quadradas é a área da região limitada por $y^2 = x - 1$; $x = 3$. A região é simétrica.

Δ é uma partição do intervalo [1,3] no eixo x.

$$A = 2\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\xi_i - 1}\,\Delta_i x = 2\int_1^3\sqrt{x-1}\,dx = 2\cdot\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}\Big]_1^3 = \frac{4}{3}(2)^{3/2} = \frac{8}{3}\sqrt{2}$$

25. A unidades quadradas é a área da região limitada por $y = \sqrt{x}$ e x^3 encontrando-se em (0,0) e (1,1).

Δ é uma partição do intervalo [0,1] no eixo x.

$$A = \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{\xi_i} - \xi_i^3)\,\Delta_i x = \int_0^1(\sqrt{x} - x^3)\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{4}x^4\Big]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

27. A unidades quadradas é a área da região limitada por $y^3 = x^2$; $x = 3y - 4$. Qdo se interceptam, $y^3 = (3y-4)^2$; $0 = y^3 - 9y^2 + 2y - 16 = (y-1)(y^2 - 8y + 16) = (y-1)(y-4)^2$.

As duas curvas interceptam-se nos pontos (-1,1) e (8,4).

Veja a Figura 5.9.27. Δ é uma partição do intervalo [-1,8] sobre o eixo x.

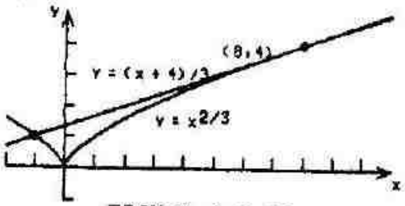


FIGURA 5.9.27

$$A = \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{3}(\xi_i + 4) - \xi_i^{2/3}\right]\Delta_i x = \int_{-1}^{8}\left[\frac{1}{3}(x+4) - x^{2/3}\right]dx$$

$$= \frac{1}{6}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{3}{5}x^{5/3}\Big]_{-1}^{8} = \left(\frac{32}{3} + \frac{32}{3} - \frac{96}{5}\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{4}{3} + \frac{3}{5}\right) = \frac{32}{15} - \left(-\frac{17}{30}\right) = \frac{27}{10}$$

29. A unidades quadradas é a área da região limitada por $x = y^2 - 2$; $x = 6 - y^2$. A região é simétrica. Seja $y^2 - 2 = 6 - y^2$; $2y^2 = 8$; $y^2 = 4$; $y = \pm 2$. As duas curvas se interceptam nos pontos (2,2) e (2,−2). Δ é uma partição do intervalo [0,2] no eixo y.

$$A = 2 \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [(6 - \xi_i^2) - (\xi_i^2 - 2)] \Delta_i y = 2\int_0^2 [(6 - y^2) - (y^2 - 2)]\,dy = 2\int_0^2 (8 - 2y^2)\,dy = 16y - \frac{4}{3}\Big]_0^2$$

$$= 32 - \frac{32}{3} = \frac{64}{3}$$

31. Seja $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 9x$ e $g(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$. Então, $f(x) - g(x) = x^3 - x^2 - 6x = x(x-3)(x+2)$ é não-negativa no intervalo [−2,0] e não-positiva no intervalo [0,3]. Seja A_1 e A_2 unidades quadradas as áreas das regiões limitadas pelas duas curvas qdo. x está nos intervalos [−2,0] e [0,3], respectivamente. O número de unidades quadradas na área requerida é

$$A_1 + A_2 = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) - g(\xi_i)]\Delta_i x + \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [g(\xi_i) - f(\xi_i)]\Delta_i x$$

$$= \int_{-2}^{0} (x^3 - x^2 - 6x)\,dx + \int_0^3 (-x^3 + x^2 + 6x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 3x^2\right]_{-2}^{0} + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 3x^2\right]_0^3$$

$$= \left[0 - \left(4 + \frac{8}{3} - 12\right)\right] + \left[\left(-\frac{81}{4} + 9 + 27\right) - 0\right] = \frac{16}{3} + \frac{63}{4} = \frac{253}{12}$$

33. Seja $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$ e $g(x) = 2x^2 + 4x$. Então, $f(x) - g(x) = x^3 + x^2 - 2x = x(x+2)(x-1)$ é não-negativa no intervalo [−2,0] e não-positiva no intervalo [0,1]. Seja A_1 e A_2 unidades quadradas as áreas das regiões limitadas pelas duas curvas quando x está nos intervalos [−2,0] e [0,1], respectivamente. Então, o número de unidades quadradas na área requerida é

$$A_1 + A_2 = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) - g(\xi_i)]\Delta_i x + \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [g(\xi_i) - f(\xi_i)]\Delta_i x$$

$$= \int_{-2}^{0} (x^3 + x^2 - 2x)\,dx + \int_0^1 (-x^3 - x^2 + 2x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-2}^{0} + \left[-\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_0^1$$

$$= \left[0 - \left(4 - \frac{8}{3} - 4\right)\right] + \left[\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1\right) - 0\right] = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}$$

35. A unidades quadradas é a área da região abaixo de $y = \cos x$ e acima de $y = \operatorname{sen} x$. Δ é uma partição do intervalo $[0, \frac{1}{4}\pi]$ no eixo x.

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\cos \xi_i - \operatorname{sen} \xi_i)\Delta_i x = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx = \operatorname{sen} x + \cos x\Big]_0^{\pi/4}$$

$$= (\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}) - (0 + 1) = \sqrt{2} - 1$$

37. A unidades quadradas é a área da região limitada por $y = |x|$; $y = x^2 - 1$; $x = -1$; $x = 1$.

$$A = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} [\,|\xi_i| - (\xi_i^2 - 1)]\,\Delta_i x = \int_{-1}^{1} [\,|x| - (x^2 - 1)]\,dx = \int_{-1}^{0} [-x - (x^2 - 1)]\,dx + \int_{0}^{1} [x - (x^2 - 1)]\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (-x^2 - x + 1)\,dx + \int_{0}^{1} (-x^2 + x + 1)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right]_{0}^{1}$$

$$= \left[0 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1\right)\right] + \left[\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right) - 0\right] = \frac{7}{6} + \frac{7}{6} = \frac{7}{3}$$

39. Veja a Figura 5.9.39.

Uma equação da reta L_1 por $(5,1)$ e $(1,3)$ é

$$y - 3 = -\tfrac{1}{2}(x - 1)$$

Uma equação da reta L_2 por $(-1,-2)$ e $(5,1)$ é

$$y + 2 = \tfrac{1}{2}(x + 1)$$

Uma equação da reta L_3 por $(-1,-2)$ e $(1,3)$ é

$$y - 3 = \tfrac{5}{2}(x - 1)$$

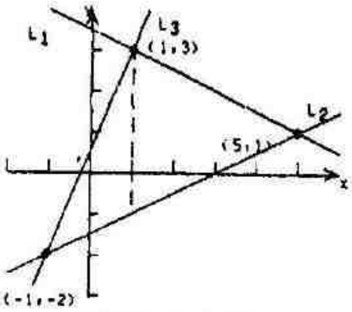


FIGURA 5.9.39

A_1 unidades quadradas é a área da região limitada acima por L_3 e abaixo por L_2 no intervalo $[-1,1]$ e A_2 unidades quadradas é a área da região limitada acima por L_1 e abaixo por L_2 no intervalo $[1,5]$. O número de unidades quadradas na área total do triângulo é $A_1 + A_2$.

$$= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{5}{2}(\xi_i - 1) + 3\right) - \left(\frac{1}{2}(\xi_i + 1) - 2\right)\right]\Delta_i x + \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(-\frac{1}{2}(\xi_i - 1) + 3\right) - \left(\frac{1}{2}(\xi_i + 1) - 2\right)\right]\Delta_i x$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[\left(\frac{5}{2}(x - 1) + 3\right) - \left(\frac{1}{2}(x + 1) - 2\right)\right]dx + \int_{1}^{5} \left[\left(-\frac{1}{2}(x - 1) + 3\right) - \left(\frac{1}{2}(x + 1) - 2\right)\right]dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (2x + 2)\,dx + \int_{1}^{5} (-x + 5)\,dx = \left[x^2 + 2x\right]_{-1}^{1} + \left[-\frac{1}{2}x^2 + 5x\right]_{1}^{5} = [3 - (-1)] + \left(\frac{25}{2} - \frac{9}{2}\right) = 4 + 8 = 12$$

41. Resolva para y: $x^3 - x^2 + 2xy - y^2 = 0$; $y^2 - 2xy + x^2 = x^3$; $(y - x)^2 = x^3$; $y - x = \pm x^{3/2}$; $y = x \pm x^{3/2}$

A unidades quadradas é a área da região abaixo de $y = x + x^{3/2}$ e acima de $y = x - x^{3/2}$.

Δ é uma partição do intervalo $[0,4]$ no eixo x. Então,

$$A = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} [(\xi_i + \xi_i^{3/2}) - (\xi_i - \xi_i^{3/2})]\,\Delta_i x = \int_{0}^{4} [(x + x^{3/2}) - (x - x^{3/2})]\,dx = 2\int_{0}^{4} x^{3/2}\,dx$$

$$= 2 \cdot \frac{2}{5} x^{5/2}\Big]_{0}^{4} = \frac{4}{5}(4)^{5/2} = \frac{128}{5}$$

43. A unidades quadradas é a área da região limitada pelas três curvas $y = f(x) = x^2$, $y = g(x) = 8 - x^2$, e $y = h(x) = 4x + 12$. Veja a Figura 5.9.43.

$(8 - x^2) - x^2 = 8 - 2x^2 = 2(4 - x^2)$ é não-negativa em $[-2, 2]$.

$(4x + 12) - (8 - x^2) = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ é não-negativa em $[-2, +\infty)$; A_1 unidades quadradas é a área da região abaixo de $y = 4x + 12$ e acima de $y = 8 - x^2$ em $[-2, 2]$.

$(4x + 12) - x^2 = -(x^2 - 4x - 12) = -(x - 6)(x + 2)$ é não-negativa em $[-2, 6]$; A_2 unidades quadradas é a área da região abaixo de $y = 4x + 12$ e acima de $y = x^2$ em $[2, 6]$. Então,

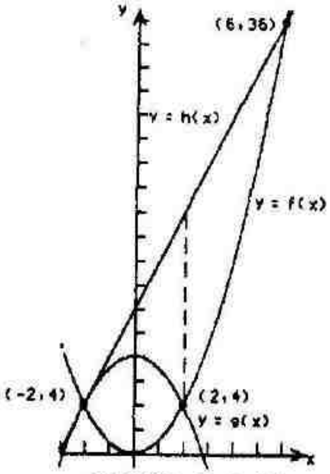


FIGURA 5.9.43

$A = A_1 + A_2$

$$= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [(4\xi_i + 12) - (8 - \xi_i^2)]\Delta_i x + \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [(4\xi_i + 12) - \xi_i^2]\Delta_i x$$

$$= \int_{-2}^{2} [(4x + 12) - (8 - x^2)]\,dx + \int_{2}^{6} [(4x + 12) - x^2]\,dx = \int_{-2}^{2} (x^2 + 4x + 4)\,dx + \int_{2}^{6} (-x^2 + 4x + 12)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x\right]_{-2}^{2} + \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 12x\right]_{2}^{6}$$

$$= \left[\left(\frac{8}{3} + 8 + 8\right) - \left(-\frac{8}{3} + 8 - 8\right)\right] + \left[(-72 + 72 + 72) - \left(-\frac{8}{3} + 8 + 24\right)\right] = \frac{64}{3} + \frac{128}{3} = 64$$

45. A unidades quadradas é a área da região abaixo de $y = 1$ e acima de $y = \operatorname{sen} x$.

Δ é uma partição do intervalo $[0, \frac{1}{2}\pi]$ no eixo x.

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (1 - \operatorname{sen} \xi_i)\Delta_i x = \int_0^{\pi/2} (1 - \operatorname{sen} x)\,dx = x + \cos x \Big]_0^{\pi/2} = (\tfrac{1}{2}\pi + 0) - (0 + 1) = \tfrac{1}{2}\pi - 1$$

47. A unidades quadradas é a área da região limitada por tg x no intervalo $[0, \frac{1}{4}\pi]$.

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{tg}^2 \xi_i)\Delta_i x = \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - 1)\,dx = \operatorname{tg} x - x \Big]_0^{\pi/4} = 1 - \tfrac{1}{4}\pi$$

49. A unidades quadradas é a área da região limitada por $y^2 = 4px$ e $x^2 = 4py$.

Resolvendo para y, achamos $2p^{1/2}x^{1/2} - \frac{1}{4p}x^2 = \frac{1}{4p}x^{1/2}(8p^{3/2} - x^{3/2})$ é positiva em $[0, 4p]$.

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(2p^{1/2}\xi_i^{1/2} - \frac{1}{4p}\xi_i^2\right)\Delta_i x = \int_0^{4p} \left(2p^{1/2}x^{1/2} - \frac{1}{4p}x^2\right)dx = 2p^{1/2}\cdot\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{4p}\cdot\frac{x^3}{3}\Big]_0^{4p}$$

$$= \frac{32}{3}p^2 - \frac{16}{3}p^2 = \frac{16}{3}p^2$$

51. Do Exercício 49, $A = \frac{16}{3}p^2$. A taxa de variação de A em relação a p qdo $p = 3$ é

$$D_p A\Big]_{p=3} = \frac{32}{3}p\Big]_{p=3} = 32$$

53. Como $x \geq 0$ e $m > 0$, $m - mx^2 = m(1 - x^2)$ é positiva em $[0, 1]$.

$$K = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (m - m\xi_i^2)\Delta_i x = \int_0^1 (m - mx^2)\,dx = mx - \frac{1}{3}mx^3\Big]_0^1 = m - \frac{1}{3}m = \frac{2}{3}m. \quad \text{Logo, } m = \frac{3}{2}K.$$

EXERCÍCIOS 5.10 Integração Numérica

1. $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$. Pela regra do trapézio

$$\int_0^2 x^3 dx \approx \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[0^3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2(1)^3 + 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 2^3\right] = \frac{1}{4}\ [0{,}000 + 0{,}250 + 2{,}000 + 6{,}750 + 8{,}000] = 4{,}250$$

enqto. $\int_0^2 x^3 dx = \frac{1}{4}x^4\Big]_0^2 = 4$, exatamente.

3. $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi - 0}{4} = \frac{1}{4}\pi$. Pela regra do trapézio

$$\int_0^\pi \cos x\, dx \approx \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\left(\cos 0 + 2\cos\frac{1}{4}\pi + 2\cos\frac{1}{2}\pi + 2\cos\frac{3}{4}\pi + \cos\pi\right) = \frac{\pi}{8}(1 + \sqrt{2} + 0 - \sqrt{2} - 1) = 0$$

enqto. $\int_0^\pi \cos x\, dx = -\operatorname{sen} x\Big]_0^\pi = \operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen} 0 = 0$, exatamente.

Nota: Por comparação, daremos entre parênteses o valor exato até quatro casas.

5. $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{5} = 0{,}2$. Pela regra do trapézio

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{2}(0{,}2)\left[\frac{1}{1} + \frac{2}{1{,}2} + \frac{2}{1{,}4} + \frac{2}{1{,}6} + \frac{2}{1{,}8} + \frac{1}{2}\right] = 0{,}1\ [1 + 1{,}6667 + 1{,}4286 + 1{,}2500 + 1{,}111 + 0{,}5000]$$

$= 0{,}1\ (6{,}9564) = 0{,}696$ (Exato: 0,6931)

7. $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = 0{,}2$. Pela regra do trapézio $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\approx \frac{1}{2}(0{,}2)\left(\frac{1}{1} + \frac{2}{\sqrt{1+0{,}2^2}} + \frac{2}{\sqrt{1+0{,}4^2}} + \frac{2}{\sqrt{1+0{,}6^2}} + \frac{2}{\sqrt{1+0{,}8^2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$= 0{,}1[1 + 1{,}9612 + 1{,}8570 + 1{,}7150 + 1{,}5617 - 0{,}7071] = 0{,}1\ (8{,}802) = 0{,}880$ (Exato: 0,8814)

9. $\Delta x = \frac{1}{n}(b-a) = \frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{6}\pi$. Pela regra do trapézio $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$

$$\approx \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}\left[\frac{2}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + 2\cdot\frac{3}{2\pi}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} + 2\cdot\frac{6}{5\pi}\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} + 2\cdot\frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\pi + 2\cdot\frac{6}{7\pi}\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6} + 2\cdot\frac{3}{4\pi}\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} + \frac{2}{3\pi}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{\pi}{12}\left(\frac{2}{\pi} + \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} + \frac{6}{5\pi} + 0 - \frac{6}{7\pi} - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} - \frac{2}{3\pi}\right) = \frac{\pi}{12}\left(\frac{2{,}975}{\pi}\right) = 0{,}248 \quad \text{(Exato: 0,2376)}$$

11. $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{6} = \frac{1}{3}$. Pela regra do trapézio $\int_0^2 \sqrt{1+x^4}\, dx$

$$\approx \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left[1 + 2\sqrt{1+\left(\frac{1}{3}\right)^4} + 2\sqrt{1+\left(\frac{2}{3}\right)^4} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^4} + 2\sqrt{1+\left(\frac{5}{3}\right)^4} + 2\sqrt{17}\right]$$

$= \frac{1}{6}[1 + 2{,}0123 + 2{,}1886 + 2{,}8284 + 4{,}0795 + 5{,}9046 + 4{,}1231] = \frac{1}{6}[22{,}1365] = 3{,}689\ (3{,}6535)$

13. $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$. f'' é crescente em $[0,2]$. Portanto, o valor mínimo absoluto de f'' em $[0,2]$ é $f''(0) = 0$, e o valor máximo absoluto de f'' em $[0,2]$ é $f''(2) = 12$. Se ϵ_T for o erro no resultado do Exercício 1, pois $\Delta x = \frac{1}{2}$, haverá um número em $[0,2]$ tal que

$$\epsilon_T = -\frac{1}{12}(2-0)f''(\eta)\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{24}f''(\eta)$$

Assim, $-\frac{1}{24}f''(2) \le \epsilon_T \le -\frac{1}{24}f''(0)$; $-\frac{1}{24}(12) \le \epsilon_T \le -\frac{1}{24}(0)$; $-0{,}5 \le \epsilon_T \le 0$.

15. $f(x) = \cos x$, $f'(x) = -\operatorname{sen} x$, $f''(x) = -\cos x$. O valor máximo absoluto de f'' em $[0, \pi]$ é $f''(\pi) = 1$ e o valor mínimo absoluto de f'' em $[0, \pi]$ é $f''(0) = -1$. Se ϵ_T for o erro no resultado do Exercício 3, pois $\Delta x = \frac{1}{4}\pi$, haverá um número n em $[0, \pi]$ tal que

$$\epsilon_T = -\frac{1}{12}(\pi - 0) f''(n) \left(\frac{\pi}{4}\right)^2. \text{ Assim, } -\frac{\pi^3}{192}(1) \le \epsilon_T \le -\frac{\pi^3}{192}(-1); \quad -0,161 \le \epsilon_T \le 0,161 \quad (\epsilon_T = 0)$$

17. $f(x) = \frac{1}{x}$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2}{x^3}$. f'' é decrescente em $(0,2]$. Portanto, o valor máximo absoluto de f'' em $[1,2]$ é $f''(1) = 2$, e o valor mínimo absoluto de f'' em $[1,2]$ é $f''(2) = 1/4$. Se ϵ_T for o erro no resultado do Exercício 5, pois $\Delta x = 0,2$, haverá um número n em $[1,2]$ tal que

$$\epsilon_T = -\frac{1}{12}(2 - 1) f''(n)\,(0,2)^2 = -0,0033 f''(n)$$

$-0,0033f''(1) \le \epsilon_T \le -0,0033f''(2)$; $-0,0033(2) \le \epsilon_T \le -0,0033(1/4)$; $-0,007 \le \epsilon_T \le -0,001$ $(\epsilon_T = -0,003)$

19. $\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{2 - 0}{4} = \frac{1}{2}$. Pela regra de Simpson

$$\int_0^2 x^3 dx \approx \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left[0^3 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2(1)^3 + 4\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 2^3\right] = \frac{1}{6}[0 + 0,5 + 2 + 13,5 + 8] = \frac{1}{6}[24] = 4$$

enqto. $\int_0^2 x^3 dx = \frac{1}{4}x^4\Big]_0^2 = 4$, exatamente.

21. $\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{0 - (-1)}{4} = 0,25$. Pela regra de Simpson $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{1 - x}$

$$\approx \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{1,75} + \frac{2}{1,5} + \frac{4}{1,25} + 1\right) = \frac{1}{12}(0,5 + 2,286 + 1,333 + 3,2 + 1) = \frac{1}{12}(8,319) = 0,6932 \ (0,6931)$$

23. $\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{1 - 0}{4} = \frac{1}{4}$. Pela regra de Simpson

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x + 1} \approx \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\left[1 + 4\left(\frac{16}{21}\right) + 2\left(\frac{4}{7}\right) + 4\left(\frac{16}{37}\right) + \frac{1}{3}\right] = \frac{1}{12}[1 + 3,0476 + 1,1429 + 1,7297 + 0,3333]$$

$$= \frac{1}{12}[7,2535] = 0,6045 \ (\text{Exato: } 0,6046)$$

25 $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) \equiv 0$, $f^{(4)}(x) \equiv 0$. Se ϵ_S for o erro no resultado do Exercício 19, pois $\Delta x = 1/2$, haverá um número n em $[0,2]$ tal que

$$\epsilon_S = -\frac{1}{180}(2 - 0) f^{(4)}(n) \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

Como $f^{(4)}(x) \equiv 0$, então, $\epsilon_S = 0$. Assim, o resultado no Exercício 19 é exato.

27. $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$, $f'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4}$, $f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1-x)^5}$

Como $f^{(4)}$ é crescente em $[-1,0]$, o valor mínimo absoluto de $f^{(4)}$ em $[-1,0]$ é $f^{(4)}(-1) = 3/4$, e o valor máximo absoluto de $f^{(4)}$ em $[-1,0]$ é $f^{(4)}(0) = 24$. Se ϵ_S for o erro no resultado do Exercício 21, pois $\Delta x = 1/4$, haverá um número η em $[-1,0]$ tal que

$$\epsilon_S = -\frac{1}{180}[0-(-1)]f^{(4)}(\eta)\left(\frac{1}{4}\right)^4 = -\frac{1}{46.080}f^{(4)}(\eta)$$

Assim, $-\frac{1}{46.080}(24) \le \epsilon_S \le -\frac{1}{46.080}\left(\frac{3}{4}\right)$; $-0{,}0005 \le \epsilon_S \le 0$ ($\epsilon_S = -0{,}0001$)

29. $\Delta x = \frac{1}{n}(b-a) = \frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi\right) = \frac{\pi}{6}$. Pela regra de Simpson $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx$

$$\approx \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{6}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi}{\frac{1}{2}\pi} + 4\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{2}{3}\pi}{\frac{2}{3}\pi} + 2\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{5}{6}\pi}{\frac{5}{6}\pi} + 4\cdot\frac{\operatorname{sen}\pi}{\pi} + 2\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{7}{6}\pi}{\frac{7}{6}\pi} + 4\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{4}{3}\pi}{\frac{4}{3}\pi} + \frac{\operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi}{\frac{3}{2}\pi}\right]$$

$= \frac{\pi}{18}(0{,}6366 + 1{,}6540 + 0{,}3820 + 0 - 0{,}2728 - 0{,}8270 - 0{,}2122) = \frac{\pi}{18}(1{,}3606) = 0{,}237$ (0,2376)

31. $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1{,}8-1}{4} = 0{,}2$. Pela regra de Simpson $\int_1^{1,8}\sqrt{1+x^3}\,dx$

$\approx \frac{1}{3}(0{,}2)[\sqrt{2} + 4\sqrt{1+1{,}2^3} + 2\sqrt{1+1{,}4^3} + 4\sqrt{1+1{,}6^3} + \sqrt{1+1{,}8^3}]$

$= 0{,}066667(1{,}4142 + 6{,}6066 + 3{,}8699 + 9{,}0297 + 2{,}6138) = 0{,}066667(23{,}534) = 1{,}5690$ (1,5689)

33. $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{8} = 0{,}25$. Pela regra de Simpson

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{0{,}25}{3}\left[1 + \frac{4}{\sqrt{1+0{,}25^3}} + \frac{2}{\sqrt{1+0{,}5^3}} + \frac{4}{\sqrt{1+0{,}75^3}} + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{1+1{,}25^3}} + \frac{2}{\sqrt{1+1{,}5^3}} + \frac{4}{\sqrt{1+1{,}75^3}} + \frac{1}{3}\right]$$

$= 0{,}083333(1 + 3{,}9691 + 1{,}8856 + 3{,}3545 + 1{,}4142 + 2{,}2377 + 0{,}9562 + 1{,}5862 + 0{,}3333)$

$= 0{,}083333(16{,}8268) = 1{,}4022$ (Exato: 1,4022)

35. O valor da integral $\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx$ é a medida da área da região no primeiro quadrante, encerrado por um quarto da circunferência de raio 2, centrado na origem. Assim,

$$\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\pi(2)^2 = \pi \approx 3{,}142$$

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{8} = 0{,}25$. Pela regra do trapézio $\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx$

$\approx \frac{0{,}25}{2}(2 + 2\sqrt{4-0{,}25^2} + 2\sqrt{4-0{,}5^2} + 2\sqrt{4-0{,}75^2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{4-1{,}25^2} + 2\sqrt{4-1{,}5^2} + 2\sqrt{4-1{,}75^2} + 0)$

$= 0{,}125(2 + 3{,}9686 + 3{,}8730 + 3{,}7081 + 3{,}4641 + 3{,}1225 + 2{,}6458 + 1{,}9365) = 0{,}125(24{,}7186)$

$= 3{,}090$. A exatidão é pequena pois $f'(2)$ não existe.

37. $\Delta x = 0{,}5$. (a) Pela regra do trapézio $\int_0^4 f(x)\,dx \approx$

$\frac{1}{2}(0{,}5)\ [3{,}25 + 2(4{,}17) + 2(4{,}60) + 2(3{,}84) + 2(3{,}59) + 2(4{,}23) + 2(4{,}01) + 2(3{,}96) + 3{,}75] = 15{,}95$

(b) Pela regra de Simpson $\int_0^4 f(x)\,dx \approx$

$\frac{1}{3}(0{,}5))\ [3{,}25 + 4(4{,}17) + 2(4{,}60) + 4(3{,}84) + 2(3{,}59) + 4(4{,}23) + 2(4{,}01) + 4(3{,}96) + 3{,}75] = 16{,}03$

39. $\Delta x = 1$. A unidades quadradas é a área da região . Pela regra de Simpson $A = \int_0^6 f(x)\,dx \approx$

$\frac{1}{3}(1)\ [3{,}2 + 4(4{,}5) + 2(5{,}4) + 4(4{,}4) + 2(2{,}7) + 4(4{,}9) + 5{,}3] = 26{,}6$

41. $\Delta t = \frac{1}{60}$. s km/h é a distância percorrida. Pela regra de Simpson $s = \int_0^{1/6} v(t)\,dt \approx$

$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{60}\right)[0 + 4(30) + 2(33) + 4(41) + 2(38) + 4(32) + 2(42) + 4(45) + 2(41) + 4(37) + 22] = 5{,}9$

43. A unidades quadradas é a área do laço de $y^2 = 8x^2 - x^5 = x^2(8 - x^3)$, que é simétrico. $y = 0$ qdo $x = 0,\ 2$. Com $n = 8$, $\Delta x = \frac{2}{8} = 0{,}25$. Pela regra de Simpson $A = 2\int_0^2 x\sqrt{8 - x^3}\,dx$

$\approx \frac{1}{3}(0{,}25)\ 2[0 + 4(0{,}25)\sqrt{8 - (0{,}25)^3} + 2(0{,}5)\ \sqrt{8 - (0{,}5)^3} + 4(0{,}75)\sqrt{8 - (0{,}75)^3} + 2(1)\sqrt{8 - 1^3}$

$+ 4(1{,}25)\ \sqrt{8 - (1{,}25)^3} + 2(1{,}5)\sqrt{8 - (1{,}5)^3} + 4(1{,}75)\sqrt{8 - (1{,}75)^3} + 0]$

$= 4{,}109$. (Exato: $4{,}181$). A precisão é pequena, pois $y'(2)$ não existe.

45. $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 1$ (a) Pela fórmula prismoidal,

$$\int_1^3 f(x)\,dx = \frac{3-1}{6}[f(1) + 4f(2) + f(3)] = \frac{1}{3}[2 + 4(21) + 82] = \frac{168}{3} = 56$$

(b) $\int_1^3 (4x^3 - 3x^2 + 1)\,dx = \left[x^4 - x^3 + x\right]_1^3 = 57 - 1 = 56$

47. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6$ (a) Pela fórmula prismoidal,

$$\int_{-1}^5 f(x)\,dx = \frac{5-(-1)}{6}[f(-1) + 4f(2) + f(5)] = 1[-2 + 4(10) + 184] = 222$$

(b) $\int_{-1}^5 (x^3 + 3x^2 - 2x - 6)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 - 6x\right]_{-1}^5 = 226{,}25 - 4{,}25 = 222$

49. Se T for o valor aproximado de $\int_a^b f(x)$ qdo, usamos a regra do trapézio, então

$$T = \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \qquad (1)$$

Se S for o valor aproximado de $\int_a^b f(x)\,dx$ quando usamos a regra de Simpson, então, onde n é par,

$$S = \frac{\Delta x}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] \qquad (2)$$

De (1): $\frac{2T}{\Delta x} = f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)$ (3)

De (2): $\frac{3S}{\Delta x} = f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)$ (4)

Subtraindo os membros de (3) dos membros correspondentes de (4), temos

$$\frac{3S}{\Delta x} - \frac{2T}{\Delta x} = 2f(x_1) + 2f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-1});\quad S = \frac{2}{3}[T + \Delta x(f(x_1) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1}))]$$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 5

1. $\int (2x^3 - x^2 + 3)\,dx = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 3x + C$

3. $\int (4y + 6\sqrt{y})\,dy = \int (4y + 6y^{1/2})\,dy = 2y^2 + 6\cdot\frac{2}{3}y^{3/2} + C = 2y^2 + 4y^{3/2} + C$

5. $\int \operatorname{sen} 3t\,dt = \frac{1}{3}\int \operatorname{sen} 3t(3\,dt) = -\frac{1}{3}\cos 3t + C$

7. Seja $u = \cos x$. Então, $du = -\operatorname{sen} x\,dx$. $\int \cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx = -\int u^2 du = -\frac{1}{3}u^3 + C = -\frac{1}{3}\cos^3 x + C$

9. $\int \left(\frac{2}{x^4} - \frac{5}{x^2}\right)dx = \int (2x^{-4} - 5x^{-2})\,dx = 2\cdot\frac{x^{-3}}{-3} - 5\cdot\frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{2}{3x^3} + \frac{5}{x} + C$

11. $\int 5x(2 + 3x^2)^8 dx = \frac{5}{6}\int (2 + 3x^2)^8(6x\,dx) = \frac{5}{6}\left[\frac{1}{9}(2 + 3x^2)^9\right] + C = \frac{5}{54}(2 + 3x^2)^9 + C$

13. $\int \left(\sqrt{3x} + \frac{1}{\sqrt{5x}}\right)dx = \int \left(\sqrt{3}x^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{5}}x^{-1/2}\right)dx = \sqrt{3}\cdot\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 2x^{1/2} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{3x} + \frac{2}{5}\sqrt{5x} + C$

15. $\int \frac{x^3 + x}{(x^4 + 2x^2)^7}dx = \frac{1}{4}\int (x^4 + 2x^2)^{-7}(4x^3 + 4x)\,dx = \frac{1}{4}\,\frac{(x^4 + 2x^2)^{-6}}{-6} + C = -\frac{1}{24(x^4 + 2x^2)^6} + C$

17. Seja $v = \sqrt{2s + 3}$. Então $v^2 = 2s + 3$; $s = \frac{1}{2}(v^2 - 3)$; $ds = v\,dv$.

$$\int \frac{s}{\sqrt{2s + 3}}ds = \int \frac{\frac{1}{2}(v^2 - 3)}{v}(v\,dv) = \frac{1}{2}\int (v^2 - 3)\,dv = \frac{1}{6}v^3 - \frac{3}{2}v + C = \frac{1}{6}(2s + 3)^{3/2} - \frac{3}{2}(2s + 3)^{1/2} + C$$

19. $\int \operatorname{tg}^2 3\theta\,d\theta = \int (\sec^2 3\theta - 1)\,d\theta = \frac{1}{3}\int \sec^2 3\theta(3\,d\theta) - \int d\theta = \frac{1}{3}\operatorname{tg} 3\theta - \theta + C$

21. $\int \frac{5\cos^2 x - 3\operatorname{tg} x}{\cos x}dx = 5\int \cos x\,dx - 3\int \operatorname{tg} x \sec x\,dx = 5\operatorname{sen} x - 3\sec x + C$

23. Seja $v = \sqrt{4x + 3}$. Então, $x = \frac{v^2 - 3}{4}$ e $dx = \frac{1}{2}v\,dv$.

$$\int \sqrt{4x + 3}(x^2 + 1)\,dx = \int v\left[\left(\frac{v^2 - 3}{4}\right)^2 + 1\right]\left(\frac{1}{2}v\,dv\right) = \frac{1}{32}\int v^2[(v^4 - 6v^2 + 9) + 16]\,dv = \frac{1}{32}\int (v^6 - 6v^4 + 25v^2)\,dv$$

$$= \frac{1}{32}\left(\frac{1}{7}v^7 - \frac{6}{5}v^5 + \frac{25}{3}v^3\right) + C = \frac{1}{32}\left[\frac{1}{7}(4x + 3)^{7/2} - \frac{6}{5}(4x + 3)^{5/2} + \frac{25}{3}(4x + 3)^{3/2}\right] + C$$

$$= \frac{(4x + 3)^{3/2}}{32\cdot 105}[15(4x + 3)^2 - 126(4x + 3) + 875] + C$$

$$= \frac{(4x + 3)^{3/2}}{32\cdot 105}[15(16x^2 + 24x + 9) - 504x - 378 + 875] + C = \frac{(4x + 3)^{3/2}}{420}(30x^2 - 18x + 79) + C$$

25. Seja $f(x) = 3x^2 - 1$. Considere uma partição regular do intervalo fechado $[0, 2]$; $\Delta x = 2/n$. O i-ésimo subintervalo é $[x_{i-1}, x_i]$ onde $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Escolha $\xi_i = x_i$; então, $= \frac{2i}{n}$.

$$\int_0^2 (3x^2 - 1)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n}\left[3\left(\frac{2i}{n}\right)^2 - 1\right]\frac{2}{n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{24}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} 1\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{24}{n^3}\cdot\frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} - \frac{2}{n}\cdot n\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[4\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) - 2\right] = 8 - 2 = 6$$

27. Seja $f(x) = x^3 + 2x$. Considere uma partição regular do intervalo fechado $[-2, 1]$; $\Delta x = 3/n$. O i-ésimo subintervalo é $[x_{i-1}, x_i]$ onde $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Escolha $\xi_i = x_i$; então, $\xi_i = -2 + \frac{3i}{n}$

$$f(\xi_i) = \left(-2 + \frac{3i}{n}\right)^3 + 2\left(-2 + \frac{3i}{n}\right) = -8 + \frac{36}{n}i - \frac{54}{n^2}i^2 + \frac{27}{n^3}i^3 - 4 + \frac{6}{n}i = -12 + \frac{42}{n}i - \frac{54}{n^2}i^2 + \frac{27}{n^3}i^3$$

$$\int_{-2}^{1}(x^3 + 2x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(-12 + \frac{42}{n}i - \frac{54}{n^2}i^2 + \frac{27}{n^3}i^3\right)\cdot\frac{3}{n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{36}{n}\sum_{i=1}^{n}1 + \frac{126}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i - \frac{162}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2 + \frac{81}{n^4}\sum_{i=1}^{n}i^3\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[-\frac{36}{n}\cdot n + \frac{126}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} - \frac{162}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{81}{n^4}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[-36 + 63\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 27\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) + \frac{81}{4}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2\right] = -36 + 63 - 54 + \frac{81}{4} = -\frac{27}{4}$$

29. $\displaystyle\int_{-2}^{2}(t^3 - 3t)\,dt = \frac{1}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2\Big]_{-2}^{2} = \frac{1}{4}\left[(2)^4 - (-2)^4\right] - \frac{3}{2}\left[(2)^2 - (-2)^2\right] = 0$

31. $\displaystyle\int_{2}^{3}\frac{12x\,dx}{(x^2 - 1)^2} = 6\int_{2}^{3}(x^2 - 1)^{-2}(2x\,dx) = 6\left[-(x^2 - 1)^{-1}\right]_{2}^{3} = 6\left[-\frac{1}{8} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{5}{4}$

33. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/6}\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\cos^2 2\theta}\,d\theta = -\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/6}\cos^{-2}2\theta(-2\operatorname{sen} 2\theta\,d\theta) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\cos 2\theta}\right]_{0}^{\pi/6} = \frac{1}{2}(2 - 1) = \frac{1}{2}$

35. Seja $v = \sqrt{x + 2}$; então $x = v^2 - 2$ e $dx = 2v\,dv$. Qdo $x = -1$, $v = 1$, e qdo $x = 7$, $v = 3$. Assim,

$$\int_{-1}^{7}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x + 2}} = \int_{1}^{3}\frac{(v^2 - 2)^2(2v\,dv)}{v} = \int_{1}^{3}(2v^4 - 8v^2 + 8)\,dv = \frac{2}{5}v^5 - \frac{8}{3}v^3 + 8v\Big]_{1}^{3} = \frac{2}{5}\cdot 242 - \frac{8}{3}\cdot 26 + 8\cdot 2 = \frac{652}{15}$$

37. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}(\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}x + \sec^2\tfrac{1}{2}x)\,dx = \int_{0}^{\pi/2}(\sec^2\tfrac{1}{2}x - 1 + \sec^2\tfrac{1}{2}x)\,dx = 4\int_{0}^{\pi/2}\sec^2\tfrac{1}{2}x(\tfrac{1}{2}dx) - \int^{\pi/2}dx$

$$= \left[4\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x - x\right]_{0}^{\pi/2} = 4 - \tfrac{1}{2}\pi$$

39. $x^2y\frac{dy}{dx} = (y^2 - 1)^2$; $\displaystyle\int\frac{y\,dy}{(y^2 - 1)^2} = \int\frac{dx}{x^2}$; $\displaystyle\frac{1}{2}\int(y^2 - 1)^{-2}(2y\,dy) = \int x^{-2}\,dx$; $\displaystyle\frac{1}{2}\cdot\frac{(y^2 - 1)^{-1}}{-1} = \frac{x^{-1}}{-1} - \bar{C}$

$\tfrac{1}{2}(y^2 - 1)^{-1} = x^{-1} + \bar{C}$; $\displaystyle y^2 = \frac{1}{2x^{-1} + C} + 1$

41. $\displaystyle\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \sqrt{2x - 1}$; $\displaystyle y' = \frac{1}{2}\int(2x - 1)^{1/2}(2\,dx) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(2x - 1)^{3/2} + C_1$

$$y = \frac{1}{3}\int(2x - 1)^{3/2}dx + C_1\int dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}(2x - 1)^{5/2} + C_1x + C_2 = \frac{1}{15}(2x - 1)^{5/2} + C_1x + C_2$$

43. (a) Seja $u = x^3 + 1$. Então, $du = 3x^2dx$. $\displaystyle\int(x^3 + 1)^2x^2dx = \frac{1}{3}\int u^2du = \frac{1}{9}u^3 + C_1 = \frac{1}{9}(x^3 + 1)^3 + C_1$

(b) $\displaystyle\int(x^3 + 1)^2x^2dx = \int(x^6 + 2x^3 + 1)x^2dx = \int(x^8 + 2x^5 + x^2)\,dx = \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{3}x^6 + \frac{1}{3}x^3 + C_2$

A resposta em (a) pode ser escrita como $\tfrac{1}{9}(x^9 + 3x^6 + 3x^3 + 1) + C_1 = \tfrac{1}{9}x^9 + \tfrac{1}{3}x^6 + \tfrac{1}{3}x^3 + (\;\; + C_1)$.
Assim, as respostas em (a) e (b) são as mesmas com $C_2 = \tfrac{1}{9} + C_1$.

45. $\frac{dy}{dx} = 10 - 4x$; $y = \int (10 - 4x)\,dx = 10x - 2x^2 + C$. Como y = -1 quando x = 1, $-1 = 8 + C$; $C = -9$.
Portanto, uma equação da curva é $y = 10x - 2x^2 - 9$.

47. $R'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 10x + 12$ (a) $R(x) = \int (\frac{3}{4}x^2 - 10x + 12)\,dx = \frac{1}{4}x^3 - 5x^2 + 12x + K$.

Como $R(0) = 0$, então, $0 = k$ e $R(x) = \frac{1}{4}x^3 - 5x^2 + 12x$.

(b) $R = px$ logo $px = \frac{1}{4}x^3 - 5x^2 + 12x$ e a equação de demanda é $p = \frac{1}{4}x^2 - 5x + 12$.

49. (a) $\frac{dV}{dt} = \sqrt{t+1} + \frac{2}{3}t$; $V = \int \left[(t+1)^{1/2} + \frac{2}{3}t\right]dt$; $V = \frac{2}{3}(t+1)^{3/2} + \frac{1}{3}t^2 + C$

Como V = 33 qdo t = 3, $33 = \frac{2}{3}\cdot 8 + \frac{1}{3}\cdot 9 + C$; $C = \frac{74}{3}$. Logo, $V = \frac{2}{3}(t+1)^{3/2} + \frac{1}{3}t^2 + \frac{74}{3}$.

(b) Qdo $t = 8$, $V = \frac{2}{3}\cdot 27 + \frac{1}{3}\cdot 64 + \frac{74}{3} = 64$; logo, o volume do balão é $64\ m^3$.

51. Se V cm^3 for o volume do tumor t dias após 1° de julho, então

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{100}(t+6)^{1/2};\quad V = \frac{1}{100}\int (t+6)^{1/2}dt;\quad V = \frac{1}{150}[(t+6)^{3/2} + C]$$

Como $V = 0,20$ qdo $t = 3$, $\frac{1}{5} = \frac{27 + C}{150}$; $30 = 27 + C$; $C = 3$. Logo, $V = \frac{1}{150}[(t+6)^{3/2} + 3]$.

Em 31 de julho t = 30, logo, $V = \frac{219}{150} = \frac{73}{50}$ e o volume do tumor será $1,46\ cm^3$.

53. Se x brinquedos forem a demanda qdo p unidades monetárias for o preço por brinquedo, então

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{p^2}{30.000};\quad -30.000\int\frac{dp}{p^2} = \int dx;\quad \frac{30.000}{p} = x + K.$$

Como x = 1.800 qdo p = 10, k = 1.200. Logo, $\frac{30.000}{p} = x + 1200$; $p = \frac{30.000}{x + 1.200}$.

Se R(x) for o rendimento total da venda de x unidades $R(x) = px = \frac{30.000x}{x + 1.200}$.
Seja S(x) o lucro total da venda de x unidades. Então,

$$S(x) = R(x) - C(x) = \frac{30.000x}{x + 1.200} - (x + 7.500),\quad 0 < x < +\infty$$

Queremos encontrar o valor de x para o qual S tem um valor máximo absoluto

$$S'(x) = \frac{30.000(x + 1.200) - 30.000x}{(x + 1.200)^2} - 1 = \frac{36.000.000}{(x + 1.200)^2} - 1;\quad S''(x) = -\frac{72.000.000}{(x + 1.200)^3}$$

Seja $S'(x) = 0$: $\frac{36.000.000}{(x + 1.200)^2} = 1$; $(x + 1200)^2 = 36,000,000$; $x + 1.200 = \pm 6.000$; $x = 4.800$, $x = -7.200$

x = 4.800 é o único número crítico. Como S"(4.800) tem um valor máximo relativo qdo x = 4.800 e $p = \frac{30.000}{4.800 + 1.200} = 5$; também é um valor máximo absoluto pelo Teorema 4.8.1 (i).

O lucro do fabricante será máximo qdo 4.800 brinquedos forem vendidos a \$5 por unidade.

55. $a = 6\cos 2t$; $v = 3$ e $s = 4$ qdo $t = \frac{1}{2}\pi$.

$$a = \frac{dv}{dt} = 6\cos 2t;\quad v = 3\int \cos 2t(2\,dt);\quad v = 3\,\text{sen}\,2t + C_1$$

Como $v = 3$ qdo $t = \frac{1}{2}\pi$, então, $C_1 = 3$. Logo, $v = \frac{ds}{dt} = 3\,\text{sen}\,2t + 3$.

$$s = \frac{3}{2}\int \text{sen}\,2t(2dt) + 3\int dt = -\frac{3}{2}\cos 2t + 3t + C_2$$

Como $s = 4$ qdo $t = \frac{1}{2}\pi$, $4 = -\frac{3}{2}(-1) + \frac{3}{2}\pi + C_2$; $C_2 = \frac{1}{2}(5 - 3\pi)$.

Portanto, $s = -\frac{3}{2}\cos 2t + 3t + \frac{1}{2}(5 - 3\pi)$.

57. Em t s, seja s m a distância orientada da bola, do ponto de partida, e seja v m/s sua velocidade. A direção positiva é para cima. Temos uma tabela de condições de contorno qdo $\bar{t}$ s for o tempo que a bola leva para atingir o oceano. A aceleração da bola é aquela devido à gravidade. Portanto, $a = -10$. Logo,

t	s	v
0	0	-2500
$\bar{t}$	-30,000	

$\frac{dv}{dt} = -10$; $v = -10\int dt = -10t + C_1$. Como $v = -750$ quando $t = 0$, $C_1 = -750$. Portanto,

$v = \frac{ds}{dt} = -10t - 750$; $s = \int(-10t - 750)\,dt = -5t^2 - 750t + C_2$. Como $s = 0$ qdo $t = 0$, $C_2 = 0$.

Logo, $s = -5t^2 - 750t$. Como $t = \bar{t}$ qdo $s = -9.000$,

$-9.000 = -5\bar{t}^2 - 750\bar{t}$; $-\bar{t}^2 - 150\bar{t} + 1.800 = 0$; $\bar{t} = \frac{150 \pm \sqrt{29.700}}{-2} = \frac{-150 \pm 172{,}3}{-2} = 11{,}2$.

O tempo que a bola leva para atingir o oceano é $\approx$ 11,2 s.

59. Em t s, seja s m a distância orientada da bola, do ponto de partida, e seja v m/s sua velocidade. A direção é positiva para cima. Temos uma tabela das condições de contorno onde $\bar{t}$ s e $\bar{v}$ m/s são, respectivamente, o tempo que a bola leva para atingir o solo e a sua velocidade. A aceleração da bola é devido à gravidade. Portanto, $a = -10$.

t	s	v
0	0	-14
$\bar{t}$	-19	$\bar{v}$

Logo, $\frac{dv}{dt} = -10$; $v = -10\int dt = -10t + C_1$. Como $v = -14$ qdo $t = 0$, obtemos $C_1 = -14$.

Assim, $v = \frac{ds}{dt} = -10t - 14$; $s = \int(-10t - 14)\,dt = -5t^2 - 14t + C_2$. Como $s = 0$ qdo $t = 0$, $C_2 = 0$.

Portanto, $s = -5t^2 - 14t$. Como $t = \bar{t}$ qdo $s = -19$,

$$-5\bar{t}^2 - 14\bar{t} + 19 = 0;\quad \bar{t} = \frac{14 \pm \sqrt{576}}{-10}\quad \bar{t} = 1,\ \bar{t} = 3{,}8$$

(a) Logo, leva 1 s para a bola atingir o solo.

(b) Em $v = -10t - 14$, seja $v = \bar{v}$ e $t = 1$. Então, $\bar{v} = -24$. Portanto, a velocidade da bola é -24 m/s qdo ela atinge o solo.

61. Como $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30} = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$ e $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$,

$$\sum_{i=1}^{100} 2i(i^3-1) = 2\sum_{i=1}^{100} i^4 - 2\sum_{i=1}^{100} i = 2\cdot\frac{100(101)(201)(30299)}{30} - 2\cdot\frac{100(101)}{2} = 4.100.656.560$$

63. $\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \sum_{i=1}^{n} i^3$

Se $n = 1$, temos $\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1^3 = 1$ e $\left(\sum_{i=1}^{1} i\right)^2 = 1^2 = 1$.

Se $n = 2$, temos $\sum_{i=1}^{2} i^3 = 1^3 + 2^3 = 9$ e $\left(\sum_{i=1}^{2} i\right)^2 = (1+2)^2 = 9$.

Se $n = 3$, temos $\sum_{i=1}^{3} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$ e $\left(\sum_{i=1}^{3} i\right)^2 = (1+2+3)^2 = 6^2 = 36$.

65. Aplicamos o Teorema 5.6.8

(a) se x estiver em $[-2,-1]$, $x - 3 < x < 0$, logo $\frac{1}{x-3} > \frac{1}{x}$. Assim, $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x-3} \geq \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}$.

(b) se x estiver em $[1, 2]$, $x > 0 > x - 3$, logo $\frac{1}{x} > \frac{1}{x-3}$. Assim, $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x} \geq \int_{1}^{2} \frac{dx}{x-3}$.

(c) se x estiver em $[4, 5]$, $0 < x - 3 < x$, logo $\frac{1}{x-3} > \frac{1}{x}$. Assim, $\int_{4}^{5} \frac{dx}{x-3} \geq \int_{4}^{5} \frac{dx}{x}$.

67. Se t estiver em $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, $0 \leq \cos t \leq 1$, logo $0 \leq \sqrt{\cos t} \leq 1$. Então, do Teorema 5.6.9

$$0[\tfrac{1}{2}\pi - (-\tfrac{1}{2}\pi)] \leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos t}\,dt \leq 1[\tfrac{1}{2}\pi - (-\tfrac{1}{2}\pi)];\quad 0 \leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos t}\,dt \leq \pi$$

Assim, o valor da integral definida dada estará em $[0, \pi]$.

69. $\int_{-3}^{3} |x-2|^3 dx = \int_{-3}^{2} |x-2|^3 dx + \int_{2}^{3} |x-2|^3 dx = \int_{-3}^{2} (2-x)^3 dx + \int_{2}^{3} (x-2)^3 dx$

$$= -\frac{(2-x)^4}{4}\Big]_{-3}^{2} + \frac{(x-2)^4}{4}\Big]_{2}^{3} = \left(0 + \frac{625}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - 0\right) = \frac{313}{2}$$

71. $\frac{d}{dx}\int_{x}^{4} (3t^2-4)^{3/2} dt = \frac{d}{dx}\left[-\int_{4}^{x} (3t^2-4)^{3/2} dt\right] = -(3x^2-4)^{3/2}$

73. Seja $u = x^2$ e seja a entre x e x^2.

$$\frac{d}{dx}\int_{x}^{x^2} \frac{1}{t} dt = \frac{d}{dx}\left(\int_{a}^{x^2} \frac{1}{t} dt - \int_{a}^{x} \frac{1}{t} dt\right) = \frac{1}{du}\int_{a}^{u} \frac{1}{t} dt\,\frac{du}{dx} - \frac{d}{dx}\int_{a}^{x} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{u}(2x) - \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}(2x) - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

75. O valor médio da função co-seno em $[a, a + 2\pi]$ é

$$\frac{1}{(a+2\pi)-a}\int_{a}^{a+2\pi} \cos x\,dx = \frac{1}{2\pi}\Big[\operatorname{sen} x\Big]_{a}^{a+2\pi} = \frac{\operatorname{sen}(a+2\pi) - \operatorname{sen} a}{2\pi} = \frac{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} a}{2\pi} = 0.$$

77. $f(x) = x^2\sqrt{x-3}$. Seja $v = \sqrt{x-3}$. Então, $x = v^2 + 3$ e $dx = 2v\,dv$. Quando $x = 7$, $v = 2$ e quando $x = 2$, $v = 3$. Portanto, o valor médio de f em $[7,12]$ é

$$\frac{1}{12-7}\int_{7}^{12} x^2\sqrt{x-3}\,dx = \frac{1}{5}\int_{2}^{3}(v^2+3)^2 v(2v\,dv) = \frac{2}{5}\int_{2}^{3}(v^6+6v^4+9v^2)\,dv = \frac{2}{5}\left[\frac{v^7}{7} + \frac{6}{5}v^5 + 3v^3\right]_{2}^{3} = \frac{42.304}{175}$$

79. Considere o ponto de partida como o ponto a partir do qual o corpo falha. Em t s, seja x m a distância do corpo a partir do ponto de partida e v m/s sua velocidade. Tome a direção positiva para cima. Seja $\bar{v}$ m/s a velocidade final.

$g = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$, e logo, $\frac{1}{2}v^2 = gx + C$. Como $v = 0$ qdo $x = 0$, obtemos $C = 0$; logo, $v^2 = 2gx$.

Como $v > 0$, $v = \sqrt{2gx}$. Como $v = \bar{v}$ quando $x = s$, temos $\bar{v} = \sqrt{2gs}$.

Seja V.M. o valor médio de v para x em $[0, s]$. Então,

$$V.M. = \frac{1}{s-0}\int_0^s \sqrt{2gx}\,dx = \frac{1}{s}\sqrt{2g}\int_0^s x^{1/2}dx = \frac{2}{3s}\sqrt{2g}\,x^{3/2}\Big]_0^s = \frac{2}{3s}\sqrt{2g}\,s^{3/2} = \frac{2}{3}\sqrt{2gs}$$

Como $\bar{v} = \sqrt{2gs}$, vemos que V.M. $= \frac{2}{3}\bar{v}$. $= \frac{2}{3}\bar{v}$.

81. A unidades quadradas é a área da região limitada por $y = 9 - x^2$; pelo eixo x; pelo eixo y; $x = 3$. Δ é uma partição do intervalo [0,3] no eixo x. Então,

$$A = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}(9 - \xi_i^2)\Delta_i x = \int_0^3 (9 - x^2)\,dx = 9x - \frac{1}{3}x^3\Big]_0^3 = 27 - 9 = 18$$

83. A unidades quadradas é a área da região limitada por $y = 2\sqrt{x-1}$; pelo eixo x; $x = 5$; $x = 17$. Seja Δ uma partição do intervalo [5,17] sobre o eixo x. Então

$$A = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} 2\sqrt{\xi_i - 1}\,\Delta_i x = 2\int_5^{17}\sqrt{x-1}\,dx = \frac{4}{3}(x-1)^{3/2}\Big]_5^{17} = \frac{4}{3}(64 - 8) = \frac{224}{3}$$

85. $x\sqrt{x+5}$ é não-positiva em [-1,0] e não-negativa em [0,4]. Seja A_1 unidades quadradas a área da região abaixo do eixo x e acima de $y = x\sqrt{x+5}$ em [-1,0] e seja A_2 unidades quadradas a área da região abaixo de $y = x\sqrt{x+5}$ e acima do eixo x em [0,4]. Se A unidades for a área da região requerida, então

$$A = A_1 + A_2 = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} -\xi_i\sqrt{\xi_i + 5}\,\Delta_i x + \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\sqrt{\xi_i+5}\,\Delta_i x = -\int_{-1}^{0} x\sqrt{x+5}\,dx + \int_0^4 x\sqrt{x+5}\,dx$$

Para avaliar $\int x\sqrt{x+5}\,dx$, seja $v = \sqrt{x+5}$, $x = v^2 - 5$, e $dx = 2v\,dv$. Então,

$$\int x\sqrt{x+5}\,dx = \int (v^2 - 5)v(2v\,dv) = 2\int (v^4 - 5v^2)\,dv = \frac{2}{5}v^5 - \frac{10}{3}v^3 + C = \frac{2}{5}(x+5)^{5/2} - \frac{10}{3}(x+5)^{3/2} + C$$

Portanto,

$$A = \left[-\frac{2}{5}(x+5)^{5/2} + \frac{10}{3}(x+5)^{3/2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{2}{5}(x+5)^{5/2} - \frac{10}{3}(x+5)^{3/2}\right]_0^4$$

$$= \left(-10\sqrt{5} + \frac{50}{3}\sqrt{5}\right) - \left(-\frac{64}{5} + \frac{80}{3}\right) + \left(\frac{486}{5} - 90\right) - \left(10\sqrt{5} - \frac{50}{3}\sqrt{5}\right) = \frac{40}{3}\sqrt{5} + 20 - \frac{80}{3} = \frac{1}{3}(40\sqrt{5} - 20)$$

87. $(5 - x^2) - (-4) = 9 - x^2$ é não-negativa em $[-3,3]$. A unidades quadradas é a área da região abaixo de $y = 5 - x^2$ e acima de $y = -4$ em $[-3,3]$. Como a região é simétrica.

$$A = 2 \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (9 - \xi_i^2)\Delta_i x = 2\int_0^3 (9 - x^2)\,dx = 18x - \frac{2}{3}x^3\Big]_0^3 = 36 - 0 = 36$$

89. $y^2 - y^3 = y^2(1 - y) \geq 0$ em $[0,1]$. A unidades quadradas é a área da região à esquerda de $x = y^2$ e à direita de $x = y^3$. Δ é uma partição do intervalo $[0,1]$ sobre o eixo y.

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i^2 - \xi_i^3)\Delta_i y = \int_0^1 (y^2 - y^3)\,dy = \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4\Big]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

91. A unidades quadradas é a área da região abaixo de $y = \text{sen } x$ e acima de $y = \cos x$ em $[\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi]$.

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\text{sen } \xi_i - \cos \xi_i)\Delta_i x = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\text{sen } x - \cos x)\,dx = -\cos x - \text{sen } x\Big]_{\pi/4}^{5\pi/4} = \sqrt{2} - (-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

93. $\sec^2 x - 2\,\text{tg}^2 x = \sec^2 x - 2(\sec^2 x - 1) = 2 - \sec^2 x$ é não-negativa em $[0, \frac{1}{4}\pi]$. A unidades quadradas é a área da região abaixo de $y = \sec^2 x$ e acima de $y = 2\,\text{tg}^2 x$ em $[0, \frac{1}{4}\pi]$. Então,

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (2 - \sec^2 \xi_i)\Delta_i x = \int_0^{\pi/4} (2 - \sec^2 x)\,dx = 2x - \text{tg } x\Big]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\pi - 1.$$

95. Em t horas após meia-noite, a temperatura será f(t) graus, onde

$$f(t) = 60 - 15\,\text{sen}\,\frac{1}{12}\pi(8 - t), \quad 0 \leq t \leq 24$$

(b) Às 12h, $t = 0$ e $f(0) = 60 - 15(\frac{1}{2}\sqrt{3}) \approx 47,0$.

(c) Às 8h, $t = 8$ e $f(8) = 60$.

(d) Às 12h, $t = 12$ e $f(12) = 60 + 15(\frac{1}{2}\sqrt{3}) \approx 73,0$.

(e) Às 14h, $t = 14$ e $f(14) = 60 + 15(1) = 75,0$.

(f) Às 18h, $t = 18$ e $f(18) = 60 + 15(\frac{1}{2}) = 67,5$.

(g) A temperatura média entre 8 e 18h é

$$\frac{1}{18 - 8}\int_8^{18} [60 - 15\,\text{sen}\,\frac{1}{12}\pi(8 - t)\,dt = \frac{1}{10}\left[60t - \frac{180}{\pi}\cos\frac{1}{12}\pi(8 - t)\right]_8^{18}$$

$$= \frac{1}{10}\left[60(18 - 8) - \frac{180}{\pi}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1\right)\right] = 60 + \frac{9}{\pi}(\sqrt{3} + 2) \approx 70,7$$

97. $\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{2 - 0}{4} = 0,5$. Pela regra do trapézio $\int_0^2 \sqrt{1 + x^2}\,dx$

$\approx \frac{0,5}{2}[1 + 2\sqrt{1 + 0,5^2} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{1 + 1,5^2} + \sqrt{5}]$

$= \frac{1}{4}[1 + 2(1,1180) + 2(1,4142) + 2(1,8028) + 2,2361] = \frac{1}{4}[11,9062] = 2,977$ (Exato: 2,9579)

99. $\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{2 - 0}{4} = 0,5$. Pela regra de Simpson $\int_0^2 \sqrt{1 + x^2}\,dx$

$\approx \frac{0,5}{3}[1 + 4\sqrt{1 + 0,5^2} + 2\sqrt{2} + 4\sqrt{1 + 1,5^2} + \sqrt{5}]$

$= \frac{1}{6}[1 + 4(1,1180) + 2(1,4142) + 4(1,8028) + 2,2361] + [17,7477] = 2,958$ (Exato: 2,95)

101. $\Delta x = \frac{1}{n}(b - a) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\right) = 0,1$. $I = \int_{1/10}^{1/2} \frac{\cos x}{x}\,dx$. Use radianos na calculadora

(a) Pela regra do trapézio

$$I \approx \frac{0,1}{2}\left(\frac{\cos 0,1}{0,1} + 2\cdot\frac{\cos 0,2}{0,2} + 2\cdot\frac{\cos 0,3}{0,3} + 2\cdot\frac{\cos 0,4}{0,4} + \frac{\cos 0,5}{0,5}\right)$$

$$= 0,05[9,9500 + 2(4,9003) + 2(3,1844) + 2(2,3027) + 1,7551] = 0,05[32,48] = 1,624$$

(b) Pela regra de Simpson

$$I \approx \frac{0,1}{3}\left(\frac{\cos 0,1}{0,1} + 4\cdot\frac{\cos 0,2}{0,2} + 2\cdot\frac{\cos 0,3}{0,3} + 4\cdot\frac{\cos 0,4}{0,4} + \frac{\cos 0,5}{0,5}\right)$$

$$= \frac{1}{30}[9,9500 + 4(4,9003) + 2(3,1844) + 4(2,3027) + 1,7551] = \frac{1}{30}[46,8859] = 1,563$$

O valor exato é 1,550 até três casas decimais. A precisão é pequena, próximo a 0.

103. $\int_0^{\pi} |\cos x + \tfrac{1}{2}|\,dx = \int_0^{2\pi/3} |\cos x + \tfrac{1}{2}|\,dx + \int_{2\pi/3}^{\pi} |\cos x + \tfrac{1}{2}|\,dx$

$$= \int_0^{2\pi/3} (\cos x + \tfrac{1}{2})\,dx - \int_{2\pi/3}^{\pi} (\cos x + \tfrac{1}{2})\,dx = \Big[\text{sen } x + \tfrac{1}{2}x\Big]_0^{2\pi/3} + \Big[-\text{sen } x - \tfrac{1}{2}x\Big]_{2\pi/3}^{\pi}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{3}\pi + (-\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{3}\pi) = \sqrt{3} + \tfrac{1}{6}\pi.$$

105. $\int_0^3 (x^2 + 1)\,dx = \frac{1}{3}x^3 + x\Big]_0^3 = (9 + 3) - 0 = 12$

Pelo teorema do valor médio para integrais, há um número χ em $[0,3]$, tal que

$$\int_0^3 (x^2 + 1)\,dx = (\chi^2 + 1)(3 - 0);\quad 12 = 3\chi^2 + 3;\quad \chi^2 = 3;\quad x = \pm\sqrt{3}$$

Pois χ está em $[0, 3]$, $\chi = \sqrt{3}$.

107. Seja $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \;/\; \int_a^b f(t)\,dt$ (1)

Então, $F(a) = 0$ e $F(b) = 1$. Como f é contínua em $[a,b]$, segue do Teorema 5.8.1 que F é diferenciável em $[a, b]$ e então, é contínua em $[a,b]$. Portanto, pelo teorema do valor intermediário, para qualquer k em $(0,1)$, haverá um número c em (a, b), tal que $F(c) = k$. De (1) obtemos

$$k = \int_a^c f(t) \;/\; \int_a^b f(t)\,dt;\quad \int_a^c f(t)\,dt = k\int_a^b f(t)\,dt$$

109. Temos $f(x) = x + |x - 1|$ e $F(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 1 \\ x^2 - x + 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$,

Queremos mostrar que $F'(x) = f(x)$ para todo x.

$F'(x) = 1$ se $x < 1$ e $F'(x) = 2x - 1$ se $x > 1$.

$$F'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x-1}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} 1 = 1; \quad F'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x^2 - x + 1) - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} x = 1$$

Portanto, $F'(1) = 1$; logo, $F'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$.

Também, $f(x) = x + |x - 1| = \begin{cases} x + (1 - x) & \text{se } x < 1 \\ x + (x - 1) & \text{se } x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$.

Então, $F'(x) = f(x)$ para todo x.

111. (a) Seja $f(x) = x^2 + bx + c$. Se T for a aproximação trapezoidal com $n = k$, $\Delta x = 6/k$, pelo Teorema 5.10.2

$$\epsilon_T = \int_d^{d+6} f(x)\,dx - T = -\frac{1}{12}(6) f''(\theta)(\Delta x)^2 = -\frac{1}{12}(6)(2)\left(\frac{6}{k}\right)^2 = -\frac{36}{k^2}$$

(b) Exigimos $\frac{36}{k^2} < \frac{1}{2}(0,1)$; $k^2 > 720$, $k > 26,8$. O menor valor de k é 27.

CAPÍTULO 6

APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA

EXERCÍCIOS 6.1 Volumes de Sólidos por Cortes, Discos e Anéis Circulares

Nestes exercícios, V unidades cúbicas é o volume requerido e Δ é uma partição do intervalo especificado.

1. O sólido é uma esfera de raio r centrado na origem. Um elemento de volume é um disco circular, x unidades à direita do centro, $x \in [-r, r]$ de raio $\sqrt{r^2 - \xi^2}$ e área $\pi(r^2 - \xi^2)$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi(r^2 - \xi_i^{\,2})\,\Delta_i x = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = \pi\left[r^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

3. A região é limitada por $y = x^3$, pelo eixo x, x=1 e x=2. Um elemento de volume é um disco circular centrado no eixo x, $x \in [1, 2]$, de raio $\xi_i^{\,3}$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi(\xi_i^{\,3})^3\,\Delta_i x = \pi \int_1^2 x^6\,dx = \frac{1}{7}\pi x^7\Big]_1^2 = \frac{127}{7}\pi$$

5. A região é limitada por $y^2 = x^3$, pelo eixo x e x=4. Um elemento de volume é um disco circular centrado no eixo x, $x \in [0, 4]$, de raio $\xi_i^{\,3/2}$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi(\xi_i^{\,3/2})^2\,\Delta_i x = \pi \int_0^4 x^3\,dx = \frac{1}{4}\pi x^4\Big]_0^4 = 64\pi$$

7. A região é limitada por $y^2 = x^3$, pelo eixo x e x=4. Um elemento de volume é um anel circular centrado na reta y = 8, $x \in [0, 4]$, de raios 8 e $8 - \xi_i^{\,3/2}$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [\pi(8)^2 - \pi(8 - \xi_i^{\,3/2})^2]\,\Delta_i x = \pi \int_0^4 [64 - (8 - x^{3/2})^2]\,dx = \pi \int_0^4 (16x^{3/2} - x^3)\,dx$$

$$= \pi\left[16 \cdot \frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{1}{4}x^4\right]_0^4 = \pi\left[\frac{32}{5}(32) - 64\right] = \frac{704}{5}\pi$$

9. A região é limitada por $y^2 = x^3$, pelo eixo y e y=8. Um elemento de volume é um disco circular centrado no eixo y, $y \in [0, 8]$, de raio $\xi_i^{\,2/3}$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi(\xi_i^{\,3/2})^2\,\Delta_i y = \pi \int_0^8 y^{4/3}\,dy = \frac{3}{7}\pi y^{7/3}\Big]_0^8 = \pi\left(\frac{3}{7} \cdot 128\right) = \frac{384}{7}\pi$$

11. A região é limitada por $y^2 = x^3$, pelo eixo y e y=8. Um elemento de volume é um anel circular centrado na reta x = 4, $y \in [0, 8]$, de raios 4 e $4 - \xi_i^{\,2/3}$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [\pi(4)^2 - \pi(4 - \xi_i^{\,2/3})^2]\,\Delta_i y = \pi \int_0^8 [16 - (4 - y^{2/3})^2]\,dy = \pi \int_0^8 (8y^{2/3} - y^{4/3})\,dy$$

$$= \pi\left[8 \cdot \frac{3}{5}y^{5/3} - \frac{3}{7}y^{7/3}\right]_0^8 = \pi\left(\frac{24}{5} \cdot 32 - \frac{3}{7} \cdot 128\right) = \frac{3456}{35}\pi$$

Nota: Use uma calculadora: $(24 \div 5 \cdot 32 - 3 \div 7 \cdot 128) \cdot 35$ (o denominador comum) =3.456.

13. A região é limitada por $x = y^2$, pelo eixo x e x=4. Seja $y^2 = 4$: $y = \pm 2$. Um elemento de volume é um disco circular centrado na reta $x = 4$, $y \in [0,2]$, de raio $4 - \xi_i^2$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi(4 - \xi_i^2)^2 \Delta_i y = \pi \int_0^2 (4 - y^2)^2 dy = \pi \int_0^2 (16 - 8y^2 + y^4) dy = \pi \left[16y - \frac{8}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5\right]_0^2$$

$$= \pi\left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}\right) = \frac{256}{15}\pi$$

15. A região é limitada por $x=y^2$, pelo eixo x e x=4. Seja $y^2 = 4$: $y = \pm 2$. Um elemento de volume é um anel circular centrado no eixo y, $y \in [0,2]$, de raios 4 e ξ_i^2.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [\pi(4)^2 - \pi(\xi_i^2)^2] \Delta_i y = \pi \int_0^2 (16 - y^4) dy = \pi\left[16y - \frac{1}{5}y^5\right]_0^2 = \pi\left(32 - \frac{32}{5}\right) = \frac{128}{5}\pi$$

17. Faça uma rotação em torno do eixo x, da região do primeiro quadrante, limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = r^2$ e pelos eixos coordenados. O volume da esfera será o dobro do volume gerado. Um elemento do volume é um disco circular centrado no eixo x, $x \in [0,r]$, de raio $\sqrt{r^2 - \xi_i^2}$.

$$V = 2 \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi\left(\sqrt{r^2 - \xi_i^2}\right)^2 \Delta_i x = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi\left[r^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^r = 2\pi\left(r^3 - \frac{1}{3}r^2\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

19. A região é limitada por $y = b - \frac{b-a}{h}x$, pelo eixo x e r=h. Um elemento do volume é um disco circular centrado no eixo x, $x \in [0,h]$ de raio $b - \frac{b-a}{h}\xi_i$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi\left(b - \frac{b-a}{h}\xi_i\right)^2 \Delta_i x = \pi \int_0^h \left(b - \frac{b-a}{h}x\right)^2 dx = -\frac{\pi}{3}\frac{h}{b-a}\left[\left(b - \frac{b-a}{h}x\right)^3\right]_0^h = -\frac{\pi}{3}\frac{h}{b-a}(a^3 - b^3)$$

$$= \frac{1}{3}\pi h(a^2 + ab + b^2)$$

21. A região é limitada por $y = \sec x$, pelos eixos x e y e $x = \frac{1}{4}\pi$. Um elemento do volume é um disco circular centrado no eixo x, $x \in [0, \frac{1}{4}\pi]$, de raio $\sec \xi_i$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi(\sec^2 \xi_i) \Delta_i x = \pi \int_0^{\pi/4} \sec^2 x \, dx = \pi\left[\operatorname{tg} x\right]_0^{\pi/4} = \pi$$

23. A região é limitada por y=sen x e pelo eixo x, $x \in [0,\pi]$. Um elemento do volume é um disco circular centrado no eixo x, de raio sen ξ_i.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi(\operatorname{sen} \xi_i)^2 \Delta_i x = \pi \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x \, dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi dx - \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \cos 2x \, dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}[(\pi - 0) - (0 - 0)] = \frac{1}{2}\pi^2$$

25. A região é limitada por y=sen x e pelo eixo x, $x\in[0,\pi]$. Um elemento do volume é um disco circular, centrado na reta y=1, de raio 1-sen ξ_i.

$$V = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\pi(1-\text{sen}\,\xi_i)^2\Delta_i x = \pi\int_0^{\pi}(1-2\,\text{sen}\,x+\text{sen}^2 x)\,dx = \pi\int_0^{\pi}\left[1-2\,\text{sen}\,x+\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right]dx$$

$$= \pi\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}-2\,\text{sen}\,x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx = \pi\left[\frac{3}{2}x+2\cos x-\frac{1}{4}\text{sen}\,2x\right]_0^{\pi} = \pi\left[\left(\frac{3}{2}\pi-2\right)-2\right] = \frac{3}{2}\pi^2-4\pi$$

Se você escolher o arco de $[\pi,2\pi]$, você obterá $V = 4p-\frac{1}{2}\pi^2$

27. A região é limitada por y=cotg x, $x=\frac{1}{6}\pi$ e pelo eixo x. Um elemento do volume é um disco circular centrado no eixo x, $x\in[\frac{1}{6}\pi,\frac{1}{2}\pi]$ de raio cotg ξ_i.

$$V = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\pi(\text{cotg}\,\xi_i)^2\Delta_i x = \pi\int_{\pi/6}^{\pi/2}\text{cotg}^2 x\,dx = \pi\int_{\pi/6}^{\pi/2}(\text{cosec}^2 x-1)\,dx = \pi\left[-\text{cotg}x-x\right]_{\pi/6}^{\pi/2}$$

$$= \pi\left(-\tfrac{1}{2}\pi+\sqrt{3}+\tfrac{1}{6}\pi\right) = \sqrt{3}\pi-\tfrac{1}{3}\pi^2$$

29. A região é limitada por $x=4+6y-2y^2$ e $x=-4$. $(4+6y-2y^2)-(-4) = -2(y^2-3y-4) = -2(y+1)(y-4)$ é não-negativa em $[-1,4]$. Um elemento do volume é um disco circular, centrado na reta $x=-4$, $y\in[-1,4]$, de raio $(4+6\xi_i-2\xi_i^2)+4$.

$$V = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\pi(8+6\xi_i-2\xi_i^2)^2\Delta_i y = \pi\int_{-1}^{4}(8+6y-2y^2)^2\,dy$$

$$= \pi\int_{-1}^{4}(64+96y+4y^2-24y^3+4y^4)\,dy = \pi\left[64y+48y^2+\frac{4}{3}y^3-6y^4+\frac{4}{5}y^5\right]_{-1}^{4}$$

$$= \pi\left[\left(64\cdot4+48\cdot16+\frac{4}{3}\cdot64-6\cdot256+\frac{4}{5}\cdot1024\right)-\left(-64+48-\frac{4}{3}-6-\frac{4}{5}\right)\right] = \frac{1250}{3}\pi$$

31. A região é limitada por $y^2=4x$ e $y=x$. $y-\frac{1}{4}y^2=\frac{1}{4}y(4-y)$ é não-negativa em $[0,4]$. Um elemento do volume é um anel circular, centrado em x=4, de raios $4-\frac{1}{4}\xi_i^2$ e $4-\xi_i$.

$$V = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\pi\left[\left(4-\frac{\xi_i^2}{4}\right)^2-(4-\xi_i)^2\right]\Delta_i y = \pi\int_0^4\left[\left(4-\frac{y^2}{4}\right)^2-(4-y)^2\right]dy$$

$$= \pi\int_0^4\left(16-2y^2+\frac{y^4}{16}-16+8y-y^2\right)dy = \pi\int_0^4\left(8y-3y^2+\frac{y^4}{16}\right)dy = \pi\left[4y^2-y^3+\frac{y^5}{80}\right]_0^4$$

$$= \pi\left(4\cdot16-64+\frac{64}{5}\right) = \frac{64}{5}\pi$$

33. A região é limitada por $y=x^2$ e $y=1+x-x^2$. $(1+x-x^2)-x^2 = -(2x^2-x-1) = -(2x+1)(x-1)$ é não-negativa em $[-\frac{1}{2},1]$. Um elemento do volume é um anel circular centrado na reta y=-3, de raios $(1+\xi_i-\xi_i^2)+3$ e ξ_i^2+3.

$$V = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\pi[(4+\xi_i-\xi_i^2)^2-(\xi_i^2+3)^2]\Delta_i x = \pi\int_{-1/2}^{1}[(4+x-x^2)^2-(x^2+3)^2]\,dx$$

$$= \pi\int_{-1/2}^{1}[(x^4-2x^3-7x^2+8x+16)-(x^4+6x^2+9)]\,dx = \pi\int_{-1/2}^{1}(-2x^3-13x^2+8x+7)\,dx$$

$$= \pi\left[-\frac{1}{2}x^4-\frac{13}{3}x^3+4x^2+7x\right]_{-1/2}^{1} = \pi\left[\left(-\frac{1}{2}-\frac{13}{3}+4+7\right)-\left(-\frac{1}{32}+\frac{13}{24}+1-\frac{7}{2}\right)\right] = \frac{261}{32}\pi$$

35. $y^2 = \dfrac{(x^2-9)(1-x^2)}{x^2}$ é positiva em $[-3,-1]$ e $[1,3]$. Logo, a curva consiste em dois laços fechados, cada um dividido pelo eixo x; escolha o arco no primeiro quadrante.
Um elemento do volume é um disco circular centrado no eixo x, $x \in [1,3]$ de raio $\left[\dfrac{(\xi_i^2-9)(1-\xi_i^2)}{\xi_i^2}\right]^{1/2}$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi \frac{(\xi_i^2-9)(1-\xi_i^2)}{\xi_i^2} \Delta_i x = \pi \int_1^3 \frac{(x^2-9)(1-x^2)}{x^2} dx = \pi \int_1^3 (-x^2+10-9x^{-2}) dx$$

$$= \pi\left[-\frac{1}{3}x^3 + 10x + 9x^{-1}\right]_1^3 = \pi\left[(-9+30+3) - \left(-\frac{1}{3}+10+9\right)\right] = \frac{16}{3}\pi$$

37. O pto. $(10,6)$ está sobre a parábola $y^2 = 4px$. Assim, $36 = 40p$; $4p = \frac{18}{5}$. Uma equação da parábola é $y^2 = \frac{18}{5}x$. Um elemento do volume é um disco circular centrado no eixo x, de raio $\left(\frac{18}{5}\xi_i\right)^{1/2}$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi\left(\frac{18}{5}\xi_i\right)\Delta_i x = \frac{18}{5}\pi\int_0^{10} x\,dx = \frac{9}{5}\pi x^2\Big]_0^{10} = \frac{9}{5}\pi(100) = 180\pi$$

39. A região é limitada por $y = \operatorname{cosec} x$, $y = 2$, $x = \frac{1}{6}\pi$, e $x = \frac{5}{6}\pi$. Um elemento do volume é um anel circular centrado no eixo x, $x \in [\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi]$, de raio 2 e $\operatorname{cosec} \xi_i$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi(4 - \operatorname{cosec}^2 \xi_i)\Delta_i x = \pi\int_{\pi/6}^{5\pi/6} (4 - \operatorname{cosec}^2 x)\,dx = \pi\left[4x + \operatorname{cotg} x\right]_{\pi/6}^{5\pi/6} = \pi\left(\frac{10}{3}\pi - \sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}\right)$$

$$= \frac{8}{3}\pi^2 - 2\sqrt{3}\,\pi$$

41. A região é limitada por $y = \sqrt{2x+4}$, pelo eixo x, pelo eixo y e $x=c$. Um elemento do volume é um disco circular centrado no eixo x, $x \in [0,c]$ de raio $\sqrt{2\xi_i + 4}$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi(2\xi_i + 4)\Delta_i x = \pi\int_0^c (2x+4)\,dx = \pi\left[x^2 + 4x\right]_0^c = \pi(c^2 + 4c)$$

Portanto, $\pi(c^2+4c) = 12\pi$; $c^2 + 4c - 12 = 0$; $(c+6)(c-2) = 0$. Como $c > 0$, $c = 2$.

43. Tome o plano xy na base do sólido e a origem no centro da base circular.
Portanto, a base é a região encerrada pela circunferência $x^2 + y^2 = 49$.
Seja $f(x) = y = \sqrt{49 - x^2}$, $x \in [-7, 7]$. Obtemos a metade do sólido se x estiver em $[0,7]$.
Um elemento do volume é um cilindro reto com $\Delta_i x$ cm de altura e cuja base é um triângulo eqüilátero com $2f(\xi_i)$ cm de lado. Como um triângulo eqüilátero com s unidades de lado tem $\frac{1}{4}\sqrt{3}\,s^2$ unidades quadradas de área, então, o elemento do volume tem a base com $\frac{1}{4}\sqrt{3}\,[2f(\xi_i)]^2 \text{cm}^2$ de área.

$$V = 2\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4}\sqrt{3}[2f(\xi_i)]^2\Delta_i x = 2\sqrt{3}\int_0^7 (49 - x^2)\,dx = 2\sqrt{3}\left[49x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^7 = 2\sqrt{3}\left(343 - \frac{343}{3}\right) = \frac{1372}{3}\sqrt{3}$$

45. Refira-se à resolução do Exercício 43. Um elemento do volume é um cilindro reto, com $\Delta_i x$ de altura, cuja base é um triângulo isósceles com $2f(\xi_i)$cm de base e ξ_i cm de altura, e portanto, sua área é $\frac{1}{2}[2f(\xi_i)]\xi_i$ cm².

$$V = 2\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\xi_i f(\xi_i)\Delta_i x = 2\int_0^7 x\sqrt{49-x^2}\,dx = -\int_0^7 (49-x^2)^{1/2}(-2x\,dx) = -\frac{2}{3}(49-x^2)^{3/2}\Big]_0^7$$

$$= -\frac{2}{3}(0) + \frac{2}{3}(343) = \frac{686}{3}$$

47. Tome o plano xy na base do sólido e a origem no centro da base circular. Portanto, a base é a região encerrada pela circunferência $x^2 + y^2 = r^2$. Seja $f(x) = y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [-r, r]$. Obtemos a metade do sólido se x estiver em $[0, r]$. Um elemento do volume é um cilindro reto com $\Delta_i x$ unidades de altura e cuja base é um triângulo retângulo isósceles tendo um dos catetos com $2f(\xi_i)$ unidades de comprimento no plano xy. Como um triângulo retângulo isósceles de lado s tem $\frac{1}{2}s^2$ unidades quadradas de área, então a base do elemento de volume tem $\frac{1}{2}[2f(\xi_i)]^2$ unidades quadradas de área.

$$V = 2\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} 2[f(\xi_i)]^2\Delta_i x = 4\int_0^r (r^2 - x^2)\,dx = 4\left[r^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^r = 4\left(r^3 - \frac{1}{3}r^3\right) = \frac{8}{3}r^3$$

49. Tome o plano xy na base do cilindro e a origem no centro da base circular. Tome o plano, que forma a cunha, através do diâmetro ao longo do eixo x. A base da cunha é a região encerrada pela parte de cima da circunferência $x^2 + y^2 = r^2$ e o eixo x para x em $[-r, r]$. Seja $f(x) = y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Obtemos a metade da cunha se x estiver em $[0, r]$. Um elemento do volume é um cilindro reto com $\Delta_i x$ cm de altura, cuja base é um triângulo retângulo isósceles com $f(\xi_i)$cm de comprimento, e portanto, com uma área de $\frac{1}{2}[f(\xi_i)]^2$ cm².

$$V = 2\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}[f(\xi_i)]^2\Delta_i x = \int_0^r (r^2 - x^2)\,dx = r^2x - \frac{1}{3}x^3\Big]_0^r = r^3 - \frac{1}{3}r^3 = \frac{2}{3}r^3$$

EXERCÍCIOS 6.2 Volumes de Sólidos por Invólucros Cilíndricos

Nestes exercícios, V unidades cúbicas é o volume requerido e Δ é uma partição do intervalo especificado.

1. A região é limitada por $x = y^{2/3}$, pelo eixo x e x=4. Os elementos retangulares são horizontais, $y \in [0, 8]$. Um elemento do volume é um invólucro cilíndrico centrado no eixo x, de raio médio m_i e altura $4m_i^{2/3}$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i (4 - m_i^{2/3}) \Delta_i y = 2\pi \int_0^8 y(4 - y^{2/3})\, dy = 2\pi \int_0^8 (4y - y^{5/3})\, dy = 2\pi \left[2y^2 - \frac{3}{8} y^{8/3}\right]_0^8$$

$$= 2\pi(128 - 96) = 64\pi$$

3. A região é limitada por $x = y^{2/3}$, pelo eixo x e x=4. Os elementos retangulares são horizontais, $y \in [0, 8]$. Um elemento do volume é um invólucro cilíndrico na reta y=8, de raio médio $8 - m_i$ e altura $4 - m_i^{2/3}$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi(8 - m_i)(4 - m_i^{2/3}) \Delta_i y = 2\pi \int_0^8 (8 - y)(4 - y^{2/3})\, dy = 2\pi \int_0^8 (32 - 4y - 8y^{2/3} + y^{5/3})\, dy$$

$$= 2\pi\left[32y - 2y^2 - 8 \cdot \frac{3}{5} y^{5/3} + \frac{3}{8} y^{8/3}\right]_0^8 = 2\pi\left(32 \cdot 8 - 2 \cdot 64 - \frac{24}{5} \cdot 32 + 3 \cdot 32\right) = \frac{704}{5}\pi$$

5. A região é limitada por $y = x^{3/2}$, pelo eixo y e y=8. Os elementos retangulares são verticais, $x = [0, 4]$. Um elemento do volume é um invólucro cilíndrico centrado no eixo y, de raio médio m_i e altura $8 - m_i$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i (8 - m_i^{3/2}) \Delta_i x = 2\pi \int_0^4 x(8 - x^{3/2})\, dx = 2\pi \int_0^4 (8x - x^{5/2})\, dx = 2\pi\left[4x^2 - \frac{2}{7} x^{7/2}\right]_0^4$$

$$= 2\pi\left(4 \cdot 16 - \frac{2}{7} \cdot 128\right) = \frac{384}{7}\pi$$

7. A região é limitada por $y = x^{3/2}$, pelo eixo y e y=8. Os elementos retangulares são verticais, $x \in [0, 4]$. Um elemento de volume é um invólucro cilíndrico centrado na reta x=4, de raio médio $4 - m_i$ e altura $8 - m_i^{3/2}$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi(4 - m_i)(8 - m_i^{3/2}) \Delta_i x = 2\pi \int_0^4 (4 - x)(8 - x^{3/2})\, dx = 2\pi \int_0^4 (32 - 8x - 4x^{3/2} + x^{5/2})\, dx$$

$$= 2\pi\left[32x - 4x^2 - \frac{8}{5} x^{5/2} + \frac{2}{7} x^{7/2}\right]_0^4 = 2\pi\left(32 \cdot 4 - 4 \cdot 16 - \frac{8}{5} \cdot 32 + \frac{2}{7} \cdot 128\right) = \frac{3.456}{35}\pi$$

9. A região é limitada por $y = x^{1/2}$, pelo eixo x e x=4. Os elementos retangulares são verticais, $x \in [0, 4]$. Um elemento do volume é um invólucro cilíndrico centrado na reta x=4, de raio médio $4 - m_i$ e altura $m_i^{1/2}$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi(4 - m_i)\, m_i^{1/2} \Delta_i x = 2\pi \int_0^4 (4 - x)\, x^{1/2} dx = 2\pi \int_0^4 (4x^{1/2} - x^{3/2})\, dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{8}{3} x^{3/2} - \frac{2}{5} x^{5/2} \right]_0^4 = 2\pi \left(\frac{8}{3} \cdot 8 - \frac{2}{5} \cdot 32 \right) = \frac{256}{15} \pi$$

11. A região limitada por $y = x^{1/2}$, pelo eixo x e x=4. Os elementos retangulares são verticais, $x \in [0, 1]$. Um elemento do volume é um invólucro cilíndrico centrado no eixo y, de raio médio m_i e altura $m_i^{1/2}$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi(m_i)\, m_i^{1/2} \Delta_i x = 2\pi \int_0^4 x \cdot x^{1/2} dx = 2\pi \int_0^4 x^{3/2} dx = 2\pi \left[\frac{2}{5} x^{5/2} \right]_0^4 = 2\pi \left(\frac{2}{5} \cdot 32 \right) = \frac{128}{5} \pi$$

13. A região é limitada por $y = x^2$, pelo eixo x e x=1. Os elementos retangulares são verticais, $x \in [0, 1]$. Um elemento do volume é um invólucro cilíndrico centrado no eixo y, de raio médio m_i e altura m_i^2.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi(m_i)\, m_i^2 \Delta_i x = 2\pi \int_0^1 x \cdot x^2 dx = 2\pi \int_0^1 x^3 dx = 2\pi \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} \pi$$

15. A região é limitada por $x = \sqrt{y}$ e $x = y^2$. Os elementos retangulares são $y \in [0, 1]$. Um elemento dó volume é um invólucro cilíndrico centrado no eixo x, de raio médio m_i e altura $\sqrt{m_i} - m_i^2$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi(\sqrt{m_i - m_i^2})\, \Delta_i y = 2\pi \int_0^1 y(y^{1/2} - y^2)\, dy = 2\pi \int_0^1 (y^{3/2} - y^3)\, dy = 2\pi \left[\frac{2}{5} y^{5/2} - \frac{1}{4} \right]_0^1$$

$$= 2\pi \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{10} \pi$$

17. A região é limitada por $x = y^2$, pelo eixo y e y=1. Os elementos retangulares são horizontais, $y \in [0, 1]$. Um elemento do volume é um invólucro cilíndrico centrado na reta y=2, de raio médio $2 - m_i$ e altura m_i^2.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi(2 - m_i)\, m_i^2 \Delta_i y = 2\pi \int_0^1 (2 - y)\, y^2 dy = 2\pi \int_0^1 (2y^2 - y^3)\, dy = 2\pi \left[\frac{2}{3} y^3 - \frac{1}{4} y^4 \right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{5}{6} \pi$$

19. A região é limitada por $x = \sqrt{y}$ e $x = y^2$. Os elementos retangulares são verticais, $x \in [0, 1]$. Um elemento do volume é um invólucro cilíndrico centrado na reta x=-2, de raio médio $m_i + 2$ e altura $m_i^{1/2} - m_i^2$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi(m_i + 2)(m_i^{1/2} - m_i^2)\, \Delta_i x = 2\pi \int_0^1 (x + 2)(x^{1/2} - x^2)\, dx = 2\pi \int_0^1 (2x^{1/2} + x^{3/2} - 2x^2 - x^3)\, dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{4}{3} x^{3/2} + \frac{2}{5} x^{5/2} - \frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{49}{30} \pi$$

21. A região limitada por $x = y^2 - 2$ e $x = 6 - y^2$ é simétrica em relação ao eixo x; use a parte superior, $(6 - y^2) - (y^2 - 2) = 8 - 2y^2$ é não-negativa em $[-2,2]$. Os elementos retangulares são horizontais. Um elemento de volume é um invólucro cilíndrico centrado no eixo x, de raio médio m_i e altura $8 - 2m_i^2$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i (8 - 2m_i^2)\Delta_i y = 2\pi\int_0^2 y(8 - 2y^2)\,dy = 2\pi\int_0^2 (8y - 2y^3)\,dy = 2\pi\left[4y^2 - \frac{1}{2}y^4\right]_0^2$$

$$= 2\pi(16 - 8) = 16\pi$$

23. A região limitada por $x = y^2 - 2$ e $x = 6 - y^2$ é simétrica em relação à reta $x=2$; use a parte direita. $(6 - y^2) - (y^2 - 2) = 8 - 2y^2$ é não-negativa em $[-2,2]$.

Método 1. Os elementos retangulares são verticais, $x \in [2, 6]$. Um elemento do volume é um invólucro cilíndrico de raio médio $m_i - 2$ e altura $2\sqrt{6 - m_i}$. Seja $\sqrt{6 - x} = v$, $x = 6 - v^2$, $dx = -2v\,dv$. Qdo $x=2$, $v=2$; qdo $x=6$, $v=0$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi(m_i - 2)\,2\sqrt{6 - m_i}\,\Delta_i x = 4\pi\int_2^6 (x - 2)\sqrt{6 - x}\,dx = 4\pi\int_2^0 (4 - v^2)\,v(-2v\,dv) = 8\pi\int_0^2 (4v^2 - v^4)\,dv$$

$$= 8\pi\left[\frac{4}{3}v^3 - \frac{1}{5}v^5\right]_0^2 = 8\left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right) = \frac{512}{15}\pi$$

Método 2. Os elementos retangulares são horizontais, $y \in [-2, 2]$. Um elemento do volume é um disco circular centrado na reta $x=2$ de raio $(6 - \xi_i^2) - 2$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi(4 - \xi_i^2)^2\Delta_i y = \pi\int_{-2}^2 (4 - y^2)^2\,dy = \pi\int_{-2}^2 (16 - 8y^2 + y^4)\,dy = \pi\left[16y - \frac{8}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5\right]_{-2}^2$$

$$= \pi\left[\left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}\right) - \left(-32 + \frac{64}{3} - \frac{32}{5}\right)\right] = \frac{512}{15}\pi$$

25. A região é limitada por $y^2 = 4px$ e $x = p$. Os elementos retangulares são verticais, $x \in [0, p]$. Um elemento do volume é um invólucro cilíndrico centrado na reta $x=p$, de raio médio $p - m_i$ e altura $2\sqrt{4pm_i} = 4p^{1/2}m_i^{1/2}$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi(p - m_i)(4p^{1/2}m_i^{1/2})\Delta_i x = 2\pi\int_0^p (p - x)(4p^{1/2}x^{1/2})\,dx = 8\pi p^{1/2}\int_0^p (px^{1/2} - x^{3/2})\,dx$$

$$= 8\pi p^{1/2}\left[\frac{2}{3}px^{3/2} - \frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^p = 8\pi p^{1/2}\left(\frac{2}{3}p^{5/2} - \frac{2}{5}p^{5/2}\right) = 16\pi p^3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{32}{15}\pi p^3$$

27. A região é limitada por $y = 3x - x^3$, pelo eixo y e $x=1$. Os elementos retangulares são verticais, $x \in [0, 1]$. Um elemento do volume é um invólucro cilíndrico centrado no eixo y, de raio médio m_i e altura $3m_i - m_i^3$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i(3m_i - m_i^3)\Delta_i x = 2\pi\int_0^1 x(3x - x^3)\,dx = 2\pi\int_0^1 (3x^2 - x^4)\,dx = 2\pi\left[x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = 2\pi\cdot\frac{4}{5} = \frac{8}{5}\pi$$

29. A região é limitada por $y = 3x - x^3$, pelo eixo y e y=2. Os elementos retangulares são verticais, $x \in [0, 1]$. Um elemento do volume é um invólucro cilíndrico centrado na reta x=1, de raio médio $1 - m_i$ e altura $2 - (3m_i - m_i^3)$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi(1 - m_i)(2 - 3m_i + m_i^3)\Delta_i x = 2\pi\int_0^1 (1 - x)(2 - 3x + x^3)\,dx$$

$$= 2\pi\int_0^1 (-x^4 + x^3 + 3x^2 - 5x + 2)\,dx = 2\pi\left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x\right]_0^1 = 2\pi \cdot \frac{11}{20} = \frac{11}{10}\pi$$

31. A região é limitada por $y = 4x - \frac{1}{8}x^4$, pelo eixo x e x=2. Os elementos retangulares são verticais, $x \in [0, 2]$. Um elemento do volume é um invólucro cilíndrico sobre a reta x=2, de raio médio $2 - m_i$ e altura $4m_i - \frac{1}{8}m_i^4$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi(2 - m_i)\left(4m_i - \frac{1}{8}m_i^4\right)\Delta_i x = 2\pi\int_0^2 (2 - x)\left(4x - \frac{1}{8}x^4\right)dx$$

$$= 2\pi\int_0^2 \left(\frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - 4x^2 + 8x\right)dx = 2\pi\left[\frac{1}{48}x^6 - \frac{1}{20}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 4x^2\right]_0^2 = 2\pi \cdot \frac{76}{15} = \frac{38}{15}\pi$$

33. A região é limitada por $y = 4x - \frac{1}{8}x^4$, pelo eixo y e y=6. Os elementos retangulares são verticais, $x \in [0, 2]$. Um elemento do volume é um invólucro cilíndrico centrado no eixo y, de raio médio m_i e altura $6 - (4m_i - \frac{1}{8}m_i^4) = \frac{1}{8}m_i^4 - 4m_i + 6$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i\left(\frac{1}{8}m_i^4 - 4m_i + 6\right)\Delta_i x = 2\pi\int_0^2 \left(\frac{1}{8}x^5 - 4x^2 + 6x\right)dx = 2\pi\left[\frac{1}{48}x^6 - \frac{4}{3}x^3 + 3x^2\right]_0^2 = 2\pi \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{3}\pi$$

35. A região é limitada por $x^2 = 4y$ e $y = 1$. Os elementos retangulares são horizontais, $y \in [0, 1]$. Um elemento do volume é um invólucro cilíndrico centrado na reta y=1, de raio médio $1 - m_i$ e altura $2\sqrt{4m_i} = 4m_i^{1/2}$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi(1 - m_i)(4m_i^{1/2})\Delta_i y = 8\pi\int_0^1 (1 - y)y^{1/2}\,dy = 8\pi\int_0^1 (y^{1/2} - y^{3/2})\,dy$$

$$= 8\pi\left[\frac{2}{3}y^{3/2} - \frac{2}{5}y^{5/2}\right]_0^1 = 8\pi\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right) = \frac{32}{15}\pi$$

37. A região é limitada por $y = \operatorname{sen} x^2$, pelo eixo x, $x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ e $x = \sqrt{\pi}$. Os elementos retangulares são verticais, $x \in [\frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}]$. Um elemento do volume é um invólucro cilíndrico centrado no eixo y, de raio médio m_i e altura $\operatorname{sen} m_i^2$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i(\operatorname{sen} m_i^2)\Delta_i x = \pi\int_{\sqrt{\pi}/2}^{\sqrt{\pi}} (\operatorname{sen} x^2)(2x\,dx) = -\pi\cos x^2\Big]_{\sqrt{\pi}/2}^{\sqrt{\pi}} = -\pi\left(\cos\pi - \cos\frac{1}{4}\pi\right)$$

$$= -\pi\left(-1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{2})\pi$$

39. A região está no primeiro quadrante, limitada por $x=\cos y^2$, pelo eixo y e o eixo x. Os elementos retangulares são horizontais, $y \in [0, \sqrt{\frac{1}{2}\pi}]$. Um elemento do volume é um invólucro cilíndrico centrado no eixo x, de raio médio m_i e altura $\cos m_i^2$.

$$V = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i(\cos m_i^2)\Delta_i y = \pi\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \cos y^2(2y\,dy) = \pi\left[\operatorname{sen} y^2\right]_0^{\sqrt{\pi/2}} = \pi(\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{sen} 0) = \pi$$

41. O buraco pode ser obtido pela rotação, em torno do eixo y, da região limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 16$, pelo eixo y e $x=2\sqrt{3}$. Os elementos retangulares são verticais, $x\in[0,2\sqrt{3}\,]$. Um elemento do volume é um invólucro cilíndrico no eixo y, de raio médio m_i e altura $2\sqrt{16 - m_i^2}$.

$$V = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i(2\sqrt{16 - m_i^2})\Delta_i x = -2\pi\int_0^{2\sqrt{3}} (16 - x^2)^{1/2}(-2x\,dx) = -2\pi\cdot\frac{2}{3}(16 - x^2)^{3/2}\Big]_0^{2\sqrt{3}}$$

$$= -\frac{4}{3}\pi(8 - 64) = \frac{224}{3}\pi$$

43. A região é limitada por $y = \sqrt[3]{x}$, pelo eixo x e $x=c$. Os elementos retangulares são verticais, $x \in [0, c]$. Um elemento do volume é um invólucro cilíndrico centrado no eixo y, de raio médio m_i e altura $m_i^{1/3}$.

$$V = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i(m_i^{1/3})\Delta_i x = 2\pi\int_0^{c} x^{4/3}dx = 2\pi\cdot\frac{3}{7}x^{7/3}\Big]_0^{c} = \frac{6}{7}c^{7/3}\pi$$

Portanto, $12\pi = \frac{6}{7}c^{7/3}\pi$; $c^{7/3} = 14$; $c = \sqrt[7]{14^3} = \sqrt[7]{2744}$.

45. Os elementos retangulares são verticais, $x \in [0, 6]$. Um elemento do volume é um invólucro cilíndrico centrado no eixo y, de raio médio m_i e altura $f(m_i)$ onde f é dada no Exercício 5.10.39., $\Delta x = 1$. Pela regra de Simpson,

$$V = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i f(m_i)\Delta_i x = 2\pi\int_0^{6} x f(x)\,dx$$

$$\approx 2\pi(\tfrac{1}{3})\cdot 1[0 + 4(1)4{,}5 + 2(2)5{,}4 + 4(3)4{,}4 + 2(4)2{,}7 + 4(5)4{,}9 + (6)5{,}3] = 510{,}61 \approx 510$$

EXERCÍCIOS 6.3 Comprimento de Arco do Gráfico de uma Função

Nestes exercícios, L é o comprimento do arco especificado.

1. $y=3x$ de $(1,3)$ a $(2,6)$

(a) Pela fórmula da distância, $L = \sqrt{(1-2)^2+(3-6)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

(b) $f(x) = 3x$; $f'(x) = 3$; $a = 1$, $b = 2$. $L = \int_1^2 \sqrt{1+9}\,dx = \sqrt{10}\int_1^2 dx = \sqrt{10}(2-1) = \sqrt{10}$

(c) $F(y) = \frac{1}{3}y$; $F'(y) = \frac{1}{3}$; $c = 3$, $d = 6$. $L = \int_3^6 \sqrt{1+(\frac{1}{3})^2}\,dy = \frac{1}{3}\sqrt{10}\int_3^6 dy = \frac{1}{3}\sqrt{10}(6-3) = \sqrt{10}$

3. $4x+9y=36$ entre $(9,0)$ e $(0,4)$

(a) Pelo teorema de Pitágoras, $L = \sqrt{9^2+4^2} = \sqrt{81+16} = \sqrt{97}$.

(b) $f(x) = 4 - \frac{4}{9}x$; $f'(x) = -\frac{4}{9}$; $a = 0$, $b = 9$. $L = \int_0^9 \sqrt{1+\frac{16}{81}}\,dx = \frac{1}{9}\sqrt{97}\int_0^9 dx = \frac{1}{9}\sqrt{97}(9-0) = \sqrt{97}$.

(c) $F(y) = 9 - \frac{9}{4}y$; $F'(y) = -\frac{9}{4}$; $c = 0$, $d = 4$. $L = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{81}{16}}\,dy = \frac{1}{4}\sqrt{97}\int_0^4 dy = \frac{1}{4}\sqrt{97}(4-0) = \sqrt{97}$.

5. Uma equação do arco é $y = f(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}$; $f'(x) = x^{1/2}$. Do Teorema 6.3.3

$$L = \int_0^3 \sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\Big]_0^3 = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}$$

7. Uma equação do arco é $y = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^{-2}$. Então, $D_x y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^{-3}$. Do Teorema 6.3.3

$$L = \int_1^2 \sqrt{1+(\tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{2}x^{-3})^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{1+\tfrac{1}{4}x^6 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}x^{-6}}\,dx = \int_1^2 \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}x^{-6}}\,dx = \int_1^2 \sqrt{(\tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{2}x^{-3})^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 (x^3 + x^{-3})\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^{-2}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left[\left(4-\frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{33}{16}$$

9. Uma equação do arco é $x = F(y) = \frac{1}{4}\sqrt{2}y^{3/2}$; $F'(y) = \frac{3}{8}\sqrt{2}y^{1/2}$. Do Teorema 6.3.4

$$L = \int_2^{18} \sqrt{1+\frac{9}{32}y}\,dy = \frac{32}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{32}y\right)^{3/2}\Bigg]_2^{18} = \frac{64}{27}\left[\left(1+\frac{81}{16}\right)^{3/2} - \left(1+\frac{9}{16}\right)^{3/2}\right]$$

$$= \frac{64}{27}\left[\frac{(97)^{3/2}}{64} - \frac{(25)^{3/2}}{64}\right] = \frac{1}{27}(97^{3/2} - 125)$$

11. Uma equação do arco é $y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}$; $D_x y = x(x^2+2)^{1/2}$. Do Teorema 6.3.3

$$L = \int_0^3 \sqrt{1+x^2(x^2+2)}\,dx = \int_0^3 \sqrt{x^4+2x^2+1}\,dx = \int_0^3 \sqrt{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$= \int_0^3 (x^2+1)\,dx = \frac{1}{3}x^3 + x\Big]_0^3 = 9 + 3 = 12$$

13. Uma equação do arco é $y = x^{3/2} - \frac{1}{3}x^{1/2}$; $D_x y = \frac{3}{2}x^{1/2} - \frac{1}{6}x^{-1/2}$. Do Teorema 6.3.3

$$L = \int_1^4 \sqrt{1+\left(\frac{3x^{1/2}}{2} - \frac{1}{6x^{1/2}}\right)^2}\,dx = \int_1^4 \sqrt{1+\frac{9x}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{36x}}\,dx = \int_1^4 \sqrt{\frac{9x}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{36x}}\,dx = \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{3x^{1/2}}{2} + \frac{1}{6x^{1/2}}\right)^2}\,dx$$

$$= \int_1^4 \left(\frac{3}{2}x^{1/2} + \frac{1}{6}x^{-1/2}\right)dx = x^{3/2} + \frac{1}{3}x^{1/2}\Big]_1^4 = \left[\left(8+\frac{2}{3}\right) - \left(1+\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{22}{3}$$

15. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$; $y = (1 - x^{2/3})^{3/2}$; $D_x y = \frac{3}{2}(1 - x^{2/3})^{1/2}(-\frac{2}{3}x^{-1/3})$. Do Teorema 6.3.3

$$L = \int_{1/8}^{1} \sqrt{1 + (1 - x^{2/3})x^{-2/3}}\, dx = \int_{1/8}^{1} x^{-1/3} dx = \frac{3}{2} x^{2/3}\Big]_{1/8}^{1} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{8}$$

Ou então, $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$; $\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3} \cdot D_x y = 0$; $D_x y = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$. Do Teorema 6.3.3

$$L = \int_{1/8}^{1} \sqrt{1 + \left(-\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}\right)^2}\, dx = \int_{1/8}^{1} x^{-1/3}\sqrt{x^{2/3} + y^{2/3}}\, dx = \int_{1/8}^{1} x^{-1/3} dx = \frac{3}{2} x^{2/3}\Big]_{1/8}^{1} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{8}$$

17. $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$; $y = b\left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}\right]^{3/2}$; $D_x y = -\frac{b}{a}\left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}\right]^{1/2}\left(\frac{x}{a}\right)^{-1/3}$. Do Teorema 6.3.3

$$L = \int_{a/8}^{a} \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}\left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}\right]\left(\frac{x}{a}\right)^{-2/3}}\, dx = \int_{a/8}^{a} \frac{1}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{-1/3} \sqrt{(a^2 - b^2)\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + b^2}\, dx$$

Se $b = a$ então $\int_{a/8}^{a} \left(\frac{x}{a}\right)^{-1/3} dx = \frac{3a}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} = \frac{9}{8}a$. De outro modo,

Seja $u = (a^2 - b^2)\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + b^2$. Então; $du = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{-1/3} dx$. Qdo $x = \frac{a}{8}$, $u = (a^2 - b^2) \cdot \frac{1}{4} + b^2 = \frac{a^2 + 3b^2}{4}$; qdo $x = a$, $u = (a^2 - b^2) \cdot 1 + b^2 = a^2$. Logo,

$$L = \frac{3}{2(a^2 - b^2)} \int_{(a^2+3b^2)/4}^{a^2} u^{1/2} du = \frac{1}{a^2 - b^2} u^{3/2}\Big]_{(a^2+3b^2)/4}^{a^2} = \frac{1}{a^2 - b^2}\left[a^3 - \frac{(a^2 + 3b^2)^{3/2}}{8}\right]$$

$= \frac{8a^3 - (a^2 + 3b^2)^{3/2}}{8(a^2 - b^2)}$. Racionalizando o numerador, $L = \frac{9}{8} \cdot \frac{7a^4 + 6a^2b^2 + 3b^4}{8a^3 + (a^2 + 3b^2)^{3/2}}$, ambos os casos.

19. Uma equação do arco é $y = \frac{1}{3}x^{3/2} - x^{1/2}$; $D_x y = \frac{1}{2}x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{-1/2}$. Do Teorema 6.3.3

$$L = \int_1^3 \sqrt{1 + (\tfrac{1}{2}x^{1/2} - \tfrac{1}{2}x^{-1/2})^2}\, dx = \int_1^3 \sqrt{1 + \tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}x^{-1}}\, dx = \int_1^3 \sqrt{\tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}x^{-1}}\, dx = \int_1^3 \sqrt{(\tfrac{1}{2}x^{1/2} + \tfrac{1}{2}x^{-1/2})^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 (x^{1/2} + x^{-1/2})\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2}\right]_1^3 = \frac{1}{2}\left[(2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) - \left(\frac{2}{3} + 2\right)\right] = 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}$$

21. $f(x) = \int_0^x \sqrt{\cos t}\, dt$; pelo Teorema 4.8.1 $f'(x) = \sqrt{\cos x}$; $[f'(x)]^2 = \cos x$. Logo,

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos x}\, dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2\cos^2 \tfrac{1}{2}x}\, dx = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \cos \tfrac{1}{2}x\, dx = \sqrt{2}\left[2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}x\right]_0^{\pi/2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

23. $y = \operatorname{sen} x$; $D_x y = \cos x$. Pelo Teorema 6.3.3 e pela regra de Simpson com $n=8$, $\Delta x = \frac{1}{8}\pi$

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx \approx \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{8}\pi)[\sqrt{1 + \cos 0} + 4\sqrt{1 + \cos^2 \tfrac{1}{8}\pi} + 2\sqrt{1 + \cos^2 \tfrac{1}{4}\pi} + 4\sqrt{1 + \cos^2 \tfrac{3}{8}\pi}$$

$$+ 2\sqrt{1 + \cos^2 \tfrac{1}{2}\pi} + 4\sqrt{1 + \cos^2 \tfrac{5}{8}\pi} + 2\sqrt{1 + \cos^2 \tfrac{3}{4}\pi} + 4\sqrt{1 + \cos^2 \tfrac{7}{8}\pi} + \sqrt{1 + \cos^2 \pi}] = 3{,}8203$$

25. $y = \frac{1}{3}x^3$; $D_x y = x^2$. Pelo Teorema 6.3.3 e pela regra de Simpson com $n=8$, $\Delta x = \frac{1}{8}$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + x^4}\, dx \approx \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{8})[1 + 4\sqrt{1 + (\tfrac{1}{8})^4} + 2\sqrt{1 + (\tfrac{1}{4})^4} + 4\sqrt{1 + (\tfrac{3}{8})^4} + 2\sqrt{1 + (\tfrac{1}{2})^4} + 4\sqrt{1 + (\tfrac{5}{8})^4}$$

$$+ 2\sqrt{1 + (\tfrac{3}{4})^4} + 4\sqrt{1 + (\tfrac{7}{8})^4} + \sqrt{2}] = 1{,}0894$$

EXERCÍCIOS 6.4 Centro de Massa de uma Barra

Nestes exercícios, $\bar{x}$ é o centro de massa, M é a medida da massa e Δ é uma partição do intervalo especificado.

1. A massa é 50 g; a aceleração é 5 cm/s². Se F dinas for a força, F=(50)(5)=250.

3. A massa é 80 g; a aceleração é 50 cm/s². Se F dinas for a força, F=(80)(50)=4.000.

5. A força é 6 N; a massa é 4 kg. Se a m/s² for a aceleração, $a = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

7. A força é 24 N; a aceleração é 9 m/s². Se m kg for a massa, $m = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$.

9. $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{4} m_i} = \frac{5(2) + 6(3) + 4(5) + 3(8)}{5 + 6 + 4 + 3} = \frac{72}{18} = 4$$

11. $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{5} m_i} = \frac{2(-3) + 4(-2) + 20(4) + 10(6) + 30(9)}{2 + 4 + 20 + 10 + 30} = \frac{396}{6} = 6$$

13. $$M = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (2\xi_i + 3)\Delta_i x = \int_0^6 (2x + 3)\,dx = x^2 + 3x\Big]_0^6 = 54$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^6 x(2x+3)\,dx}{54} = \frac{\int_0^6 (2x^2 + 3x)\,dx}{54} = \frac{\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\Big]_0^6}{54} = \frac{144 + 54}{54} = \frac{198}{54} = \frac{11}{3}$$

Portanto, o centro de massa está a $\frac{11}{3}$ m do extremo.

15. $$M = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (4\xi_i + 1)\Delta_i x = \int_0^9 (4x + 1)\,dx = 2x^2 + x\Big]_0^9 = 2 \cdot 81 + 9 = 171$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^9 x(4x+1)\,dx}{171} = \frac{\int_0^9 (4x^2 + x)\,dx}{171} = \frac{\frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\Big]_0^9}{171} = \frac{\frac{4}{3}\cdot 729 + \frac{1}{2}\cdot 81}{171} = 5,9$$

Portanto, o centro de massa está a 5,92 mm do extremo.

17. Seja $\rho(x)$ g/cm a densidade no ponto x cm do extremo esquerdo da barra. Seja $\rho(x) = ax + b$. Como $\rho(0) = 3$ e $\rho(12) = 4$, temos b=3 e 12a+b=4. Portanto, $a = \frac{1}{12}$ e b=3; assim, $\rho(x) = \frac{1}{12} + 3$.

$$M = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{12}\xi_i + 3\right)\Delta_i x = \int_0^{12} \left(\frac{1}{12}x + 3\right)dx = \frac{1}{24}x^2 + 3x\Big]_0^{12} = 6 + 36 = 42$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{12} x\left(\frac{1}{12}x + 3\right)dx}{42} = \frac{\int_0^{12}\left(\frac{1}{12}x^2 + 3x\right)dx}{42} = \frac{\frac{1}{36}x^3 + \frac{3}{2}x^2\Big]_0^{12}}{42} = \frac{48 + 216}{42} = \frac{264}{42} = \frac{44}{7}$$

Portanto, o centro de massa está a $\frac{44}{7}$ cm do extremo esquerdo.

19. Seja $\rho(x)$ kg/m a densidade da barra no ponto x m do extremo, tendo a maior densidade. Então, $\rho(x) = c(10 - x)$. Como $\rho(6) = 3$, temos $3 = 4c$; $c = \frac{3}{4}$. Portanto, $\rho(x) = \frac{3}{4}(10 - x)$.

$$M = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{4}(10 - \xi_i)\Delta_i x = \frac{3}{4}\int_0^6 (10 - x)\,dx = \frac{3}{4}\left[10x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^6 = \frac{3}{4}(60 - 18) = \frac{3}{4}\cdot 42 = 31,5$$

$$\bar{x} = \frac{\frac{3}{4}\int_0^6 x(10 - x)\,dx}{\frac{3}{4}\cdot 42} = \frac{\int_0^6 (10x - x^2)\,dx}{42} = \frac{5x^2 - \frac{1}{3}x^3\Big]_0^6}{42} = \frac{180 - 72}{42} = \frac{108}{42} = \frac{18}{7}$$

Portanto, o centro de massa está a $\frac{18}{7}$ m do extremo com maior densidade.

21. Seja $\rho(x)$ kg/m a densidade da barra no ponto x m do extremo. Então, $\rho(x) = kx^3$. Como $\rho(2) = 2$, temos $2 = 8k$; $k = \frac{1}{4}$. Portanto, $\rho(x) = \frac{1}{4}x^3$.

$$M = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{4}\xi_i^3\right)\Delta_i x = \frac{1}{4}\int_0^4 x^3\,dx = \frac{1}{16}x^4\Big]_0^4 = 16; \quad \bar{x} = \frac{\int_0^4 x\left(\frac{1}{4}x^3\right)dx}{16} = \frac{\frac{1}{4}\int_0^4 x^4\,dx}{16} = \frac{\frac{1}{20}x^5\Big]_0^4}{16} = \frac{\frac{256}{5}}{16} = \frac{16}{5}$$

Portanto, o centro de massa está a $\frac{16}{5}$ m do extremo.

23. Seja $\rho(x)$ kg/m a densidade da barra no ponto x m do extremo com maior densidade. Então, $\rho(x) = c(4 - x)$. Como $\rho(3) = 2$, temos $2 = c$. Logo, $\rho(x) = 8 - 2x$.

$$\bar{x} = \frac{\int_0^3 x(8 - 2x)\,dx}{15} = \frac{\int_0^3 (8x - 2x^2)\,dx}{15} = \frac{4x^2 - \frac{2}{3}x^3\Big]_0^3}{15} = \frac{36 - 18}{15} = \frac{18}{15} = 1,2$$

Portanto, o centro de massa está a 1,2 m do extremo com a maior densidade.

25. Seja $\rho(x)$ g/cm a densidade da barra no ponto x m do extremo esquerdo. Então, $\rho(x) = kx^n$. Como $\rho(L) = 20$, então $20 = kL^n$; $k = \frac{20}{L^n}$. Assim, $\rho(x) = \frac{20}{L^n}x^n$.

$$M = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{20}{L^n}(\xi_i)^n\Delta_i x = \frac{20}{L^n}\int_0^L x^n\,dx = \frac{20}{L^n}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big]_0^L = \frac{20L}{n+1}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L x\left(\frac{20}{L^n}x^n\right)dx}{\frac{20L}{n+1}} = \frac{n+1}{L^{n+1}}\int_0^L x^{n+1}\,dx = \frac{n+1}{L^{n+1}}\cdot\frac{x^{n+2}}{n+2}\Big]_0^L = \frac{n+1}{n+2}L$$

Logo, $\frac{3}{4}L = \frac{n+1}{n+2}L$; $3n + 6 = 4n + 4$; $n = 2$. Portanto, $\rho(x) = \frac{20}{L^2}x^2$.

27. Seja $\rho(x)$ kg/m a densidade linear da barra no ponto x m do extremo. Então, $\rho(x) = kx^2$.

$$M = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k(\xi_i^2)\Delta_i x = k\int_0^6 x^2\,dx = \frac{1}{3}kx^3\Big]_0^6 = 72k$$

Logo, $24 = 72k$; $k = \frac{1}{3}$. Assim, $\rho(x) = \frac{1}{3}x^2$ e o maior valor de ρ em $[0, 6]$ é $\rho(6) = \frac{1}{3}(6)^2 = 12$. Logo, a maior densidade linear é 12 kg/m.

EXERCÍCIOS 6.5 Centróide de uma Região Plana

Nestes exercícios $(\bar{x},\bar{y})$ é o centro de massa, A unidades quadradas é a área da região, V unidades cúbicas é o volume do sólido e Δ é uma partição do intervalo especificado.

1. $M_y = \sum_{i=1}^{3} m_i x_i = 1(-1) + 2(2) + 3(3) = 12$; $M_x = \sum_{i=1}^{3} m_i y_i = 1(3) + 2(1) + 3(-1) = 2$

$M = \sum_{i=1}^{3} m_i = 1 + 2 + 3 = 6$. Portanto, $\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{12}{6} = 2$ e $\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

O centro de massa está no ponto $(2, \frac{1}{3})$.

3. $M_x = \sum_{i=1}^{4} m_i y_i = 2(2) + 5(0) + 4(20) + m(-2) = 84 - 2m$; $M = \sum_{i=1}^{4} m_i = 2 + 5 + 4 + m = 11 + m$

Como $\bar{y} = \frac{M_x}{M}$, temos $5 = \frac{84 - 2m}{11 + m}$; $55 + 5m = 84 - 2m$; $7m = 29$; $m = \frac{29}{7}$.

5. Seja m a medida da massa de cada partícula. Então,

$M_y = \sum_{i=1}^{3} m_i x_i = m(4) + m(-3) + m(1) = 2m$; $M_x = \sum_{i=1}^{3} m_i y_i = m(-2) + m(0) + m(5) = 3m$

$M = \sum_{i=1}^{3} m_i = m + m + m = 3m$; $\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2m}{3m} = \frac{2}{3}$ e $\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{3m}{3m} = 1$.

O centro de massa está no ponto $(\frac{2}{3}, 1)$.

7. $\bar{x} = 0$ pois o eixo y é um eixo de simetria. $4 - x^2$ é não-negativo em $[-2,2]$.

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (4 - \gamma_i^2)\Delta_i x = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = 4x - \frac{1}{3}x^3 \Big]_{-2}^{2} = \frac{32}{3}$$

$$M_x = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(4 - \gamma_i^2)^2 \Delta_i x = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} (16 - 8x^2 + x^4)\,dx = \frac{1}{2}\left[16x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right] = \frac{256}{15}$$

$\bar{y} = \frac{1}{A} \cdot M_x = \frac{3}{32} \cdot \frac{256}{15} = \frac{8}{5}$. Assim, o centróide está no ponto $\left(0, \frac{8}{5}\right)$.

9. $\bar{x} = 0$ pois o eixo y é um eixo de simetria. $4 - x^2$ é não-negativo em $[-2,2]$.

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (4 - \gamma_i^2)\Delta_i x = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = 4x - \frac{1}{3}x^3 \Big]_{-2}^{2} = \frac{32}{3}$$

$$M_x = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(4 + \gamma_i^2)(4 - \gamma_i^2)\Delta_i x = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} (16 - x^4)\,dx = \frac{1}{2}\left[16x - \frac{1}{5}x^5\right]_{-2}^{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(32 - \frac{32}{5}\right) - \left(-32 + \frac{32}{5}\right)\right] = \frac{128}{5}.$$

$\bar{y} = \frac{1}{A} \cdot M_x = \frac{3}{32} \cdot \frac{128}{5} = \frac{12}{5}$. Logo, o centróide está no ponto $\left(0, \frac{12}{5}\right)$.

11. Como $x > 0$, $4x - x^3 = x(4 - x^2)$ é não-negativo em $[0,2]$.

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (4\gamma_i - \gamma_i^3)\,\Delta_i x = \int_0^2 (4x - x^3)\,dx = 2x^2 - \frac{1}{4}x^4 \Big]_0^2 = 4$$

$$M_x = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(4\gamma_i + \gamma_i^3)(4\gamma_i - \gamma_i^3)\,\Delta_i x = \frac{1}{2}\int_0^2 (16x^2 - x^6)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{16}{3}x^3 - \frac{1}{7}x^7\right]_0^2 = \frac{256}{21}$$

$$M_y = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(4\gamma_i - \gamma_i^3)\,\Delta_i x = \int_0^2 x(4x - x^3)\,dx = \int_0^2 (4x^2 - x^4)\,dx = \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\Big]_0^2 = \frac{32}{3} - \frac{32}{5} = \frac{64}{15}$$

$\bar{x} = \frac{1}{A}\cdot M_y = \frac{1}{4}\cdot\frac{64}{15} = \frac{16}{15}$ e $\bar{y} = \frac{1}{A}\cdot M_x = \frac{1}{4}\cdot\frac{256}{21} = \frac{64}{21}$. Assim, o centróide está no ponto $\left(\frac{16}{15}, \frac{64}{21}\right)$.

13. $(2x - x^2) - (x^2 - 4) = -2x^2 + 2x + 4 = -2(x + 1)(x - 2)$ é não-negativo em $[-1,2]$.

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [(2\gamma_i - \gamma_i^2) - (\gamma_i^2 - 4)]\,\Delta_i x = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)\,dx = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x\Big]_{-1}^{2}$$

$$= \left(-\frac{16}{3} + 4 + 8\right) - \left(\frac{2}{3} + 1 - 4\right) = 9$$

$$M_x = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}[(2\gamma_i - \gamma_i^2) + (\gamma_i^2 - 4)][(2\gamma_i - \gamma_i^2) - (\gamma_i^2 - 4)]\,\Delta_i x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} (2x - 4)(-2x^2 + 2x + 4)\,dx$$

$$= 2\int_{-1}^{2} (-x^3 + 3x^2 - 4)\,dx = 2\left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 4x\right]_{-1}^{2} = 2\left[(-4 + 8 - 8) - \left(-\frac{1}{4} - 1 + 4\right)\right] = -\frac{27}{2}$$

$$M_y = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i[(2\gamma_i - \gamma_i^2) - (\gamma_i^2 - 4)]\,\Delta_i x = \int_{-1}^{2} x(-2x^2 + 2x + 4)\,dx = 2\int_{-1}^{2} (-x^3 + x^2 + 2x)\,dx$$

$$= 2\left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_{-1}^{2} = 2\left[\left(-4 + \frac{8}{3} + 4\right) - \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1\right)\right] = \frac{9}{2}$$

$\bar{x} = \frac{1}{A}\cdot M_y = \frac{1}{9}\cdot\frac{9}{2} = \frac{1}{2}$ e $\bar{y} = \frac{1}{A}\cdot M_x = \frac{1}{9}\left(-\frac{27}{2}\right) = -\frac{3}{2}$. Logo, o centróide está no ponto $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

15. Como a lâmina é simétrica em relação ao eixo x e a densidade de área não é uma função de y, então, $\bar{y} = 0$. $y^2 = \frac{3}{2}(6 - x)$ é não-negativa em $[0,6]$.

$$M_y = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\cdot\gamma_i\sqrt{6 - \gamma_i}\sqrt{\frac{3}{2}(6 - \gamma_i)}\,\Delta_i x = \sqrt{6}\int_0^6 x(6 - x)\,dx = \sqrt{6}\left[3x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^6 = \sqrt{6}(3\cdot 36 - 2\cdot 36) = 36\sqrt{6}$$

$$M = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\sqrt{6 - \gamma_i}\sqrt{\frac{3}{2}(6 - \gamma_i)}\,\Delta_i x = \sqrt{6}\int_0^6 (6 - x)\,dx = \sqrt{6}\left[6x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^6 = \sqrt{6}(36 - 18) = 18\sqrt{6}$$

$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{36\sqrt{6}}{18\sqrt{6}} = 2$. Portanto, o centro de massa está no ponto $(2,0)$.

17. $y^2 = 4px$, $x \in [0, a]$. Como a região é simétrica em relação ao eixo x, $\bar{y}=0$.

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot 2p^{1/2}\gamma_i^{1/2}\Delta_i x = 4p^{1/2}\int_0^a x^{1/2}dx = 4p^{1/2}\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^a = \frac{8}{3}a^{3/2}p^{1/2}$$

$$M_y = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\gamma_i \cdot 2p^{1/2}\gamma_i^{1/2}\Delta_i x = 4p^{1/2}\int_0^a x^{3/2}dx = 4p^{1/2}\left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^a = \frac{8}{5}a^{5/2}p^{1/2}$$

$\bar{x} = \dfrac{M_y}{A} = \dfrac{\frac{8}{5}a^{5/2}p^{1/2}}{\frac{8}{3}a^{3/2}p^{1/2}} = \dfrac{3}{5}a$. O centróide estará em $(p, 0)$ se $\dfrac{3}{5}a = p$. Assim, $a = \dfrac{5}{3}p$.

Supusemos que p e a eram positivas; se p for positivo, a tbém. será, com o mesmo resultado.

19. Se V unidades cúbicas for o volume do sólido obtido com a rotação de R em torno do eixo x,

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi([f_2(\gamma_i)]^2 - [f_1(\gamma_i)]^2)\Delta_i x = 2\pi\int_a^b \frac{1}{2}([f_2(x)]^2 - [f_1(x)]^2)dx = 2\pi M_x = 2\pi \cdot \frac{M_x}{A} \cdot A = 2\pi\bar{y}A$$

21. Seja a semicircunferência acima do eixo x, com seu centro na origem. Se o seu raio for r unidades, então, $A=\frac{1}{2}\pi r^2$. Se a região for rotacional em torno do eixo, obteremos uma esfera e $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Como a região é simétrica em relação ao eixo y, $\bar{x}=0$. Pelo teorema de Pappus

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi\bar{y}\left(\frac{1}{2}\pi r^2\right); \quad \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$

Portanto, o centróide está no ponto sobre o raio cuja distância da semicircunferência é $\dfrac{4}{3\pi}$ vezes o raio.

23. O cone é o sólido gerado com a rotação, em torno do eixo x, da região limitada pelo eixo x e as retas $y = \dfrac{r}{h}x$ e $x = h$, $x \in [0, h]$. Um elemento de volume é um disco circular centrado no eixo x.

$$\bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{1}{A}\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{r}{h}\gamma_i\right)^2\Delta_i x = \frac{r^2}{2Ah^2}\int_0^h x^2dx = \frac{r^2}{6Ah^2}x^3\Big]_0^h = \frac{r^2h}{6A}$$

Pelo Teorema de Pappus, $V = 2\pi\bar{y}A = 2\pi\left(\dfrac{r^2h}{6A}\right)A = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

25. Pelo Teorema de Pappus, $V = 2\pi\bar{z}A$, onde $\bar{z}$ é a distância do centróide R à reta $x-y-r=0$. Agora, $A=\frac{1}{2}\pi r^2$ e pelo Exercício 21, o centróide de R está no ponto $\left(0, \dfrac{4r}{3\pi}\right)$ Logo, pela fórmula da distância de um ponto a uma reta (Exercício 4.8.46)

$$\bar{z} = \frac{\left|0 - \frac{4r}{3\pi} - r\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\frac{4r}{3\pi} + r\right). \text{ Então, } V = 2\pi\left[\frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\frac{4r}{3\pi} + r\right)\right]\left(\frac{1}{2}\pi r^2\right) = \frac{1}{6}\sqrt{2}(4 + 3\pi)\pi r^3.$$

EXERCÍCIOS 6.6 Trabalho

Nestes exercícios, Δ é uma partição do intervalo específico.

1. W J é o trabalho realizado qdo. a partícula se move de x=1 a x=3.

$$W = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (2\xi_i + 1)^2 \Delta_i x = \int_1^3 (2x+1)^2 dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(2x+1)^3\Big]_1^3 = \frac{1}{6}(343-27) = \frac{158}{3}$$

3. W J é o trabalho realizado quando a partícula se move de x=3 a x=8. Seja $v = \sqrt{x+1}$. Então, $v^2 = x+1$; $x = v^2 - 1$; $dx = 2v\,dv$. Qdo. $x = 3$, $v = 2$; qdo. $x = 8$, $v = 3$. Logo,

$$W = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i\sqrt{\xi_i + 1}\,\Delta_i x = \int_3^8 x\sqrt{x+1}\,dx = \int_2^3 (v^2-1)v(2v\,dv) = 2\int_2^3 (v^4 - v^2)\,dv$$

$$= 2\left[\frac{1}{5}v^5 - \frac{1}{3}v^3\right]_2^3 = 2\left[\left(\frac{243}{5} - 9\right) - \left(\frac{32}{5} - \frac{8}{3}\right)\right] = \frac{1076}{15}$$

5. $96 = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (2\xi_i - 3)\Delta_i x = \int_0^K (2x-3)\,dx = x^2 - 3x\Big]_0^K = K^2 - 3K$; $K^2 - 3K - 96 = 0$

$K = \frac{3 \pm \sqrt{9+384}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{393}}{2}$. Como $K > 0$, $K = \frac{3+\sqrt{393}}{2}$.

7. Coloque a mola ao longo do eixo x, com a origem no ponto onde ela começa a esticar. Pela lei de Hooke, $f(x)=kx$. Como $f(\frac{1}{2}) = 20$, $\frac{1}{2}k = 20$; então $k=40$. Logo, $f(x)=40x$. W ergs é o trabalho realizado no estiramento da mola de, 8 cm para 11 cm; x está em [0,3].

$$W = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 40\xi_i\Delta_i x = 40\int_0^3 x\,dx = 20x^2\Big]_0^3 = 180$$

9. Coloque a mola ao longo do eixo x, com a origem no ponto onde o estiramento começa. Pela lei de Hooke; $f(x)=kx$. Como $f(\frac{1}{2}) = 8$, $\frac{1}{2}k = 8$; então, $k=16$. Logo, $f(x)=16x$.

W J é o trabalho realizado no estiramento da mola de, 4 m para 5 m; x está em [0,1].

$$W = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 16\xi_i\Delta_i x = 16\int_0^1 x\,dx = 8x^2\Big]_0^1 = 8$$

11. Coloque a mola ao longo do eixo x, com a origem no ponto onde a compressão se inicia. Pela lei de Hooke; $f(x)=kx$. Como $f(2) = 600$, $2k = 600$; então $k=300$. Logo, $f(x)=300x$. W ergs é o trabalho realizado na compressão da mola de, 12 cm para 9 cm; x está em [0,3].

$$W = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 300\xi_i\,\Delta_i x = 300\int_0^3 x\,dx = 150x^2\Big]_0^3 = 150\cdot 9 = 1350$$

13. Escolha o eixo x positivo para baixo e tome a origem no topo do tanque; x está em [0,5]. Seja W J o trabalho realizado para se bombear a água até um nível 1 m acima da superfície do tanque. Um elemento do volume é um paralelepípedo retangular de $\Delta_i x$ m de altura, 15 m de comprimento e 25 m de largura, e ele é elevado de $(\xi_i + 1)$ m.

$$W = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} w(15)(25)(\xi_i + 1)\Delta_i x = 375w\int_0^5 (x+1)\,dx = 375w\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^5 = 375w\left(\frac{25}{2} + 5\right) = 6562{,}5w$$

15. Escolha o eixo positivo x para baixo e tome a origem na borda do tanque; x está em [2,6]. Seja W J o trabalho realizado para bombear água até a borda do tanque. Um elemento do volume é um disco circular com $\sqrt{6^2 - \xi_i^2}$ m de raio e é elevado de ξ_i m.

$$W = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} w\pi(36 - \xi_i^2)\xi_i \Delta_i x = \pi w \int_2^6 (36 - x^2) x \, dx = \pi w \int_2^6 (36x - x^3) dx = \pi w \left[18x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_2^6$$

$$= \pi w[(18 \cdot 36 - \tfrac{1}{4} \cdot 6^4) - (18 \cdot 4 - \tfrac{1}{4} \cdot 16)] = 256\pi w$$

17. Escolha o eixo positivo x para baixo e tome a origem na borda do poço; x está em [0,60]. Seja W J o trabalho realizado para puxar o cabo e o peso até a borda do poço. Quando o cabo é levantado a uma distância de $\Delta_i x$m, seu comprimento é ξ_i m e seu peso total é $(6\xi_i + 45)$kg.

$$W = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (6\xi_i + 45)\Delta_i x = \int_0^{60} (6x + 45) dx = 3x^2 + 45x \Big]_0^{60} = 10.800 + 2.700 = 13.500$$

19. Escolha o eixo positivo x para baixo e tome a origem na borda do poço; x está em [0,100]. Seja W J o trabalho realizado para erguer o balde até a borda do poço quando a corrente é puxada $\Delta_i x$ m, seu comprimento é ξ_i m e seu peso é $0,1\xi_i$. O peso da areia $60(\xi_i/100) = 0,6\,\xi_i$.

$$W = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (20 + 0,1\xi_i + 0,6\xi_i)\Delta_i x = \int_0^{100} (20 + 0,70x) dx = 20x + 0,35x^2 \Big]_0^{100} = 2.000 + 3.500 = 5.500$$

21. Escolha o eixo positivo x para baixo e tome a origem na superfície da água; x está em [0,5]. Seja W J o trabalho realizado ao bombearmos a água até a borda do tanque. Um elemento do volume é um disco circular com $\Delta_i x$m de espessura, 5 m de raio e elevado de $(5 + \xi_i)$m.

$$W = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 1000(9,81)(25\pi)(5 + \xi_i)\Delta_i x = 245250\pi \int_0^5 (5 + x) dx = 245250\pi \left[5x + \frac{1}{2}x^2\right]_0^5$$

$$= 245250\pi\left(25 + \frac{25}{2}\right) = 9.196.875\pi$$

23. Escolha o eixo positivo x para cima e tome a origem no vértice do cone; x está em [0,8]. Seja W J o trabalho para bombear óleo para cima do tanque. Um elemento do volume é um disco circular de $\Delta_i x$m de espessura e $f(\xi_i)$m de raio, onde pelos triângulos semelhantes, $\frac{f(\xi_i)}{4} = \frac{\xi_i}{10}$; $f(\xi_i) = \frac{2}{5}\xi_i$, elevado de $(10 - \xi_i)$m.

$$W = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (950)(9,81)\pi\left(\frac{2}{5}\xi_i\right)^2 (10 - \xi_i)\Delta_i x = 9319,5\,\pi \int_0^8 \left(\frac{2}{5}x\right)^2 (10 - x) dx$$

$$= 9319,5\,\pi \int_0^8 \left(\frac{8}{5}x^2 - \frac{4}{25}x^3\right) dx = 9319,5\,\pi \left[\frac{8}{15}x^3 - \frac{1}{25}x^4\right]_0^8 = 9319,5\,\pi\left[\frac{8}{15}(8)^3 - \frac{1}{25}(8)^4\right] = 1.017.938\pi$$

25. Escolha o eixo positivo x para baixo e tome a origem na borda do tanque; x está em [0,6]. Seja W N o trabalho realizado para bombear água até um ponto 15 m acima da borda do tanque. Um elemento do volume é um paralelepípedo retangular com $\Delta_i x$ m de espessura, 6 m de largura e 18 m de comprimento elevado de $(15 + \xi_i)$m.

$$W = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} w(6)(18)(15+\xi_i)\Delta_i x = 108w\int_0^6 (15+x)\,dx = 108w\left[15x + \frac{1}{2}x^2\right]_0^6 = 108w(90+648) = 7.970$$

Um motor com 0,1 hp pode fazer 825 N de trabalho por segundo. Logo, o tempo que ele leva é $\frac{7.970\ w}{825}$ s.

27. Escolha o eixo positivo x para baixo e tome a origem na borda do tanque; x está em [0,6]. Seja W N o trabalho realizado para bombear óleo até a borda do tanque. Um elemento do volume é um paralelepípedo retangular com $\Delta_i x$ de espessura, 4 m de largura e 12 m de comprimento, elevado de ξ_i m.

$$W = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 50(4)(12)\xi_i\,\Delta_i x = 2{,}400\int_0^6 x\,dx = 1{,}200x^2\Big]_0^6 = 1{,}200(36) = 43{,}200$$

Seja a cm a distância que a superfície do óleo abaixa quando 1/3 do trabalho é realizado. Então,

$$\frac{43{,}200}{3} = 1{,}200x^2\Big]_0^a = 1{,}200a^2;\quad a^2 = 12;\quad a = 2\sqrt{3}$$

EXERCÍCIOS 6.7 Pressão Líquida

Nestes exercícios, Δ é uma partição do intervalo especificado, A unidades quadradas é a área da região dada e x é a abscissa do centróide da região.

1. Escolhemos o eixo positivo x para baixo, com a origem na borda da placa, $x \in [0, 8]$. Se F N for a força sobre um lado da placa, então

$$F = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho g \xi_i (10)\Delta_i x = 10\rho g\int_0^8 x\,dx = 5\rho g x^2\Big]_0^8 = 320\rho g$$

3. Escolhemos o eixo positivo x para baixo, com a origem na parte de cima da placa $x \in [2, 6]$. Se F N for a força sobre um lado da placa, então

$$F = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho g \xi_i (4)\Delta_i x = 4\rho g\int_2^6 x\,dx = 2\rho g x^2\Big]_2^6 = 2\rho g(36-4) = 64\rho g$$

5. Escolhemos o eixo positivo x para baixo, com a origem na borda do tanque $x \in [0, \frac{3}{2}]$. Se F N for a força sobre um extremo do tanque, então

$$F = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho g \xi_i (2)\Delta_i x = 2\rho g\int_0^{3/2} x\,dx = \rho g x^2\Big]_0^{3/2} = 2{,}25\rho g$$

7. Escolhemos o eixo positivo x para cima, com a origem no vértice do triângulo. Uma equação de um lado é $y = \frac{2}{3}x$, $x \in [0, 3]$. Se F N for a força sobre o portão, então

$$F = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2(9,81\rho)(18 - \xi_i)\left(\frac{2}{3}\xi_i\right)\Delta_i x = 13,08\rho\int_0^3 (18x - x^2)\,dx = 13,08\rho\left[9x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^3$$

$$= 13,08\rho[81 - 9] = 941,76\rho$$

Como $\rho = 1.000$, a força é 941.760 N.

9. Escolhemos o eixo positivo x para cima, com a origem na base do reservatório. Uma equação de um lado do triângulo é $y = \frac{5}{4}x$, $x \in [0, 10]$. Se F N for a força sobre a face do reservatório, então

$$F = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2(9,81\rho)(10 - \xi_i)\left(\frac{5}{4}\xi_i\right)\Delta_i x = 24,525\rho\int_0^{10} (10x - x^2)\,dx = 24,525\rho\left[5x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^{10}$$

$$= 24,525\rho\left(500 - \frac{1.000}{3}\right) = 4087,5\rho$$

Como $\rho = 1.000$, a força é 4.087.500 N.

11. Escolhemos o eixo positivo x para baixo, com a origem na superfície do óleo. A extremidade do tanque é a região encerrada pelo círculo $x^2 + y^2 = r^2$ portanto $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [0, r]$. Se F N for a força em uma extremidade do tanque, então

$$F = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2(9,81)(750)\xi_i\sqrt{r^2 - \xi_i^2}\,\Delta_i x = -(9,81)(750)\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,(-2x\,dx)$$

$$= -(9,81)(750)\left(\frac{2}{3}\right)(r^2 - x^2)^{3/2}\Big]_0^r = (9,81)(500)r^3$$

Portanto, $80.000 = (9,81)(500)r^3$; $r^3 = \frac{160}{9,81}$; $r \approx 2,54$. Logo, o raio é $\approx 2,54$ m.

13. A equação (4) estabelece que se F for a medida da força devido à pressão líquida contra uma região plana vertical, então, $F = \rho\bar{x}A$. No Exercício 5, $A = 2(\frac{3}{2}) = 3$ e $\bar{x} = \frac{3}{4}$. Assim,

$$F = \rho\left(\tfrac{3}{4}\right)(3) = 2,25\rho$$

15. Escolhemos o eixo positivo x para baixo, com a origem no centro do topo do reservatório. Veja a Fig. 6.7.15. A inclinação da reta AB é $m = \frac{-15}{20} = -\frac{3}{4}$ e $y = 30 - \frac{3}{4}(x - 20) = 45 - \frac{3}{4}x$, $x \in [0, 20]$. Se My for o momento do trapézio em torno do eixo y, então

$$M_y = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i(2)\left(45 - \frac{3}{4}\xi_i\right)\Delta_i x = \int_0^{20}\left(90x - \frac{3}{2}x^2\right)dx$$

$$= 45x^2 - \frac{1}{2}x^3\Big]_0^{20} = 45 \cdot 400 - \frac{1}{2}\cdot 8000 = 14.000$$

Portanto, $F = \rho g\bar{x}A = \rho g M_y = 14.000\rho g$.

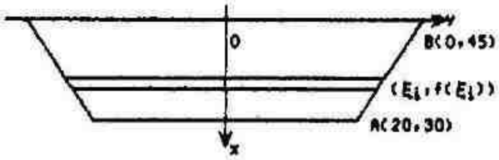


FIGURA 6.7.15

17. Veja o Exercício 15. Se My N for o momento da força em torno da base mais baixa, então

$$M_y = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho g(20-\xi_i)(\xi_i)(2)(45-\tfrac{3}{4}\xi_i)\Delta_i x = \rho g\int_0^{20}\left(1200x - 30x^2 - \tfrac{3}{2}x^3\right)dx$$

$$= \rho g\left[600x^2 - 10x^3 - \tfrac{3}{8}x^4\right]_0^{20} = \rho g\left[600\cdot 400 - 10\cdot 8.000 - \tfrac{3}{8}\cdot 160.000\right] = 100.000\rho g$$

19. Escolha o eixo positivo x para baixo, com a origem no centro do círculo. Então, $x^2 + y^2 = 9$ portanto $y = \sqrt{9-x^2}$, $x \in [0,3]$. Se F N for a força total em um extremo, então

$$F = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho\xi_i(2\sqrt{9-x^2})\Delta_i x = -\rho\int_0^3 \sqrt{9-x^2}(-2x\,dx) = -\tfrac{2}{3}\rho(9-x^2)^{3/2}\Big]_0^3 = -\tfrac{2}{3}\rho(0-27) = 18\rho$$

Como $\rho = 721$, a força total é $18\cdot 721 = 12.978$ N.

21. Pegue o plano xy no plano inclinado contendo a base da piscina, e tome a direção positiva do eixo x para cima do plano inclinado, com a origem em uma quina com profundidade de 8 m, $0 \le x \le \sqrt{40^2+6^2} = 2\sqrt{409}$. Veja a Figura 6.7.21. Se F N for a força total na base da piscina, então

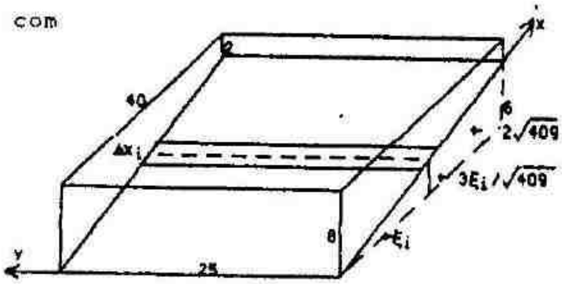


FIGURA 6.7.21

$$F = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho g(25)\left(8 - \frac{3}{\sqrt{409}}\xi_i\right)\Delta_i x = 25\rho g\int_0^{2\sqrt{409}}\left(8 - \frac{3}{\sqrt{409}}x\right)dx = 25\rho g\left[8x - \frac{3}{2\sqrt{409}}x^2\right]_0^{2\sqrt{409}}$$

$$= 25\rho g(16\sqrt{409} - 6\sqrt{409}) = 250\sqrt{409}\rho g.$$

23. Pegue o plano xy na face do reservatório, o eixo positivo x para baixo e a origem no centro do topo da face. A distância vertical do ponto (x,0) sobre o eixo x até a superfície da água é $\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x$, $x \in [0,30]$. Se F N for a força na face do reservatório, então

$$F = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho g\cdot 50(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,\xi_i)\Delta_i x = 25\sqrt{3}\rho g\int_0^{30} x\,dx = 25\sqrt{3}\rho g\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^{30} = 11.250\sqrt{3}\,\rho g$$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 6

Nestes exercícios, V unidades cúbicas é o volume pedido, L unidades é o comprimento, A unidades quadradas é a área da região e Δ é uma partição do intervalo especificado.

1. A região é limitada por $y = x^4$, $x = 1$, e pelo eixo x. Um elemento do volume é um disco circular centrado no eixo x, $x \in [0, 1]$, de raio $\xi_i{}^4$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi(\xi_i{}^4)^2 \Delta_i x = \pi \int_0^1 x^8 dx = \pi\left[\frac{1}{9}x^9\right]_0^1 = \frac{1}{9}\pi$$

3. A região é limitada por $y = \sqrt{\operatorname{sen} x}$, pelo eixo x e $x = \frac{1}{2}\pi$. Um elemento do volume é um disco circular centrado no eixo $x \in [0, \frac{1}{2}\pi]$, de raio $\sqrt{\operatorname{sen} \xi_i}$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi(\sqrt{\operatorname{sen} \xi_i})^2 \Delta_i x = \pi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx = \pi\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} = \pi[0 - (-1)] = \pi$$

5. A região é limitada por $y = \operatorname{cosec} x$, pelo eixo x e $x = \frac{1}{4}\pi$ e $x = \frac{1}{2}\pi$. Um elemento do volume é um disco circular centrado no eixo x, $x \in [\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, de raio $\operatorname{cosec} \xi_i$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi(\operatorname{cosec}^2 \xi_i) \Delta_i x = \pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{cosec}^2 x\, dx = \pi\Big[-\operatorname{cotg} x\Big]_{\pi/4}^{\pi/2} = \pi[0 - (-1)] = \pi$$

7. A região é limitada por $x = y^2 + 2$ e $x = y + 8$. $(y + 8) - (y^2 + 2) = -(y^2 - y - 6) = -(y - 3)(y + 2)$ é não-negativo em $[-2, 3]$. Um elemento do volume é um anel circular de raios $\xi_i + 8$ e $\xi_i{}^2 + 2$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [\pi(\xi_i + 8)^2 - \pi(\xi_i{}^2 + 2)] \Delta_i y = \pi \int_{-2}^{3} [(y^2 + 16y + 64) - (y^4 + 4y^2 + 4)] dy$$

$$= \pi \int_{-2}^{3} (-y^4 - 3y^2 + 16y + 60)\, dy = \pi\left[-\frac{1}{5}y^5 - y^3 + 8y^2 + 60y\right]_{-2}^{3}$$

$$= \pi\left[\left(-\frac{243}{5} - 27 + 72 + 180\right) - \left(\frac{32}{5} + 8 + 32 - 120\right)\right] = 250\pi$$

9. A base do sólido é a região no plano xy limitada por $y^2 = 8x$ e $x = 8$. Seja $f(x) = y = \sqrt{8x}$, $x \in [0, 8]$. Um elemento do volume é um cilindro reto de $\Delta_i x$ unidades de altura, cuja base é um quadrado com lados de $2\sqrt{8\xi_i}$ unidades de comprimento e portanto, com área de $32\xi_i$ unidades quadradas. $V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (32\xi_i) \Delta_i x = 32 \int_0^8 x\, dx = 16x^2\Big]_0^8 = 1024$

11. A região é limitada por $y = |x - 2|$, pelo eixo x e $x=1$ e $x=4$. Um elemento do volume é um disco circular centrado no eixo x, $x \in [1, 4]$, de raio $|\xi_i - 2|$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi|\xi_i - 2|^2 \Delta_i x = \pi \int_1^4 (x - 2)^2 dx = \frac{1}{3}\pi(x - 2)^3\Big]_1^4 = \frac{1}{3}\pi[8 - (-1)] = 3\pi$$

13. A curva $y^2 + x = 0$ intercepta a reta $2y = x + 3$ nos pontos $(-9,3)$ e $(-1,1)$.

A curva $y^2 - 4x = 0$ intercepta a reta $2y = x + 3$ nos pontos $(1,2)$ e $(9,6)$.

Seja V_1 unidades cúbicas o volume do sólido gerado pela rotação em torno da reta $y=-1$, da região abaixo da reta $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ e acima da curva $y = (-x)^{1/2}$, $x \in [-1, 0]$.

Um elemento do vol. é um anel circular de raios $(\frac{1}{2}\xi_i + \frac{3}{2}) + 1$ e $(-\xi_i)^{1/2} + 1$.

$$V_1 = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left\{\pi\left[\left(\frac{1}{2}\xi_i + \frac{3}{2}\right) + 1\right]^2 - \pi[(-\xi_i)^{1/2} + 1]^2\right\}\Delta_i x = \pi\int_{-1}^{0}\left\{\left[\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right]^2 - [(-x)^{1/2} + 1]^2\right\}dx$$

$$= \pi\int_{-1}^{0}\left[\frac{1}{4}(x+5)^2 + x - 2(-x)^{1/2} - 1\right]dx = \pi\left[\frac{1}{12}(x+5)^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}(-x)^{3/2} - x\right]_{-1}^{0}$$

$$= \pi\left[\frac{125}{12} - \left(\frac{64}{12} + \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + 1\right)\right]_{-1}^{0} = \frac{9}{4}\pi$$

Seja V_2 unidades cúbicas o volume do sólido gerado pela rotação em torno da reta $y=-1$, da região abaixo da reta $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ e acima da curva $y = 2x^{1/2}$, $x \in [0, 1]$.

Um elemento do vol. é um anel circular de raios $(\frac{1}{2}\xi_i + \frac{3}{2}) + 1$ e $2\xi_i^{1/2} + 1$.

$$V_2 = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left\{\pi\left[\left(\frac{1}{2}\xi_i + \frac{3}{2}\right) + 1\right]^2 - \pi[2\xi_i^{1/2} + 1]^2\right\}\Delta_i x = \pi\int_{0}^{1}\left[\left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right)^2 - (2x^{1/2} + 1)^2\right]dx$$

$$= \pi\int_{0}^{1}\left[\frac{1}{4}(x+5)^2 - 4x - 4x^{1/2} - 1\right]dx = \pi\left[\frac{1}{12}(x+5)^3 - 2x^2 - \frac{8}{3}x^{3/2} - x\right]_{0}^{1}$$

$$= \pi\left[\left(\frac{216}{12} - 2 - \frac{8}{3} - 1\right) - \frac{125}{12}\right] = \frac{23}{12}\pi$$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{9}{4}\pi + \frac{23}{12}\pi = \frac{25}{6}\pi$$

15. Uma equação do arco é $y = \frac{1}{\sqrt{6}}x^{1/2}(x-2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(x^{3/2} - 2x^{1/2})$; logo, $y' = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{3}{2}x^{1/2} - x^{-1/2}\right)$.

Do Teorema 6.3.3

$$L = \int_2^6\sqrt{1 + \left[\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{3}{2}\,{}^{1/2} - x^{-1/2}\right)\right]^2}\,dx = \int_2^6\sqrt{1 + \frac{1}{6}\left(\frac{9}{4}x - 3 + x^{-1}\right)}\,dx = \frac{1}{\sqrt{6}}\int_2^6\sqrt{\frac{9}{4}x + 3 + x^{-1}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\int_2^6\sqrt{\left(\frac{3}{2}\,{}^{1/2} + x^{-1/2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{6}}\int_2^6\left(\frac{3}{2}x^{1/2} + x^{-1/2}\right)dx = \frac{1}{\sqrt{6}}\left[x^{3/2} + 2x^{1/2}\right]_2^6$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}[(16\sqrt{2} + 4\sqrt{2}) - (2\sqrt{2} + 2\sqrt{2})] = \frac{1}{\sqrt{6}}(16\sqrt{2}) = \frac{16}{3}\sqrt{3}$$

17. O sólido pode ser obtido pela rotação em torno do eixo x, da região limitada acima pelo círculo $x^2 + y^2 = 100$, abaixo pelo eixo x, à esquerda pela reta $x=-1$, e à direita pela reta $x=5$. Um elemento do volume é um disco circular centrado no eixo x, $x \in [-1, 5]$ de raio $\sqrt{100 - \xi_i^2}$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi(100 - \xi_i^2)\Delta_i x = \pi\int_{-1}^{5}(100 - x^2)\,dx = \pi\left[100x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{5} = \pi\left[\left(500 - \frac{125}{3}\right) - \left(-100 + \frac{1}{3}\right)\right] = 558\pi$$

19. O arco tem equação $y = \frac{27}{8}(4 - x^{2/3})^{3/2}$ com pontos extremos $(-1, 17,54)$ e $(-125, 24,51)$.

Então, $y' = -\frac{27}{8}(4 - x^{2/3})^{1/2} \cdot x^{-1/3}$. Do Teorema 6.3.3

$$L = \int_{-1}^{-1/8} \sqrt{1 + \frac{729}{64}(4 - x^{2/3})x^{-2/3}}\, dx = \frac{1}{8}\int_{-1}^{-1/8} \sqrt{2916 - 665x^{2/3}}\,(-x^{-1/3})\, dx$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{665}(2916 - 665x^{2/3})^{3/2}\Big]_{-1}^{-1/8} = \frac{1}{5320}\left[\frac{1}{8}(10999)^{3/2} - (2251)^{3/2}\right] \approx 7{,}03$$

21. $\bar{x} = \dfrac{4(-5) + 2(4) + 7(2)}{4 + 2 + 7} = \dfrac{2}{13}$

23. Seja m a medida da massa de cada partícula. Então,

$$M_y = \sum_{i=1}^{4} m x_i = m(3) + m(2) + m(-1) = 6m; \quad M_x = \sum_{i=1}^{4} m y_i = m(0) + m(2) + m(4) + m(2) = 8m; \quad M = \sum_{i=1}^{4} m = 4m$$

Portanto, $\bar{x} = \dfrac{M_y}{M} = \dfrac{6m}{4m} = \dfrac{3}{2}$ e $\bar{y} = \dfrac{M_x}{M} = \dfrac{8m}{4m} = 2$. O centro de massa está no ponto $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

25. Se M kg for a massa da barra, então

$$M = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\sqrt{\xi_i + 1}\,\Delta_i x = \int_0^8 2\sqrt{x + 1}\, dx = \frac{4}{3}(x + 1)^{3/2}\Big]_0^8 = \frac{4}{3}(27 - 1) = \frac{104}{3}$$

Seja $v = \sqrt{x + 1}$; então $x = v^2 - 1$ e $dx = 2v\, dv$. Qdo $x = 0$, $v = 1$ e qdo $x = 8$, $v = 3$. Logo,

$$M_y = \int_0^8 x(2\sqrt{x + 1})\, dx = \int_1^3 (v^2 - 1)(2v)(2v\, dv) = 4\int_1^3 (v^4 - v^2)\, dv = 4\left[\frac{1}{5}v^5 - \frac{1}{3}v^3\right]_1^3$$

$$= 4\left[\left(\frac{243}{5} - 9\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right)\right] = \frac{2384}{15}$$

Portanto, $\bar{x} = \frac{1}{M} \cdot M_y = \frac{3}{104} \cdot \frac{2384}{15} = \frac{298}{65}$. O centro de massa está a $\frac{298}{65}$ m do extremo esquerdo.

27. $A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (9 - \xi_i^2)\Delta_i x = \int_0^3 (9 - x^2)\, dx = \left[9x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = 18$

$$M_y = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i(9 - \xi_i^2)\Delta_i x = \int_0^3 (9x - x^3)\, dx = \left[\frac{9}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^3 = \frac{81}{2} - \frac{81}{4} = \frac{81}{4}$$

$$M_x = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(9 - \xi_i^2)(9 - \xi_i^2)\Delta_i x = \frac{1}{2}\int_0^3 (81 - 18x^2 + x^4)\, dx = \frac{1}{2}\left[81x - 6x^3 + \frac{1}{5}x^5\right]_0^3$$

$$= \frac{1}{2}\left(81 \cdot 3 - 6 \cdot 27 + \frac{1}{5} \cdot 243\right) = \frac{324}{5}$$

Logo, $\bar{x} = \frac{1}{A} \cdot M_y = \frac{1}{18} \cdot \frac{81}{4} = \frac{9}{8}$ e $\bar{y} = \frac{1}{A} \cdot M_x = \frac{1}{18} \cdot \frac{324}{5} = \frac{18}{5}$. O centróide está no ponto $\left(\frac{9}{8}, \frac{18}{5}\right)$.

29. $\sqrt{x} - x^2 = \sqrt{x}(1 - x^{3/2})$ é não-negativa em $[0,1]$.

$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\sqrt{\xi_i} - \xi_i^2)\Delta_i x = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

$M_y = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\sqrt{\xi_i} - \xi_i^2)\Delta_i x = \int_0^1 (x^{3/2} - x^3)\,dx = \left[\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{3}{20}$

Assim, $\bar{x} = \frac{1}{A}\cdot M_y = 3\cdot\frac{3}{20} = \frac{9}{20}$. O centróide está no ponto $\left(\frac{9}{20}, \frac{9}{20}\right)$ pois a região é simétrica com relação à reta y=x.

31. Metade de uma esfera com 4 de raio é obtida com a rotação em torno do eixo x, da região no primeiro quadrante limitada pelo eixo x, o eixo y e o semicírculo $x^2+y^2=16$.

$$M_x = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\cdot\frac{1}{2}[\sqrt{16 - \xi_i^2}]^2\Delta_i x = \int_0^4 (16 - x^2)\,dx = \left[16x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^4 = 64 - \frac{64}{3} = \frac{128}{3}$$

Pelo Teorema de Pappus, $V = 2\pi\bar{y}A = 2\pi\left(\frac{M_x}{A}\right)A = 2\pi M_x = 2\pi\cdot\frac{128}{3} = \frac{256}{3}\pi$.

33. A região é limitada por $y = 2x - \frac{1}{6}x^3$, pelo eixo x e x=2. Os elementos retangulares são verticais, $x \in [0, 2]$. Um elemento do volume é um invólucro cilíndrico no eixo y, de raio médio m_i e altura $2m_i - \frac{1}{6}m_i^3$.

$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i \left(2m_i - \frac{1}{6}m_i^3\right)\Delta_i x = 2\pi\int_0^2 x\left(2x - \frac{1}{6}x^3\right)dx = 2\pi\int_0^2\left(2x^2 - \frac{1}{6}x^4\right)dx = 2\pi\left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5\right]_0^2$

$= 2\pi\cdot\frac{64}{15} = \frac{128}{15}\pi$

35. A região é limitada por $y = 9x - \frac{1}{12}x^4$, pelo eixo x e x=3. Os elementos retangulares são verticais, $x \in [0, 3]$. Um elemento do volume é um invólucro cilíndrico centrado na reta x=2, de raio médio $3 - m_i$ e altura $9m_i - \frac{1}{12}m_i^4$.

$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi(3 - m_i)\left(9m_i - \frac{1}{12}m_i^4\right)\Delta_i x = 2\pi\int_0^3 (3 - x)\left(9x - \frac{1}{12}x^4\right)dx = 2\pi\int_0^3\left(\frac{1}{12}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - 9x^2 + 27x\right)dx$

$= 2\pi\left[\frac{1}{72}x^6 - \frac{1}{20}x^5 - 3x^3 + \frac{27}{2}x^2\right]_0^3 = 2\pi\cdot\frac{1539}{40} = \frac{1539}{20}\pi$

37. Colocamos a mola ao longo do eixo x com a origem no ponto onde o estiramento começa. Pela lei de Hooke, f(x)=kx. Então, $f(5) = 600$; $5k = 600$; $k = 120$; assim, $f(x) = 120x$. W ergs é o trabalho realizado para esticar a mola de 30 cm até 40 cm; $x \in [0, 10]$.

$$W = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 120\xi_i\Delta_i x = 120\int_0^{10} x\,dx = 60x^2\Big]_0^{10} = 6.000$$

39. Escolhemos o eixo positivo x para baixo com a origem na ponta do pólo, $x \in [0, 20]$.

Se W J for o trabalho realizado para erguer todo o cabo até a ponta do pólo, então

$$W = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\xi_i \Delta_i x = \int_0^{20} 2x\,dx = x^2 \Big]_0^{20} = 400$$

41. Escolhemos o eixo positivo x para baixo com a origem na borda do tanque, $x \in [0, 4]$.

W J é o trabalho realizado para bombear a água no tanque, até um nível de ½ m acima de sua borda. Um elemento do volume é um paralelepípedo retangular com $\Delta_i x$ de espessura, 15 m de comprimento e 30 m de largura, elevado de $(\xi_i + ½)$m.

$$W = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (1000)(9,81)(15)(30)\left(\xi_i + \frac{1}{2}\right)\Delta_i x = 4,414,500\int_0^4 \left(x + \frac{1}{2}\right)dx = 4,414,500\left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right]_0^4$$

$$= 4,414,500(8+2) = 44,145,000$$

43. Escolha o eixo positivo x para baixo com a origem no centro do hemisfério.

Seja W_1 J, W_2 J e W J o trabalho realizado para que a água seja bombeada no cilindro, no hemisfério e no tanque todo até a borda do tanque. Um elemento de volume para W_1 é um disco circular com 4 m de raio, elevado de $(\xi_i + 8)$ m, $x \in [-8, 0]$.

$$W_1 = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} w\pi(4)^2(\xi_i + 8)\Delta_i x = 16w\pi\int_{-8}^{0}(x + 8)\,dx = 8w(x + 8)^2\Big]_{-8}^{0} = 512w\pi$$

Um elemento de volume para W_2 é um disco circular com $\sqrt{4^2 - \xi_i^2}$ m de raio, elevado de $(\xi_i + 8)$ m, $\xi_i \in [0, 4]$.

$$W_2 = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} w\pi(16 - \xi_i^2)(\xi_i + 8)\Delta_i x = w\pi\int_0^4 (-x^3 - 8x^2 + 16x + 128)\,dx = w\pi\left[-\frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 8x^2 + 128x\right]_0^4$$

$$= w\pi\left(-\frac{1}{4}\cdot 256 - \frac{8}{3}\cdot 64 + 8\cdot 16 + 128\cdot 4\right) = \frac{1.216}{3}w\pi$$

Portanto, $W = W_1 + W_2 = 512w\pi + \dfrac{1216}{3}w\pi = \dfrac{2.752}{3}w\pi$.

45. O eixo positivo y está para cima com a origem na base do tanque. W J é o trabalho realizado para que toda a água seja bombeada para fora do tanque, pela borda. Um elemento do volume é um disco circular com, $\xi_i^{1/2}$ m de raio, elevado de $(3,6-\xi_i)$ m, $y \in [0, 2]$.

$$W = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} w\pi(\xi_i^{1/2})^2(3,6 - \xi_i)\Delta_i y = w\pi\int_0^2 y(3,6 - y)\,dy = w\pi\int_0^2 (3,6y - y^2)\,dy =$$

$$= w\pi\left[1,8y^2 - \frac{1}{3}y^3\right]_0^2 = w\pi\left(7,2 - \frac{8}{3}\right) \cong 4,5\,w\pi$$

47. Escolhemos o eixo positivo x para baixo com a origem no topo da torre. Um elemento do volume é um cilindro reto com $\Delta_i x$ m de altura, cuja base é um quadrado com $\frac{1}{10}\xi_i$ m de lado e área de $\frac{1}{100}\xi_i^2$ m², $x \in [0, 30]$.

$$V = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{100}\xi_i^2 \Delta_i x = \frac{1}{100}\int_0^{30} x^2 dx = \frac{1}{300}x^3\Big]_0^{30} = 90$$

49. Temos $A(-4, 4)$, $B(-2, 0)$, $C(0, 8)$, $D(2, 0)$, $E(4, 4)$. **Método 1.** Os elementos retangulares são horizontais e vão de AB até ED, $y \in [0, 4]$, e de AC até EC, $y \in [4, 8]$. Um elemento do volume é um invólucro cilíndrico centrado no eixo x, de raio médio m_i e altura $2(2 + \frac{1}{2}m_i)$, $y \in [0, 4]$, e altura $2(8 - m_i)$, $y \in [4, 8]$.

$$V = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i(4 + m_i)\Delta_i y + \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i(16 - 2m_i)\Delta_i y$$

$$= 2\pi\int_0^4 y(4 + y)\,dy + 2\pi\int_4^8 y(16 - 2y)\,dy = 2\pi\int_0^4 (4y + y^2)\,dy + 2\pi\int_4^8 (16y - 2y^2)\,dy$$

$$= 2\pi\Big[2y^2 + \frac{1}{3}y^3\Big]_0^4 + 2\pi\Big[8y^2 - \frac{2}{3}y^3\Big]_4^8 = 2\pi\Big(\frac{160}{3}\Big) + 2\pi\Big(\frac{256}{3}\Big) = \frac{832}{3}\pi$$

Método 2. O triângulo CEO tem uma área de $\frac{1}{2}(4)8 = 16$ $\bar{y} = \frac{1}{3}(8 + 4 + 0) = 4$; o triângulo DEO tem uma área de $\frac{1}{2}(2) = 4$ e $\bar{y} = \frac{1}{3}(4 + 0 + 0)\frac{4}{3}$. Pela simetria e pelo teorema de Pappus (Exercício 6.5.19)

$$V = 2(V_{CEO} + V_{DEO}) = 2\Big[16\cdot 2\pi(4) + 4\cdot 2\pi\Big(\frac{4}{3}\Big)\Big] = \frac{832}{3}\pi$$

51. A região é limitada por $y = \operatorname{sen} x$, $y = 1$, e pelo eixo y. Um elemento do volume é um anel circular centrado no eixo x, $x \in [0, \frac{1}{2}\pi]$, de raios 1 e sen ξ_i.

$$V = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (\pi\cdot 1^2 - \pi\cdot\operatorname{sen}^2\xi_i)\Delta_i x = \pi\int_0^{\pi/2}(1 - \operatorname{sen}^2 x)\,dx = \pi\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\,dx$$

$$= \pi\Big[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x\Big]_0^{\pi/2} = \pi\Big(\frac{1}{4}\pi\Big) = \frac{1}{4}\pi^2$$

53. A região é limitada por $x^2 = 6y$ e $2y = 3$. A pressão sobre um elemento retangular de área $2\sqrt{6\xi_i}\,\Delta_i y$ m² é $\rho(\frac{3}{2} - \xi_i)$ N/m² Se F N for a força sobre um lado da placa,

$$F = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho g\Big(\frac{3}{2} - \xi_i\Big)(2\sqrt{6}\xi_i^{1/2})\Delta_i y = 2\sqrt{6}\rho g\int_0^{3/2}\Big(\frac{3}{2}y^{1/2} - y^{3/2}\Big)dy = 2\sqrt{6}\rho g\Big[y^{3/2} - \frac{2}{5}y^{5/2}\Big]_0^{3/2}$$

$$= 2\sqrt{6}\rho g\Big(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}\cdot\frac{9}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\Big) = 2\sqrt{6}\rho g\Big(\frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{2}}\Big) = \frac{18}{5}\rho g$$

55. Escolha o eixo positivo x para baixo com a origem no centro da circunferência. Uma equação da circunferência é $x^2 + y^2 = 16$. A pressão sobre um elemento retangular de área $2\sqrt{16 - \xi_i^2}\,\Delta_i x$ m² é $641\xi_i$ kg/m³. Se F N for a força em um extremo, em virtude da pressão liquida,

$$F = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 641\xi_i(2\sqrt{16 - \xi_i^2})\Delta_i x = -641\int_0^4\sqrt{16 - x^2}(-2x\,dx) = -\frac{128}{3}(16 - x^2)^{3/2}\Big]_0^4 = -\frac{1282}{3}(-64) = \frac{820}{3}$$

CAPÍTULO 7

FUNÇÕES INVERSAS, LOGARÍTMICAS E EXPONENCIAIS

EXERCÍCIOS 7.1. Funções Inversas

1. $f(x) = 2x + 3$. Como f é crescente, f é biunívoca.

3. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$. Como $f(2)=0$ e $f(-2)=0$, f não é biunívoca

5. $g(x) = 4 - x^3$. Como g é decrescente , g é biunívoca.

7. $f(x) = \sqrt{x+3}$. Como f é crescente, f é biunívoca.

9. $h(x) = 2 \operatorname{sen} x$, $-\frac{1}{2}\pi \le x \le \frac{1}{2}\pi$. Como h é crescente, h é biunívoca.

11. $f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$, $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$. Como f é crescente, f é biunívoca.

13. $G(x) = \sec x$, $x \in [0, \frac{1}{2}\pi) \cup [\pi, \frac{3}{2}\pi)$. Em $[0, \frac{1}{2}\pi)$ G é crescente e positiva; em $[\pi, \frac{3}{2}\pi)$ G é decrescente e negativa. Logo, G é biunívoca.

15. $f(x) = \dfrac{2}{x+3}$. Em $(-\infty, -3)$, f é decrescente e negativa; em $(-3, +\infty)$ f é decrescente e positiva. Logo, f é biunívoca.

17. $g(x) = |x - 2|$. Como $g(1) = 1$ e $g(3) = 1$, g não é biunívoca.

19. $f(x) = 5x - 7$. f é crescente $\Rightarrow$ f é biunívoca $\Rightarrow$ f tem uma inversa.

    (a) Seja $y = f(x)$. Então, $y = 5x - 7$; $x = \frac{1}{5}(y + 7)$.

    Logo, $f^{-1}(y) = \frac{1}{5}(y + 7)$, e portanto, $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}(x + 7)$.

    O domínio de f^{-1} é $(-\infty, +\infty)$ e a imagem de f^{-1} é $(-\infty, +\infty)$.

21. $g(x) = 1 - x^2$. $g(1) = 0 = g(-1)$ $\Rightarrow$ g não é biunívoca $\Rightarrow$ g não tem uma inversa.

23. $f(x) = (4 - x)^3$. f é decrescente $\Rightarrow$ f é biunívoca $\Rightarrow$ f tem uma inversa.

    (a) Seja $y = f(x)$. Então, $y = (4 - x)^3$; $y^{1/3} = 4 - x$; $x = 4 - \sqrt[3]{y}$.

    Logo, $f^{-1}(y) = 4 - \sqrt[3]{y}$, e portanto, $f^{-1}(x) = 4 - \sqrt[3]{x}$.

    O domínio de f^{-1} é $(-\infty, +\infty)$ e a imagem de f^{-1} é $(-\infty, +\infty)$.

25. $h(x) = \sqrt{2x - 6}$. h é crescente $\Rightarrow$ h é biunívoca $\Rightarrow$ h tem uma inversa.

    (a) Seja $y = h(x)$. Então, $y = \sqrt{2x - 6}$; $y^2 = 2x - 6$; $x = \frac{1}{2}y^2 + 3$.

    Logo, $h^{-1}(y) = \frac{1}{2}y^2 + 3$, e portanto, $h^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$. O domínio de h^{-1} é a imagem de h, a qual é $[0, +\infty)$. A imagem de h^{-1} é o domínio de h, o qual é $[3, +\infty)$.

27. $F(x) = \sqrt[3]{x+1}$. F é crescente $\Rightarrow$ F é biunívoca $\Rightarrow$ F tem uma inversa.

(a) Seja $y = F(x)$. Então, $y = \sqrt[3]{x+1}$; $y^3 = x + 1$; $x = y^3 - 1$.

Portanto, $F^{-1}(y) = y^3 - 1$, e então, $F^{-1}(x) = x^3 - 1$.

O domínio de F^{-1} é $(-\infty, +\infty)$ e a imagem de F^{-1} é $(-\infty, +\infty)$.

29. $f(x) = (x+2)^4$. $f(0) = 2^4 = f(-4)$ $\Rightarrow$ f não é biunívoca $\Rightarrow$ f não tem uma inversa.

31. $f(x) = 2\sqrt[5]{x}$. f é crescente $\Rightarrow$ f é biunívoca $\Rightarrow$ f tem uma inversa.

(a) Seja $y = f(x)$. Então, $y = 2\sqrt[5]{x}$; $y^5 = 32x$; $x = \frac{1}{32}y^5$.

Portanto, $f^{-1}(y) = \frac{1}{32}y^5$, e então, $f^{-1}(x) = \frac{1}{32}x^5$.

O domínio de f^{-1} é $(-\infty, +\infty)$ e a imagem de f^{-1} é $(-\infty, +\infty)$.

33. $f(x) = \frac{x-3}{x+1} = 1 - \frac{4}{x+1}$. Em $(-\infty, -1)$ f é crescente e $f(x) > 1$, em $(-1, +\infty)$ f é crescente e $f(x) < 1$. Portanto, f é biunívoca, e então, f tem uma inversa.

(a) Seja $y = f(x)$. Então, $y = \frac{x-3}{x+1}$; $xy + y = x - 3$; $x - xy = y + 3$; $x(1-y) = y + 3$; $x = \frac{y+3}{1-y}$.

Assim, $f^{-1}(y) = \frac{y+3}{1-y}$, logo $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{1-x}$. O domínio de f^{-1} é $\{x | x \neq 1\}$. A imagem de f^{-1} é o domínio de f, o qual é $\{y | y \neq -1\}$.

35. $g(x) = x^2 + 5$, $x \geq 0$. g é crescente $\Rightarrow$ g é biunívoca $\Rightarrow$ g tem uma inversa.

(a) Seja $y = g(x)$ com $x \geq 0$. Então, $y = x^2 + 5$; $x^2 = y - 5$; $x = \sqrt{y-5}$, já que $x \geq 0$.

Portanto, $g^{-1}(y) = \sqrt{y-5}$, e então $g^{-1}(x) = \sqrt{x-5}$. O domínio de g^{-1} é a imagem de g a qual é $[5, +\infty)$. A imagem de g^{-1} é o domínio de g o qual é $[0, +\infty)$.

37. $f(x) = (2x+1)^3$, $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$. f é crescente $\Rightarrow$ f é biunívoca $\Rightarrow$ f tem uma inversa.

(a) Seja $y = (2x+1)^3$ com $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$. Então, $\sqrt[3]{y} = 2x + 1$; $x = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{y} - 1)$.

Portanto, $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{y} - 1)$, logo, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{x} - 1)$. O domínio de f^{-1} é a imagem de f, a qual é $[0, 8]$. A imagem de f^{-1} é o domínio de f, o qual é $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

39. $F(x) = \sqrt{9 - x^2}$, $0 \leq x \leq 3$. F é decrescente $\Rightarrow$ F é biunívoca $\Rightarrow$ F tem uma inversa.

(a) Seja $y = F(x)$ com $0 \leq x \leq 3$. Então, $y = \sqrt{9 - x^2}$; $y^2 = 9 - x^2$; $x^2 = 9 - y^2$; $x = \sqrt{9 - x^2}$, já que $x \geq 0$. Portanto, $F^{-1}(y) = \sqrt{9 - y^2}$, e assim, $F^{-1}(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

O domínio de F^{-1} é $[0, 3]$ e a imagem de F^{-1} é $[0, 3]$.

41. $f(x) = 4x - 3$. (a) f é crescente $\Rightarrow$ f é biunívoca $\Rightarrow$ f tem uma inversa.

(b) Seja $y = f(x)$. Então, $y = 4x - 3$; $x = \frac{1}{4}(y + 3)$.

Logo, $f^{-1}(y) = \frac{1}{4}(y + 3)$, e portanto, $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}(x + 3)$.

(c) $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(4x - 3) = \frac{1}{4}[(4x - 3) + 3] = \frac{1}{4}(4x) = x$

$f(f^{-1}(x)) = f(\frac{1}{4}(x + 3)) = 4[\frac{1}{4}(x + 3)] - 3 = (x + 3) - 3 = x$

43. $f(x) = x^3 + 2$. (a) f é crescente $\Rightarrow$ f é biunívoca $\Rightarrow$ f tem uma inversa.

(b) Seja $y = f(x)$. Então, $y = x^3 + 2$; $x^3 = y - 2$; $x = \sqrt[3]{y - 2}$.

Portanto, $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y - 2}$, e assim, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$.

(c) $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^3 + 2) = \sqrt[3]{(x^3 + 2) - 2} = \sqrt[3]{x^3} = x$

$f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt[3]{x - 2}) = (\sqrt[3]{x - 2})^3 + 2 = (x - 2) + 2 = x$

45. $f(x) = \frac{3x + 1}{2x + 4} = \frac{3}{2} - \frac{5}{2x + 4}$. (a) Em $(-\infty, -2)$ f é crescente e $f(x) > \frac{3}{2}$; em $(-2, +\infty)$ f é crescente e $f(x) < \frac{3}{2}$. Assim, f é biunívoca, e portanto, tem uma inversa.

(b) Seja $y = f(x)$. Então, $y = \frac{3x + 1}{2x + 4}$; $2xy + 4y = 3x + 1$; $x(2y - 3) = 1 - 4y$; $x = \frac{4y - 1}{3 - 2y}$.

Portanto, $f^{-1}(y) = \frac{4y - 1}{3 - 2y}$, e assim, $f^{-1}(x) = \frac{4x - 1}{3 - 2x}$.

(c) $$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{3x + 1}{2x + 4}\right) = \frac{4\left(\frac{3x + 1}{2x + 4}\right) - 1}{3 - 2\left(\frac{3x + 1}{2x + 4}\right)} = \frac{12x + 4 - 2x - 4}{6x + 12 - 6x - 2} = \frac{10x}{10} = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{4x - 1}{3 - 2x}\right) = \frac{3\left(\frac{4x - 1}{3 - 2x}\right) + 1}{2\left(\frac{4x - 1}{3 - 2x}\right) + 4} = \frac{12x - 3 + 3 - 2x}{8x - 2 + 12 - 8x} = \frac{10x}{10} = x$$

47. Seja $y = f(x)$. Então, $y = 32 + \frac{9}{5}x$; $y - 32 = \frac{9}{5}x$; $x = \frac{5}{9}(y - 32)$. Logo, $f^{-1}(y) = \frac{5}{9}(y - 32)$; e portanto, $f^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$.

49. Seja $y = f(x)$. Então, $y = \sqrt{16 - x^2}$; $y^2 = 16 - x^2$; $x^2 = 16 - y^2$; $x = \sqrt{16 - y^2}$ já que $x \geq 0$. Logo, $f^{-1}(y) = \sqrt{16 - y^2}$, e portanto, $f^{-1}(x) = \sqrt{16 - x^2}$.

51. $f(x) = x^2 + 4$. (a) $f(1) = 5 = f(-1) \Rightarrow f$ não é biunívoca $\Rightarrow f$ não tem uma inversa.

(b) Seja $f_1(x) = x^2 + 4$, $x \geq 0$ e $f_2(x) = x^2 + 4$, $x \leq 0$. Então, f_1 é crescente e f_2 é decrescente $\Rightarrow$ cada uma delas é biunívoca $\Rightarrow$ cada uma tem uma inversa.

(c) Seja $y = f_1(x)$ com $x \geq 0$. Então,

$y = x^2 + 4$; $x^2 = y - 4$; $x = \sqrt{y - 4}$

Assim, $f_1^{-1}(y) = \sqrt{y - 4}$; $f_1^{-1}(x) = \sqrt{x - 4}$.

Seja $y = f_2(x)$ com $x \leq 0$. Então,

$y = x^2 + 4$; $x^2 = y - 4$; $x = -\sqrt{y - 4}$

Assim, $f_2^{-1}(y) = -\sqrt{y - 4}$; $f_2(x) = -\sqrt{x - 4}$.

O domínio de f_1^{-1} e f_2^{-1} é a imagem de f_1 e f_2 a qual é $[4, +\infty)$.

53. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ (a) $f(3) = 0 = f(-3) \Rightarrow f$ não é biunívoca $\Rightarrow f$ não tem uma inversa.

(b) Seja $f_1(x) = \sqrt{9 - x^2}$, $0 \leq x \leq 3$ e $f_2(x) = \sqrt{9 - x^2}$, $-3 \leq x \leq 0$. Então, f_1 é decrescente e f_2 é crescente $\Rightarrow$ cada uma delas é biunívoca $\Rightarrow$ cada uma tem uma inversa.

(c) Seja $y = f_1(x)$ com $0 \leq x \leq 3$. Então,

$y = \sqrt{9 - x^2}$; $y^2 = 9 - x^2$; $x^2 = 9 - y^2$

$x = \sqrt{9 - y^2}$. Logo, $f_1^{-1}(y) = \sqrt{9 - y^2}$

e portanto, $f_1^{-1}(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

Seja $y = f_2(x)$ com $-3 \leq x \leq 0$. Então,

$y = \sqrt{9 - x^2}$; $y^2 = 9 - x^2$; $x^2 = 9 - y^2$

$x = -\sqrt{9 - y^2}$. Logo, $f_2^{-1}(y) = -\sqrt{9 - y^2}$

e portanto, $f_2^{-1}(x) = -\sqrt{9 - x^2}$.

O domínio de f_1^{-1} e f_2^{-1} é a imagem de f_1 e f_2 a qual é $[0, 3]$.

55. $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 1 \\ x^2 & \text{se } 1 \leq x \leq 9 \\ 27\sqrt{x} & \text{se } 9 < x \end{cases}$

Qdo x está em $(-\infty, 1)$, f é crescente e $f(x)$ está em $(-\infty, 1)$; qdo x está em $[1, 9]$, f é crescente e $f(x)$ está em $[1, 81]$; qdo x está em $(9, +\infty)$ f é crescente e $f(x)$ está em $(81, +\infty)$. Logo, f é biunívoca e f tem uma inversa. Seja $y = f(x)$. Então,

$y = x$ se $x < 1$

$y = x^2$ se $1 \leq x \leq 9$

$y = 27\sqrt{x}$ se $9 < x$

Assim, $x = y$ se $y < 1$

Assim, $x = \sqrt{y}$ se $1 \leq y \leq 81$

Assim, $x = \frac{1}{729}y^2$ se $81 < y$

Portanto, $f^{-1}(y) = \begin{cases} y & \text{se } y < 1 \\ \sqrt{y} & \text{se } 1 \leq y \leq 81. \\ \frac{1}{729}y^2 & \text{se } 81 < y \end{cases}$ Logo, $f^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{se } 1 \leq x \leq 81. \\ \frac{1}{729}x^2 & \text{se } 81 < x \end{cases}$

EXERCÍCIOS 7.2 Teoremas da Função Inversa e a Derivada da Inversa de uma Função

1. $f(x) = 4x - 3$. Seja $y = f(x)$; então,

$y = 4x - 3 \qquad \frac{dy}{dx} = 4$

$x = \frac{1}{4}(y + 3) \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{4}$

Assim, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$.

3. $f(x) = \sqrt{x+1}$. Seja $y = (x)$; então,

$y = \sqrt{x+1} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$y^2 = x + 1$; $x = y^2 - 1 \qquad \frac{dx}{dy} = 2y$

Assim, $\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = 2\sqrt{x+1} = 2y = \frac{dx}{dy}$.

5. $f(x) = \frac{1}{5}x^5$. Seja $y = f(x)$; então,

$y = \frac{1}{5}x^5 \qquad \frac{dy}{dx} = x^4$

$x^5 = 5y$; $x = (5y)^{1/5} \qquad \frac{dx}{dy} = (5y)^{-4/5}$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{(5y)^{4/5}} = \frac{1}{[(5y)^{1/5}]^4} = \frac{1}{x^4} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

7. $f(x) = \sqrt[3]{x-8}$. Seja $y = f(x)$; então,

$y = \sqrt[3]{x-8} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(x-8)^{-2/3}$

$y^3 = x - 8$; $x = y^3 + 8 \qquad \frac{dx}{dy} = 3y^2$

$$\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = 3(x-8)^{2/3} = 3[(x-8)^{1/3}]^2 = 3y^2 = \frac{dx}{dy}$$

9. $f(x) = \frac{2x-3}{x+2}$. Seja $y = f(x)$; então,

$y = \frac{2x-3}{x+2} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2(x+2) - (2x-3)}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2}$

$xy + 2y = 2x - 3$; $xy - 2x = -2y - 3$; $x = \frac{2y+3}{2-y} \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{2(2-y) - (-1)(2y-3)}{(2-y)^2} = \frac{7}{(2-y)^2}$

$$\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{7}(x+2)^2 = \frac{1}{7}\left(\frac{2y+3}{2-y} + 2\right)^2 = \frac{1}{7}\left(\frac{2y+3+4-2y}{2-y}\right)^2 = \frac{1}{7}\left(\frac{7}{2-y}\right)^2 = \frac{7}{(2-y)^2} = \frac{dx}{dy}$$

11. $f(x) = \sqrt{3x+1}$; $d = 1$. Queremos encontrar o valor de c, para o qual $f(c)=1$.

$$\sqrt{3c+1} = 1; \quad 3c + 1 = 1; \quad c = 0$$

$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$. Assim, $f'(x) > 0$ se $x > -\frac{1}{3}$. Logo, há um intervalo fechado contendo o número 0, no qual f é contínua e crescente. Então, o Teorema 7.2.4 se aplica e

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

13. $f(x) = x^2 - 16$, $x \geq 0$; $d = 9$. Queremos encontrar o valor de $c \geq 0$ para o qual $f(c)=9$.

$$c^2 - 16 = 9; \quad c^2 = 25; \quad c = 5$$

$f'(x) = 2x$. Assim, $f'(x) > 0$ se $x > 0$. Então, há um intervalo fechado contendo 5, no qual f é contínua e crescente. Então, o Teorema 7.2.4 se aplica e

$$(f^{-1})'(9) = \frac{1}{f'(5)} = \frac{1}{10}$$

15. $f(x) = x^3 + 5$; $d = -3$. Queremos encontrar o valor de c, para o qual $f(c)=-3$.

$$c^3 + 5 = -3; \quad c^3 = -8; \quad c = -2$$

$f'(x) = 3x^2$. Então, $f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$. Logo, há um intervalo fechado contendo -3, no qual f é contínua e crescente. Assim, o Teorema 7.2.4 se aplica e

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(-2)} = \frac{1}{12}$$

17. $f(x) = 3x^5 + 2x^3$; $d = 5$. Procuramos o valor de c, para o qual $f(c)=5$.

$3c^5 + 2c^3 = 5$; $3c^5 + 2c^3 - 5 = 0$. Pela divisão sintética vemos que $c=1$.

$f'(x) = 15x^4 + 6x^2$. Assim, $f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$. Logo, há um intervalo fechado contendo 1, no qual f é contínua e crescente. Assim, o Teorema 7.2.4 se aplica e

$$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{21}$$

19. $f(x) = \frac{1}{2}\cos^2 x$; $0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$; $d = \frac{1}{4}$. Procuramos o valor de c em $[0, \frac{1}{2}\pi]$, para o qual $f(c) = \frac{1}{4}$.

$$\tfrac{1}{2}\cos^2 c = \tfrac{1}{4}; \quad \cos^2 c = \tfrac{1}{2}; \quad \cos c = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}; \quad c = \tfrac{1}{4}\pi$$

$f'(x) = \cos x(-\operatorname{sen} x) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$. Como $f'(x) < 0$ qdo x está em $(0, \frac{1}{2}\pi)$, há um intervalo fechado contendo $\frac{1}{4}\pi$, no qual f é contínua e decrescente. Pelo Teorema 7.2.4

$$(f^{-1})'(\tfrac{1}{4}) = \frac{1}{f'(\frac{1}{4}\pi)} = \frac{1}{-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

21. $f(x) = 2\operatorname{cotg} x$; $0 < x < \pi$; $d = 2$. Procuramos o valor de c em $(0, \pi)$ para o qual $f(c)=2$.

$$2\operatorname{cotg} c = 2; \quad \operatorname{cotg} c = 1; \quad c = \tfrac{1}{4}\pi$$

$f'(x) = -2\operatorname{cosec}^2 x$. Como $f'(x) < 0$ qdo. x está em $(0, \pi)$, há um intervalo fechado contendo $\frac{1}{4}\pi$, no qual f é contínua e decrescente. Então, o Teorema 7.2.4 se aplica e

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(\frac{1}{4}\pi)} = \frac{1}{-2(2)} = -\frac{1}{4}$$

23. $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{cosec} x$; $0 < x < \frac{1}{2}\pi$; $d = 1$. Procuramos o valor de c em $(0, \frac{1}{2}\pi)$ para o qual $f(c)=1$.

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{cosec} c = 1; \quad \operatorname{cosec} c = 2; \quad c = \tfrac{1}{6}\pi$$

$f'(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$. Como $f'(x) < 0$ qdo. x está em $(0, \frac{1}{2}\pi)$, há um intervalo fechado contendo $\frac{1}{6}\pi$, no qual f é contínua e decrescente. Logo, o Teorema 7.2.4 se aplica e

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(\frac{1}{6}\pi)} = \frac{1}{-\frac{1}{2}(2)\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

25. $f(x) = 2x^2 + 8x + 7$; $x \le -2$; $d = 1$. Queremos encontrar o valor de $c \le -2$, para o qual $f(c)=1$.

$$2c^2 + 8c + 7 = 1;\ 2c^2 + 8c + 6 = 0;\ c^2 + 4c + 3 = 0;\ (c+3)(c+1) = 0;\ c = -3$$

$f'(x) = 4x + 8$. Como $f'(x) < 0$ se $x < -2$, há um intervalo fechado contendo -3, no qual f é decrescente e contínua. Logo, o Teorema 7.2.4 se aplica e

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(-3)} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$$

27. $f(x) = \int_{-3}^{x} \sqrt{t+3}\, dt$, $x > -3$; $d = 18$. Procuramos o valor de $c > -3$, para o qual $f(c)=18$.

$\int_{-3}^{c} \sqrt{t+3}\, dt = \frac{2}{3}(t+3)^{3/2}\Big]_{-3}^{c} = \frac{2}{3}(c+3)^{3/2} = 18$; $(c+3)^{3/2} = 27$; $c + 3 = 27^{2/3} = 9$; $c = 6$

$f'(x) = \sqrt{x+3}$. Como $f'(x) > 0$ se $x > -3$, há um intervalo fechado contendo 6, no qual f é crescente e contínua. Portanto, o Teorema 7.2.4 se aplica e

$$(f^{-1})'(18) = \frac{1}{f'(6)} = \frac{1}{3}$$

29. $x^2 + y^2 = 9$

(a) $y^2 = 9 - x^2$; $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$. Seja $f_1(x) = \sqrt{9 - x^2}$ e $f_2(x) = -\sqrt{9 - x^2}$.

(b) Como nem f_1 nem f_2 é biunívoca, nenhuma delas tem uma inversa.

(c) $x^2 + y^2 = 9$. $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$. $2x\frac{dx}{dy} + 2y = 0$; $\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}$.

$\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dx}{dy}$ são recíprocos para todo (x,y), exceto qdo. $x=0$ ou $y=0$.

31. $xy = 4$

(a) $y = \frac{4}{x}$. Seja $f(x) = \frac{4}{x}$. O domínio de f é $\{x \mid x \neq 0\}$.

(b) Se x estiver em $(-\infty, 0)$, f será decrescente e $f(x) < 0$; se f estiver em $(0, +\infty)$ f será decrescente e $f(x) > 0$. Assim, f é biunívoca e tem inversa. Resolvendo $xy=4$ para x, temos $x = \frac{4}{y}$. Assim, $f^{-1}(y) = \frac{4}{y}$, logo, $f^{-1}(x) = \frac{4}{x}$. O domínio de f^{-1} é $\{x \mid x \neq 0\}$.

(c) $xy = 4$. $y + x\frac{dy}{dx} = 0$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$. $x + y\frac{dx}{dy} = 0$; $\frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y}$. $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dx}{dy}$ são recíprocos para todo xy, para o qual $xy=4$.

33. $2x^2 - 3xy + 1 = 0$

(a) $y = \frac{2x^2 + 1}{3x}$. Seja $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{3x}$. O domínio de f é $\{x \mid x \neq 0\}$.

(b) $f'(x) = \frac{1}{3}\frac{(4x)(x) - (2x^2 + 1)(1)}{x^2} = \frac{2x^2 - 1}{3x^2}$. Em $(0, \frac{1}{2}\sqrt{2})$, $f'(x) < 0$ e f é decrescente; em $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, +\infty)$, $f'(x) > 0$ e f é crescente. Assim, f não é biunívoca e não tem uma inversa.

(c) $2x^2 - 3xy + 1 = 0$. $4x - 3y - 3x\frac{dy}{dx} = 0$; $\frac{dy}{dx} = \frac{4x - 3y}{3x}$. $4x\frac{dx}{dy} - 3x - 3y\frac{dx}{dy} = 0$; $\frac{dx}{dy} = \frac{3x}{4x - 3y}$.

Como $x \neq 0$ se $2x^2 - 3xy + 1 = 0$, $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dx}{dy}$ são recíprocos, exceto qdo $4x=3y$.

35. $f(x) = x^3 + 3x - 1$; $f'(x) = 3x^2 + 3$

(b) a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto (1,3) é $f'(1)=6$.

(c) a inclinação da reta tangente ao gráfico de f^{-1} no ponto (3,1) é $(f^{-1})'(3)$.

Pelo Teorema 7.2.4, $(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{6}$.

37. $f(x) = \int_1^x \sqrt{16 - t^4}\, dt$; $-2 \leq x \leq 2$; $f'(x) = \sqrt{16 - t^4}$. Portanto, $f'(x)$ existe se x estiver em $[-2,2]$.
Logo, f é contínua em $[-2,2]$. Como $f'(x) > 0$ se $-2 < x < 2$, f é crescente em $[-2,2]$. Pelo Teorema 7.1.2, f é biunívoca em $[-2,2]$ e, portanto, f tem uma inversa. Como $\int_1^c \sqrt{16 - t^4}\, dt = 0$ qdo. c=1, segue do Teorema 7.2.4 que

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\sqrt{16 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

39. $f(x) = \int_1^{2x} \frac{dt}{1 + t^4}$. Seja $u = 2x$. Então, $f'(x) = \frac{d}{du}\int_1^u \frac{dt}{1 + t^4} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{1 + u^4}(2) = \frac{2}{1 + (2x)^4}$. Logo, f é contínua. Como $f'(x) > 0$, f é crescente. Pelo Teorema 7.1.2, f é biunívoca e, então, f tem uma inversa. Como $\int_1^{2u} \frac{dt}{1 + t^4} = 0$ qdo. $c = \frac{1}{2}$, segue do Teorema 7.2.4 que

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(\frac{1}{2})} = \frac{1 + (2 \cdot \frac{1}{2})^4}{2} = 1$$

41. Sabemos que f é contínua e decrescente em $[a,b]$ e queremos mostrar que f^{-1} é decrescente em $[f(b), f(a)]$. Seja $y_1 < y_2$ dois números em $[f(b), f(a)]$. Como f é contínua, f^{-1} é definida em $[f(b), f(a)]$; seja $x_1 = f^{-1}(y_1)$ e $x_2 = f^{-1}(y_2)$, de modo que $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. Se $x_1 = x_2$, então, $f(x_1) = f(x_2)$ de modo que $y_1 = y_2$, contradizendo a hipótese. Se $x_1 < x_2$, como f é decrescente, então, $f(x_1) > f(x_2)$ de modo que $y_1 > y_2$, contradizendo a hipótese. Assim, $x_1 > x_2$ de modo que $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$, o que prova que f^{-1} é decrescente.

43. A fórmula do Teorema 7.2.4 é $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$, onde $y = f(x)$ e $x = f^{-1}(y)$.

Como $y=f(x)$, então $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ e como $x = f^{-1}(y)$, então, $\frac{dx}{dy} = (f^{-1})'(y)$.

Substituindo na equação $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$, obtemos $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

Agora, seja $x = f^{-1}(y)$ e obtemos $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Finalmente, substituímos y e obtemos $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

EXERCÍCIOS 7.3 A Função Logarítmica Natural

Lembre-se: $\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$ requer $u > 0$.

1. $f'(x) = \frac{d}{dx}\ln(4+5x) = \frac{1}{4+5x}\frac{d}{dx}(4+5x) = \frac{5}{4+5x}$

3. $h'(x) = \frac{d}{dx}(\ln\sqrt{4+5x}) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln(4+5x)\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4+5x}\cdot 5 = \frac{5}{8+10x}$

5. $f'(t) = \frac{d}{dt}[\ln(3t+1)^2] = \frac{d}{dt}[2\ln(3t+1)] = 2\cdot\frac{1}{3t+1}\cdot 3 = \frac{6}{3t+1}$

7. $g'(t) = \frac{d}{dt}[\ln^2(3t+1)] = 2\ln(3t+1)\frac{d}{dt}[\ln(3t+1)] = 2\ln(3t+1)\cdot\frac{1}{3t+1}\cdot 3 = \frac{6\ln(3t+1)}{3t+1}$

9. $f'(x) = \frac{d}{dx}[\ln\sqrt[3]{4-x^2}] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}\ln(4-x^2)\right] = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4-x^2}(-2x) = -\frac{2x}{12-3x^2}$

11. $F'(y) = \frac{d}{dy}[\ln(\text{sen }5y)] = \frac{1}{\text{sen }5y}\frac{d}{dy}(\text{sen }5y) = 5\frac{\cos 5y}{\text{sen }5y} = 5\,\text{cotg}\,5y$

13. $f'(x) = \frac{d}{dx}[\cos(\ln x)] = -\text{sen}(\ln x)\frac{d}{dx}(\ln x) = -\text{sen}(\ln x)\cdot\frac{1}{x} = -\frac{\text{sen}(\ln x)}{x}$

15. $G'(x) = \frac{d}{dx}\ln(\sec 2x + \text{tg } 2x) = \frac{1}{\sec 2x + \text{tg } 2x}\frac{d}{dx}(\sec 2x + \text{tg } 2x)$

$= \frac{1}{\sec 2x + \text{tg } 2x}[\sec 2x \ \text{tg } 2x(2) + \sec^2 2x(2)] = \frac{2\sec 2x(\text{tg } 2x + \sec 2x)}{\sec 2x + \text{tg } 2x} = 2\sec 2x$

17. $f'(x) = \frac{d}{dx}\ln(\sqrt{\text{tg } x}) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}\ln(\text{tg } x)\right] = \frac{1}{2}\frac{1}{\text{tg } x}\frac{d}{dx}(\text{tg } x) = \frac{1}{2\ \text{tg } x}\cdot\sec^2 x$

$= \frac{\cos x}{2\,\text{sen } x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{2\,\text{sen } x\cos x} = \frac{1}{\text{sen } 2x} = \text{cosec}\,2x$

19. $f'(w) = \frac{d}{dw}\left(\ln\sqrt{\frac{3w+1}{2w-5}}\right) = \begin{cases} D_w\frac{1}{2}[\ln(3w+1) - \ln(2w-5)] & \text{se } w > 5/2 \\ D_w\frac{1}{2}[\ln-(3w+1) - \ln-(2w-5)] & \text{se } w < -1/3 \end{cases} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{3w+1} - \frac{2}{2w-5}\right)$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{3(2w-5) - 2(3w+1)}{(3w+1)(2w-5)}\right] = -\frac{17}{2(3w+1)(2w-5)}$

21. $h'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\ln x}\right) = \frac{1\cdot\ln x - \frac{1}{x}\cdot x}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

23. $g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\ln\sqrt[3]{\frac{x+1}{x^2+1}}\right) = \frac{1}{3}\frac{d}{dx}[\ln(x+1) - \ln(x^2+1)] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x+1} - \frac{2x}{x^2+1}\right] = \frac{1}{3}\cdot\frac{(x^2+1) - 2x(x+1)}{(x+1)(x^2+1)}$

$= \frac{1-2x-x^2}{3(x+1)(x^2+1)}$

25. $F'(x) = \frac{d}{dx}[\sqrt{x+1} - \ln(1+\sqrt{x+1})] = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{(1 \ \sqrt{x+1}) - 1}{2\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})} = \frac{1}{2(1+\sqrt{x+1})}$

27. $\ln xy + x + y = 2;\ \ln x + \ln y + x + y = 2;\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} + 1 + \frac{dy}{dx} = 0;\ y + x\frac{dy}{dx} + xy + xy\frac{dy}{dx} = 0$

$(xy + x)\frac{dy}{dx} = -xy - y;\ \frac{dy}{dx} = -\frac{xy+y}{xy+x}$

29. $x = \ln(x + y + 1)$; $1 = \frac{1}{x + y + 1}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)$; $x + y + 1 = 1 + \frac{dy}{dx}$; $\frac{dy}{dx} = x + y$

31. $x + \ln x^2y + 3y^2 = 2x^2 - 1$; $x + 2\ln x + \ln y + 3y^2 = 2x^2 - 1$; $1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} + 6y\frac{dy}{dx} = 4x$

$xy + 2y + x\frac{dy}{dx} + 6xy^2\frac{dy}{dx} = 4x^2y$; $(6xy^2 + x)\frac{dy}{dx} = 4x^2y - xy - 2y$; $\frac{dy}{dx} = \frac{4x^2y - xy - 2y}{6xy^2 + x}$

33. Veja a Figura 7.3.33. Os pontos marcados são $(\frac{1}{9}, -2\ln 3)$, $(\frac{1}{3}, -\ln 3)$, $(1, 0)$, $(3, \ln 3)$, e $(9, 2\ln 3)$. Em cada um desses pontos uma parte da reta tangente é traçada com as respectivas inclinações, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$.

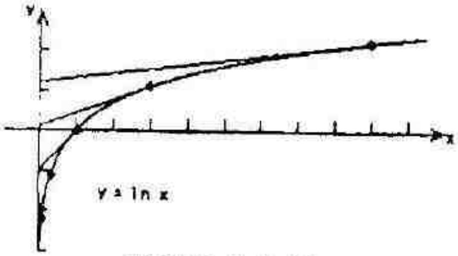


FIGURA 7.3.33

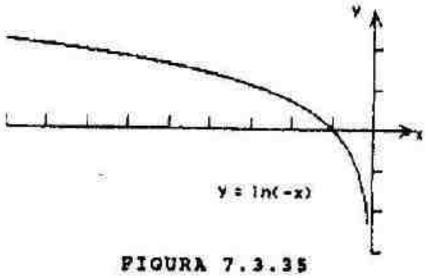


FIGURA 7.3.35

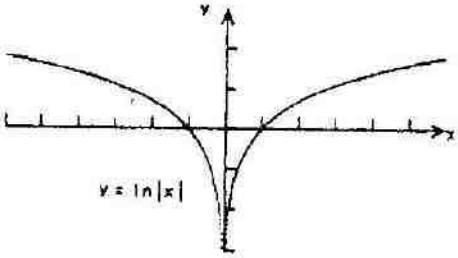


FIGURA 7.3.37

35. Veja a Figura 7.3.35

37. Veja a Figura 7.3.37

39. Seja $f(x) = x - \ln x$; $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x - 1}{x}$; $f''(x) = \frac{1}{x^2}$. Se $0 < x < 1$ então $f'(x) < 0$ e f é decrescente; se $x > 1$ então $f'(x) > 0$ e f é crescente. Logo, f tem um valor mínimo absoluto em $x = 1$. O gráfico de f é côncavo para cima. Veja a Figura 7.3.39.

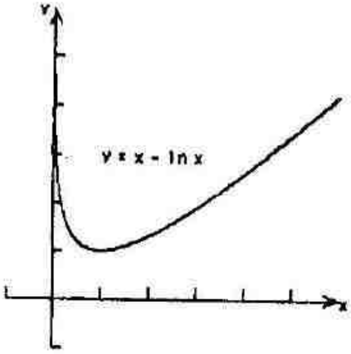


FIGURA 7.3.39

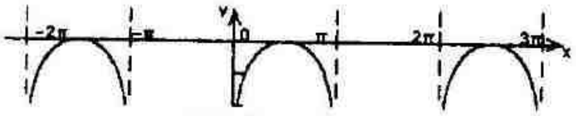


FIGURA 7.3.41

41. Seja $f(x) = \ln \text{sen } x$; $f'(x) = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$; $f''(x) = -\frac{1}{\text{sen}^2 x}$

Seja n um inteiro qualquer. Se x estiver em $(2n\pi, 2n\pi + \frac{1}{2}\pi)$, $f'(x) > 0$ e f será crescente; se x estiver em $(2n\pi + \frac{1}{2}\pi, 2n\pi + \pi)$, $f'(x) < 0$ e f será decrescente. Assim, f tem um valor máximo absoluto de 0 em $x = 2n\pi + \frac{1}{2}\pi$. O gráfico de f terá uma assintota vertical em $x = n\pi$. Se x estiver em $[2n\pi + \pi, 2(n+1)\pi]$, $\text{sen } x \leq 0$ e f não será definida. O gráfico é côncavo para baixo. Veja a Figura 7.3.41.

43. $y = \ln x;\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

No ponto (x_1, y_1) sobre a curva, a inclinação da reta normal é $-x_1$. A reta dada tem uma equação $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$; assim, sua inclinação é $-\frac{1}{2}$. Como as duas retas são paralelas,

$$-x_1 = -\tfrac{1}{2},\quad x_1 = \tfrac{1}{2}$$

Portanto, a reta normal requerida passa pelo ponto $(\frac{1}{2}, -\ln 2)$ sobre a curva e tem uma inclinação de $-\frac{1}{2}$. Sua equação é

$$y + \ln 2 = -\tfrac{1}{2}(x - \tfrac{1}{2});\quad y + \ln 2 = -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4};\quad 2x + 4y + 4\ln 2 - 1 = 0$$

45. $y = \ln(4x^2 - 3)^5 = 5\ln(4x^2 - 3);\quad y' = \frac{40x}{4x^2 - 3}$

Qdo $x = 1$, $y = 0$ e $y' = 40$. Uma equação da tangente nesse ponto é

$$y - 0 = 40(x - 1);\quad 40x - y = 40$$

47. Seja a medida da velocidade escalar do sinal $v(x)$. Então, para algum $k > 0$,

$$v(x) = kx^2 \ln\frac{1}{x} = -kx^2 \ln x;\quad v'(x) = -k\left(2x\ln x + x^2\cdot\frac{1}{x}\right) = -2kx\left(\ln x + \frac{1}{2}\right)$$

Qdo $\ln x < -\frac{1}{2}$, $v'(x) > 0$ e qdo $\ln x > -\frac{1}{2}$, $v'(x) < 0$; logo, v tem um valor máximo absoluto qdo $\ln x = -\frac{1}{2}$.

49. Se S for o faturamento total semanal das vendas qdo a despesa semanal com propaganda for x, então

$$\text{(a)}\quad S = 4{,}000\ln x;\quad \left.\frac{dS}{dx}\right]_{x=800} = \left.\frac{4{,}000}{x}\right]_{x=800} = 5$$

Portanto, o faturamento semanal das vendas varia a uma taxa de \$5 para \$1 na verba semanal destinada a propaganda, qdo a verba de propaganda for \$800.

(b) Qdo a verba para propaganda semanal aumentar para \$150, um aumento aproximado no faturamento semanal total gerado pelas vendas será $5\cdot 150 = \$750$. O aumento real será

$$400\ln 950 - 4{,}000\ln 800 \approx \$686$$

51. Seja $f(x) = x - 1 - \ln x$ e $g(x) = 1 - \ln x - \frac{1}{x}$. Então $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$. Como $f'(x) < 0$ em $(0, 1)$ e $f'(x) > 0$ em $(1, +\infty)$, f tem um valor mínimo absoluto qdo $x = 1$, e $f(1) = 0$. Logo,

$$\text{se } x \neq 1,\quad x - 1 - \ln x > 0;\quad \ln x < x - 1 \qquad (1)$$

Tbém, $g'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$. Como $g'(x) > 0$ em $(0,1)$ e $g'(x) < 0$ em $(1, +\infty)$, g tem um valor máximo absoluto em $x = 1$ e $g(1) = 0$. Logo,

$$\text{se } x \neq 1,\quad 1 - \ln x - \frac{1}{x} > 0;\quad 1 - \frac{1}{x} < \ln x \qquad (2)$$

Combinando (1) e (2), temos $x > 0$, $x \neq 1$

$$1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1 \qquad (3)$$

53. Substituindo x+1 para x na fórmula (3) acima e dividindo todos os termos por x, temos

$$1 - \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) < x;\quad \frac{1}{x+1} < \frac{\ln(x+1)}{x} < 1$$

Agora, $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x+1} = 1$, e $\lim_{x\to 0} 1 = 1$; então, pelo teorema do "sanduíche" $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$. Ou então seja $f(x) = \ln(1+x)$; $f(0) = 0$. Pelo teorema do valor médio há um número c entre 0 e x, tal que $\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) = \frac{1}{1+c}$. Então, $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{c\to 0} \frac{1}{1+c} = 1$.

55. Se $0 < t < 1$ então $\frac{1}{t^{3/2}} > \frac{1}{t} > 0$ Pelo Teorema 5.6.8, se $0 < x < 1$ então

$$\int_x^1 t^{-3/2}dt > \int_x^1 \frac{1}{t}dt > 0;\quad -2t^{-1/2}\Big]_x^1 > \ln|t|\Big]_x^1 > 0;\quad 2x^{-1/2} - 2 > -\ln x > 0;\quad 2x^{1/2} - 2x > -x\ln x > 0$$

Como $\lim_{x\to 0^+} 2x^{1/2} - 2x = 0$, segue do teorema do "sanduíche" que $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$.

EXERCÍCIOS 7.4 Diferenciação Logarítmica e Integrais que Resultam na Função Logarítmica

1. $y = \ln|x^3 + 1|$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^3+1}\frac{d}{dx}(x^3+1) = \frac{3x^2}{x^3+1}$

3. $y = \ln|\cos 3x|$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos 3x}\frac{d}{dx}(\cos 3x) = -\frac{3\,\text{sen}\,3x}{\cos 3x} = -3\ \text{tg}\,3x$

5. $y = \ln|\text{tg}\,4x + \sec 4x|$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{tg}\,4x + \sec 4x}\frac{d}{dx}(\text{tg}\,4x + \sec 4x) = \frac{4\sec^2 4x + 4\sec 4x\,\text{tg}\,4x}{\text{tg}\,4x + \sec 4x}$

$$= \frac{4\sec 4x(\sec 4x + \text{tg}\,4x)}{\text{tg}\,4x + \sec 4x} = 4\sec 4x$$

7. $y = \ln\left|\frac{3x}{x^2+4}\right| = \ln 3 + \ln|x| - \ln(x^2+4)$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+4} = \frac{(x^2+4) - x(2x)}{x(x^2+4)} = \frac{4-x^2}{x(x^2+4)}$

9. $y = x^2(x^2-1)^3(x+1)^4 = x^2(x-1)^3(x+1)^7$; $|y| = |x|^2|x-1|^3|x+1|^7$

$$\ln|y| = 2\ln|x| + 3\ln|x-1| + 7\ln|x+1|;\quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{7}{x+1}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{2(x-1)(x+1) + 3x(x+1) + 7x(x-1)}{x(x-1)(x+1)}\right] = x^2(x-1)^3(x+1)^7\cdot\frac{12x^2-4x-2}{x(x-1)(x+1)}$$

$$= 2x(x-1)^2(x+1)^6(6x^2-2x-1)$$

11. $y = \frac{x^2(x-1)^2(x+2)^3}{(x-4)^5}$; $|y| = \frac{|x|^2|x-1|^2|x+2|^3}{|x-4|^5}$

$$\ln|y| = 2\ln|x| + 2\ln|x-1| + 3\ln|x+2| - 5\ln|x-4|;\quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2} - \frac{5}{x-4}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2} - \frac{5}{x-4}\right)$$

$$= \frac{x^2(x-1)^2(x+2)^3}{(x-4)^5}\cdot\frac{2(x-1)(x+2)(x-4) + 2x(x+2)(x-4) + 3x(x-1)(x-4) - 5x(x-1)(x+2)}{x(x-1)(x+2)(x-4)}$$

$$= \frac{x(x-1)(x+2)^2}{(x-4)^6}(2x^3 - 30x^2 - 6x + 16)$$

13. $y = \dfrac{x^3 + 2x}{\sqrt[5]{x^7 + 1}}$; $|y| = \dfrac{|x^3 + 2x|}{|x^7 + 1|^{1/5}}$; $\ln|y| = \ln|x^3 + 2x| - \dfrac{1}{5}\ln|x^7 + 1|$; $\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x} - \dfrac{7x^6}{5(x^7 + 1)}$

$$\frac{dy}{dx} = y\cdot\frac{5(3x^2 + 2)(x^7 + 1) - 7x^6(x^3 + 2x)}{5(x^3 + 2x)(x^7 + 1)} = \frac{x^3 + 2x}{(x^7 + 1)^{1/5}}\cdot\frac{15x^9 + 10x^7 + 15x^2 + 10 - 7x^9 - 14x^7}{5(x^3 + 2x)(x^7 + 1)}$$

$$= \frac{8x^9 - 4x^7 + 15x^2 + 10}{5(x^7 + 1)^{6/5}}$$

15. $\displaystyle\int\frac{dx}{3 - 2x} = -\frac{1}{2}\int\frac{-2\,dx}{3 - 2x} = -\frac{1}{2}\ln|3 - 2x| + C$

17. $\displaystyle\int\frac{3x}{x^2 + 4}\,dx = \frac{3}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2 + 4} = \frac{3}{2}\ln(x^2 + 4) + C$

19. $\displaystyle\int\frac{3x^2}{5x^3 - 1}\,dx = \frac{1}{5}\int\frac{15x^2dx}{5x^3 - 1} = \frac{1}{5}\ln|5x^3 - 1| + C$

21. $\displaystyle\int\frac{\cos t}{1 + 2\,\text{sen}\,t}\,dt = \frac{1}{2}\int\frac{2\cos t\,dt}{1 + 2\,\text{sen}\,t} = \frac{1}{2}\ln|1 + 2\,\text{sen}\,t| + C$

23. $\displaystyle\int(\text{cotg}\,5x + \text{cosec}\,5x)\,dx = \frac{1}{5}\ln|\text{sen}\,5x| + \frac{1}{5}\ln|\text{cosec}\,5x - \text{cotg}\,5x| + C$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\text{sen}\,5x\left(\frac{1}{\text{sen}\,5x} - \frac{\cos 5x}{\text{sen}\,5x}\right)\right| + C = \frac{1}{5}\ln(1 - \cos 5x) + C$$

25. $\displaystyle\int\frac{2 - 3\,\text{sen}\,2x}{\cos 2x}\,dx = \int(2\sec 2x - 3\,\text{tg}\,2x)\,dx$

$$= \ln|\sec 2x + \text{tg}\,2x| - \tfrac{3}{2}\ln|\sec 2x| + C = \ln(1 + \text{sen}\,2x) + \tfrac{1}{2}\ln|\cos 2x| + C$$

27. $\displaystyle\int\frac{2x^3}{x^2 - 4}\,dx = \int\left(2x + 4\cdot\frac{2x}{x^2 - 4}\right)dx = x^2 + 4\ln|x^2 - 4| + C$

29. Seja $u = \ln x$; então, $du = \dfrac{dx}{x}$; $\displaystyle\int\frac{dx}{x\ln x} = \int\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{dx}{x} = \int\frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C$

31. Seja $u = \ln 3x$; então, $du = \dfrac{dx}{x}$; $\displaystyle\int\frac{\ln^2 3x}{x}\,dx = \int(\ln 3x)^2\cdot\frac{dx}{x} = \int u^2du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\ln^3 3x + C$

33. Seja $u = \ln x$; então, $du = \dfrac{dx}{x}$; $\displaystyle\int\frac{2\ln x + 1}{x[(\ln x)^2 + \ln x]}\,dx = \int\frac{2\ln x + 1}{(\ln x)^2 + \ln x}\cdot\frac{dx}{x} = \int\frac{2u + 1}{u^2 + u}\,du$

$$= \ln|u^2 + u| + C = \ln|(\ln x)^2 + \ln x| + C$$

35. Seja $u = \ln x$; então, $du = \dfrac{dx}{x}$; $\displaystyle\int\frac{\text{tg}(\ln x)}{x}\,dx = \int\text{tg}\,u\,du = \ln|\sec u| + C = \ln|\sec(\ln x)| + C$

37. $\displaystyle\int_3^5\frac{2x}{x^2 - 5}\,dx = \ln|x^2 - 5|\Big]_3^5 = \ln 20 - \ln 4 = \ln\frac{20}{4} = \ln 5$

39. $\displaystyle\int_1^3\frac{2t + 3}{t + 1}\,dt = \int_1^3\left(2 + \frac{1}{t + 1}\right)dt = 2t + \ln|t + 1|\Big]_1^3 = (6 + \ln 4) - (2 + \ln 2) = 4 + \ln\frac{4}{2} = 4 + \ln 2$

41. $\int_0^{\pi/6}(\operatorname{tg} 2x + \sec 2x)\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln|\sec 2x| + \frac{1}{2}\ln|\sec 2x + \operatorname{tg} 2x|\right]_0^{\pi/6}$

$= \frac{1}{2}[\ln 2 + \ln(2+\sqrt{3})] = \frac{1}{2}\ln(4 + 2\sqrt{3}) = \ln(1+\sqrt{3})$

43. Seja $u = \ln x$; então, $du = \frac{dx}{x}$; $\int_2^4 \frac{dx}{x\ln^2 x} = \int_{\ln 2}^{\ln 4} u^{-2}\,du = -\frac{1}{u}\Big]_{\ln 2}^{\ln 4} = -\frac{1}{\ln 4} + \frac{1}{\ln 2} = -\frac{1}{\ln 4} + \frac{2}{\ln 4} = \frac{1}{\ln 4}$

45. (a) $\int \operatorname{cotg} u\,du = \int \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

(b) Seja $v = \operatorname{cosec} u - \operatorname{cotg} u$; então, $dv = (-\operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u \operatorname{cosec}^2 u)\,du$; $\int \operatorname{cosec} u\,du = \int \frac{\operatorname{cosec} u(\operatorname{cosec} u - \operatorname{cotg} u)}{\operatorname{cosec} u - \operatorname{cotg} u}\,du$

$= \int \frac{dv}{v} = \ln|v| + C = \ln|\operatorname{cosec} u - \operatorname{cotg} u| + C$

(c) $\int \operatorname{cosec} u\,du = \int \sec(u - \frac{1}{2}\pi)\,du = \ln|\sec(u - \frac{1}{2}\pi) + \operatorname{tg}(u - \frac{1}{2}\pi)| + C = \ln|\operatorname{cosec} u - \operatorname{cotg} u| + C$

47. $f(x) = \frac{1}{x}$. O valor médio da f em $[1,5]$ é $\frac{1}{5-1}\int_1^5 \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{4}\ln 5 \approx 0{,}402$.

49. Seja P N/m^2 a pressão qdo o volume é Vm^3. Então, pela lei de Boyle, $PV=C$.

Como $P=2.000$ qdo $V=4$, então, $C=8.000$. Portanto, $P = \frac{8000}{V}$.

O valor médio de P qdo V aumenta de 4 para 8 é

$$\frac{1}{8-4}\int_4^8 \frac{8.000}{V}\,dV = 2.000\ln|V|\Big]_4^8 = 2.000(\ln 8 - \ln 4) = 2.000\ln\frac{8}{4} = 2.000\ln 2 \approx 1.386$$

Portanto, a pressão média é 1386 N/m^2.

51. A unidades quadradas é a área limitada por $y = 2/(x-2)$, pelo eixo x, $x=4$ e $x=5$. Então,

$$A = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{\xi_i - 3}\Delta_i x = \int_4^5 \frac{2}{x-3}\,dx = 2\ln|x-3|\Big]_4^5 = 2\ln 2 - 2\ln 1 = 2\ln 2 = \ln 4 \approx 1{,}386$$

53. V unidades cúbicas é o volume qdo $y = 1 + 2/\sqrt{x}$ gira em torno do eixo x. Um elemento do volume é um disco circular centrado no eixo x, $x \in [1,4]$, de raio $1 + 2/\sqrt{\xi_i}$.

$$V = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\pi\left(1 + \frac{2}{\xi_i^{1/2}}\right)^2\Delta_i x = \pi\int\left(1 + \frac{2}{x^{1/2}}\right)dx = \pi\int_1^4\left(1 + \frac{4}{x^{1/2}} + \frac{4}{x}\right)dx = \pi\left[x + 8x^{1/2} + 4\ln|x|\right]_1^4$$

$$= \pi[(4 + 16 + 4\ln 4) - (1 + 8 + 4\ln 1)] = \pi(11 + 8\ln 2) \approx 51{,}978$$

55. $y = \ln \operatorname{cosec} x$; $y' = -\operatorname{cotg} x$. Seja L unidades o comprimento do arco de $x = \frac{1}{6}\pi$ a $x = \frac{1}{2}\pi$.

$$L = \int_{\pi/6}^{\pi/2}\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 x}\,dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2}\operatorname{cosec} x\,dx = \ln(\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x)\Big]_{\pi/6}^{\pi/2} = \ln 1 - \ln(2-\sqrt{3}) = \ln(2+\sqrt{3}) \approx 1{,}317$$

EXERCÍCIOS 7.5 A Função Exponencial Natural

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}e^{5x} = e^{5x}\frac{d}{dx}(5x) = 5e^{5x}$

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}e^{-3x^2} = e^{-3x^2}\frac{d}{dx}(-3x^2) = -6x\,e^{-3x^2}$

5. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}e^{\cos x} = e^{\cos x}\frac{d}{dx}(\cos x) = -e^{\cos x}\,\mathrm{sen}\,x$

7. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x \mathrm{sen}\, e^x) = e^x\frac{d}{dx}(\mathrm{sen}\, e^x) + \frac{d}{dx}(e^x)\cdot \mathrm{sen}\, e^x = e^x \cos x(e^x) + e^x \mathrm{sen}\, e^x = e^{2x}\cos e^x + e^x \mathrm{sen}\, e^x$

9. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\mathrm{tg}\; e^{\sqrt{x}}\right) = \sec^2 e^{\sqrt{x}}\frac{d}{dx}e^{\sqrt{x}} = \sec^2 e^{\sqrt{x}}\cdot e^{\sqrt{x}}\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{e^{\sqrt{x}}\sec^2 e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

11. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right) = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$

$= \frac{(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$

13. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^5 e^{-3\ln x}) = \frac{d}{dx}(x^5 e^{\ln x^{-3}}) = \frac{d}{dx}(x^5\cdot x^{-3}) = \frac{d}{dx}x^2 = 2x$

15. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sec e^{2x} + e^{2\sec x}) = \sec e^{2x}\;\mathrm{tg}\; e^{2x}\frac{d}{dx}(e^{2x}) + e^{2\sec x}\frac{d}{dx}(2\sec x)$

$= 2e^{2x}\sec e^{2x}\;\mathrm{tg}\; e^{2x} + 2e^{2\sec x}\sec x\;\mathrm{tg}\; x$

17. $e^x + e^y = e^x e^y$; $e^x + e^y\frac{dy}{dx} = e^x e^y\frac{dy}{dx} + e^x e^y$; $(e^y - e^x e^y)\frac{dy}{dx} = e^x e^y - e^x$; $-e^{-x}\frac{dy}{dx} = e^y$; $\frac{dy}{dx} = -e^{y-x}$

19. $y^2 e^{2x} + xy^3 = 1$; $y^2 e^{2x}(2) + 2y\frac{dy}{dx}e^{2x} + x\left(3y^2\frac{dy}{dx}\right) + y^3 = 0$; $(2e^{2x} + 3xy)\frac{dy}{dx} = -y^2 - 2ye^{2x}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2 + 2ye^{2x}}{2e^{2x} + 3xy}$

21. $\int e^{2-5x}dx = -\frac{1}{5}\int e^{2-5x}(-5\,dx) = -\frac{1}{5}e^{2-5x} + C$

23. $\int \frac{1 + e^{2x}}{e^x}\,dx = \int\left(e^{-x} + e^x\right)dx = -e^{-x} + e^x + C$

25. Seja $u = 1 - 2e^{3x}$; então, $du = -6e^{3x}dx$.

$\int\frac{e^{3x}}{(1 - 2e^{3x})^2}\,dx = -\frac{1}{6}\int(1 - 2e^{3x})^{-2}(-6e^{3x}dx) = -\frac{1}{6}\int u^{-2}du = -\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{u}\right) + C = \frac{1}{6(1 - 2e^{3x})} + C$

27. $\int\frac{e^{2x}}{e^x + 3}\,dx = \int\left(e^x - 3\frac{e^x}{e^x + 3}\right)dx = e^x - 3\ln(e^x + 3) + C$

29. $\int_0^1 e^2 dx = e^2\int_0^1 dx = e^2 x\Big]_0^1 = e^2$

31. $\int_e^{e^3}\frac{dx}{x} = \ln|x|\Big]_e^{e^3} = \ln e^3 - \ln e = 3 - 1 = 2$

33. Seja $u = \ln x$; $du = \frac{dx}{x}$. $\int_e^{e^2}\frac{dx}{x(\ln x)^2} = \int_e^{e^2}(\ln x)^{-2}\frac{dx}{x} = \int_1^2 u^{-2}du = -\frac{1}{u}\Big]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

35. $\int_0^2 x e^{4-x^2} dx = -\frac{1}{2}\int_0^2 e^{4-x^2}(-2x\,dx) = -\frac{1}{2}e^{4-x^2}\Big]_0^2 = -\frac{1}{2}(e^0 - e^4) = \frac{1}{2}(e^4 - 1)$

37. Usando tabelas: $2^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln 2} \approx e^{1.414(0.6931)} \approx e^{0,9800} \approx 2,6645 \approx 2,66$

Usando a calculadora TI-30: 2 [y^x] 2 [$\sqrt{x}$] = 2,6651 ≈ 2,67

39. Usando tabelas:

$(\sqrt{2})^e = 2^{e/2} = e^{(e/2)\ln 2} \approx e^{(1,3591)(0,6931)} \approx e^{0,9420} \approx 2,5651 \approx 2,5$

Usando a calculadora TI-30: 2 [$\sqrt{x}$] [y^x] 1 [INV] [ln x] = 2,5653 ≈ 2,57

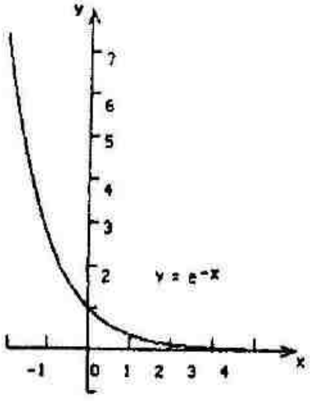


FIGURA 7.5.41

41. Veja a Figura 7.5.41.

43. A unidades quadradas é a área da região limitada por $y = e^x$, pelos eixos e $x=2$.

$$A = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} e^{\xi_i}\Delta_i x = \int_0^2 e^x dx = e^x\Big]_0^2 = e^2 - e^0 = e^2 - 1$$

45. $y = e^{-x}$; $\frac{dy}{dx} = -e^{-x}$. Portanto, a inclinação da reta tangente à curva $y = e^{-x}$ no ponto (x_1, y_1) é $-e^{-x_1}$. A inclinação da reta $y=2x-5$ é 2. Portanto, a inclinação da reta perpendicular a essa reta é $-\frac{1}{2}$. Logo, temos a equação

$$-e^{-x_1} = -\tfrac{1}{2};\quad e^{-x_1} = \tfrac{1}{2};\quad -x_1 = \ln\tfrac{1}{2};\quad x_1 = \ln 2$$

Qdo $x_1 = \ln 2$, $y_1 = e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}$. Portanto, a reta requerida contém o ponto $(\ln 2, \frac{1}{2})$ e sua inclinação é $-\frac{1}{2}$. Uma equação dessa reta é

$$y - \tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{2}(x - \ln 2);\quad y = -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\ln 2$$

47. Um corpo está se movendo ao longo de uma reta e em t s sua velocidade é v m/s, onde

$$v = e^3 - e^{2t}$$

Tomando $v=0$ obtemos $e^3 = e^{2t}$; $t = \frac{3}{2}$. Qdo $t > \frac{3}{2}$, $v < 0$. Se $s(t)$m for a distância percorrida pela partícula em t s, então, $\frac{ds}{dt} = v$ e a distância percorrida qdo $0 \le t \le \frac{3}{2}$ é

$$s\left(\frac{3}{2}\right) - s(0) = \int_0^{3/2}\frac{ds}{dt}dt = \int_0^{3/2}(e^3 - e^{2t})dt = e^3 t - \frac{1}{2}e^{2t}\Big]_0^{3/2} = \left(\frac{3}{2}e^3 - \frac{1}{2}e^3\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = e^3 + \frac{1}{2} \approx 20,586$$

49. Se p N/m² for a pressão atmosférica a uma altitude de h m acima do nível do mar, então

$$p = 101.314e^{-0,0000096h};\quad \frac{dp}{dt}\ 101.314(-0,0000096)\,e^{-0,000096h}\frac{dh}{dt}$$

Qdo $h = 1.524$ e $\frac{dh}{dt} = 49$, obtemos $\frac{dp}{dt} = 101.314(-0,0000096)\,e^{-0.015}(49) \approx -46,97$.

Logo, a pressão atmosférica está decrescendo à taxa de 46.97 N/m²/s.

51. Se ℓ m for o comprimento da barra de ferro qdo t graus for sua temperatura, então

$$\ell = 18\ e^{0{,}000005t}\ ;\ d\ell = 18(0{,}000005)\ e^{0{,}000005t}\,dt.$$

Qdo $t = 0$ e $dt = \Delta t = 10$, então, $d\ell = 0{,}00009\,e^0(10) = 0{,}0009$. Portanto, $\Delta\ell \approx 0{,}0009$.

53. Escolha o eixo positivo x para baixo com a origem 1 m acima da borda do tanque. Seja W J o trabalho realizado p/ que toda a água seja bombeada até um pto 1 m acima da borda do tanque. Um elemento do volume é um disco circular centrado no eixo x, $x \in [1, 4]$, de raio $\sqrt{e^{-2\xi_i}/\xi_i}$ m, elevado de ξ_i m. Então,

$$W = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} w\pi\left(\frac{e^{-2\xi_i}}{\xi_i}\right)\xi_i\,\Delta_i x = w\pi\int_1^4 e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}w\pi e^{-2x}\Big]_1^4 = -\frac{1}{2}w\pi(e^{-8} - e^{-2}) = \frac{1}{2}w\pi(e^{-2} - e^{-8})$$

55. (a) $\lim\limits_{z\to+\infty^+}\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = \lim\limits_{h\to 0^+}(1 + h)^{1/h} = e$ e $\lim\limits_{z\to-\infty^-}\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = \lim\limits_{h\to 0^-}(1 + h)^{1/h}$.

(b) $\frac{1}{2}(1{,}001^{10000} + 0{,}999^{-10000}) = \frac{1}{2}(2{,}7181459 + 2{,}7184177) = 2{,}7182818$

57. Seja $N > 0$ qquer número e seja $M = \ln N$. Como a função exponencial é crescente

$$\text{se } x \ge M \text{ então, } e^x > e^M = e^{\ln N}$$

$$\Longleftrightarrow \text{ se } x \ge M \text{ então, } e^x > N$$

Isto prova que, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

59. Seja $x = \ln u$. Então, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = \lim\limits_{z\to+\infty}\frac{\ln u}{u} = 0$ pelo Exercício 7.4.56.

61. $f(x) = xe^{-x}$; $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x)$; $f''(x) = -e^{-x}(1 - x) - e^{-x} = e^{-x}(x - 2)$

Seja $f'(x) = 0$ e obtemos $x=1$. Seja $f''(x)=0$ e obtemos $x=2$.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão: f; gráfico
$x < 1$		+	−	crescente; côncavo para baixo
$x = 1$	$e^{-1} \approx 0{,}37$	0	−	máximo relativo; côncavo para baixo
$1 < x < 2$		−	−	decrescente; côncavo para baixo
$x = 2$	$2e^{-2} \approx 0{,}27$	$-e^{-2} \approx -0{,}14$	0	decrescente; ponto de inflexão
$2 < x$		−	+	decrescente; côncavo para cima

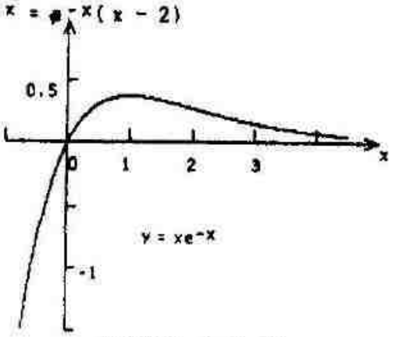


FIGURA 7.5.61

63. Queremos resolver $\frac{dy}{dx} = y$. Método 1. Veja a prova do Teorema 7.7.1. Método 2. Temos $\frac{dy}{dx}e^{-x} = ye^{-x}$. Seja $g(x) = ye^{-x}$. Então, $g'(x) = \frac{dy}{dx}e^{-x} - ye^{-x} = 0$ de modo que $g(x)$ seja uma constante. Assim, $ye^{-x} = k$; $y = ke^x$.

EXERCÍCIOS 7.6 Outras Funções Exponenciais e Logarítmicas

1. $f'(x) = \frac{d}{dx} 3^{5x} = 3^{5x}(\ln 3)\frac{d}{dx}(5x) = (5 \ln 3)3^{5x}$

3. $f'(t) = \frac{d}{dt} 4^{3t^2} = 4^{3t^2}(\ln 4)\frac{d}{dt}(3t^2) = 4^{3t^2}(\ln 4)6t$

5. $f'(x) = \frac{d}{dx} 4^{\text{sen}\,2x} = 4^{\text{sen}\,2x}(\ln 4)\frac{d}{dx}(\text{sen}\,2x) = 4^{\text{sen}\,2x}(2\ln 4)\cos 2x$

7. $g'(x) = \frac{d}{dx}(2^{5x}3^{4x^2}) = \left(\frac{d}{dx}2^{5x}\right)3^{4x^2} + 2^{5x}\left(\frac{d}{dx}3^{4x^2}\right) = 2^{5x}3^{4x^2}(\ln 2)5 + 2^{5x}3^{4x^2}(\ln 3)(8x)$

$= 2^{5x}3^{4x^2}(5\ln 2 + 8x\ln 3)$

9. $h'(x) = \frac{d}{dx}\frac{\log_{10}x}{x} = \frac{\frac{d}{dx}(\log_{10}x)\cdot x - (\log_{10}x)1}{x^2} = \frac{\frac{\log_{10}e}{x}\cdot x - \log_{10}x}{x^2} = \frac{\log_{10}e - \log_{10}x}{x^2} = \frac{1}{x^2}\log_{10}\frac{e}{x}$

11. $f'(x) = \frac{d}{dx}\sqrt{\log_a x} = \frac{d}{dx}(\log_a x)^{1/2} = \frac{1}{2}(\log_a x)^{-1/2}\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{\log_a e}{2x\sqrt{\log_a x}}$

13. $\frac{d}{dx}\log_{10}[\log_{10}(x+1)] = \frac{\log_{10}e}{\log_{10}(x+1)}\frac{d}{dx}[\log_{10}(x+1)] = \frac{\log_{10}e}{\log_{10}(x+1)}\cdot\frac{\log_{10}e}{x+1} = \frac{(\log_{10}e)^2}{(x+1)\log_{10}(x+1)}$

15. $f'(t) = \frac{d}{dt}\sec 3^{t^2} = \sec 3^{t^2}\,\text{tg}\,3^{t^2}\frac{d}{dt}(3^{t^2}) = -3^{t^2}\sec 3^{t^2}\,\text{tg}\,3^{t^2}(2t\ln 3)$

17. Seja $y = x^{\sqrt{x}}$, $x > 0$. $\ln y = \sqrt{x}\ln x$; $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} + \ln x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}\right] = x^{\sqrt{x}}\left[\frac{2+\ln x}{2x^{1/2}}\right] = \frac{1}{2}x^{\sqrt{x}-(1/2)}(2+\ln x)$

19. Seja $y = z^{\cos z}$, $z > 0$. $\ln y = \cos z\ln z$; $\frac{1}{y}\frac{dy}{dz} = \cos z\cdot\frac{1}{z} - \text{sen}\,z\ln z$

$g'(z) = \frac{dy}{dz} = y(z^{-1}\cos z - \text{sen}\,z\ln z) = z^{\cos z}(z^{-1}\cos z - \text{sen}\,z\ln z) = z^{\cos z-1}(\cos z - z\,\text{sen}\,z\ln z)$

21. Seja $y = (\text{sen}\,x)^{\text{tg}\,x}$, $\text{sen}\,x > 0$. $\ln y = \text{tg}\,x\ln(\text{sen}\,x)$; $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \text{tg}\,x\cdot\frac{1}{\text{sen}\,x}\cdot\cos x + \sec^2 x\ln(\text{sen}\,x)$

$h'(x) = \frac{dy}{dx} = y[1 + \sec^2 x\ln(\text{sen}\,x)] = (\text{sen}\,x)^{\text{tg}\,x}[1 + \sec^2 x\ln(\text{sen}\,x)]$

23. Seja $y = x^{e^x}$, $x > 0$. $\ln y = e^x\ln x$; $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = e^x\ln x + e^x\cdot\frac{1}{x}$

$f'(x) = \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{xe^x\ln x + e^x}{x}\right] = x^{e^x}e^x\left[\frac{x\ln x + 1}{x}\right] = x^{e^x-1}e^x(x\ln x + 1)$

25. $\int 3^{2x}dx = \frac{1}{2}\int 3^{2x}(2\,dx) = \frac{3^{2x}}{2\ln 3} + C$

27. $\int a^t e^t dt = \int (ae)^t dt = \frac{(ae)^t}{\ln ae} + C = \frac{a^t e^t}{\ln a + 1} + C$

29. $\int x^2 10^{x^3}dx = \frac{1}{3}\int 10^{x^3}(3x^2dx) = \frac{10^{x^3}}{3\ln 10} + C$

31. $\int e^y 2^{e^y}3^{e^y}dy = \int 6^{e^y}(e^y dy) = \frac{6^{e^y}}{\ln 6} + C$

33. $\log_5 e = \frac{1}{\ln 5} \approx \frac{1}{1,06094} = 0,621$

35. Seja $y = f(x) = \log_{10} x$ então $dy = \frac{\log_{10} e}{x} dx$. Com $x = 1000$ e $dx = \Delta x = -3$,

$\log_{10} 997 = f(1.000 - 3) \approx f(1.000) + dy = \log_{10} 1000 + \frac{\log_{10} e}{x}(-3) = 3 + \frac{0,4343}{1000}(-3) = 2,998697$

De fato, $\log_{10} 997 = 2,998695$.

37. Se x e y forem números reais quaisquer e a for positivo, então

$$a^x \div a^y = e^{x \ln a} \div e^{y \ln a} = e^{x \ln a - y \ln a} = e^{(x-y) \ln a} = a^{x-y}$$

39. Se x for um número real qualquer e a e b forem números positivos, então

$$(ab)^x = e^{x \ln ab} = e^{x(\ln a + \ln b)} = e^{x \ln a} e^{x \ln b} = a^x b^x$$

41. Seja a um número positivo qualquer exceto 1, e sejam x e y números positivos

Se $\log_a x = M$ e $\log_a y = N$ então, $x = a^M$ e $y = a^N$ de modo que $xy = a^M a^N$; $xy = a^{M+N}$. Logo,

$$\log_a xy = M + N = \log_a x + \log_a y$$

Uma outra prova, usando a fórmula $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ é a seguinte:

$$\log_a xy = \frac{\ln xy}{\ln a} = \frac{\ln x + \ln y}{\ln a} = \frac{\ln x}{\ln a} + \frac{\ln y}{\ln a} = \log_a x + \log_a y$$

43. Seja a um número positivo qquer, exceto 1. Se $\log_a 1 = M$ então, $a^M = 1$; logo $M = 0$. Assim, $\log_a 1 = 0$.

45. Se S(t) for o número de vendas diárias extras como resultado de uma campanha de vendas qdo t dias se passaram desde o fim da campanha, então

$$S(t) = 1000 \cdot 3^{-t/2}; \quad S'(t) = 1000 \cdot 3^{-t/2}(-\tfrac{1}{2}) \ln 3 = -500(\ln 3) 3^{-t/2}$$

(a) $S'(4) = -500(1,0986)3^{-2} = -61,03$. Portanto, 4 dias após o término da promoção, o número de vendas diárias extras está diminuindo a uma taxa de 61 vendas por dia.

(b) $S'(10) = -500(1,0986)3^{-5} = -2,26$. Portanto, 10 dias após o término da promoção, o número de vendas diárias extras está diminuindo a uma taxa de 2,26 vendas por dia.

47. Se s m for a distância orientada da partícula, a partir do ponto inicial em t s, então

$s = A2^{kt} + B2^{-kt}$; $v = \frac{ds}{dt} = kA2^{kt}\ln 2 - kB2^{-kt}\ln 2$

$a = \frac{dv}{dt} = k^2A2^{kt}(\ln 2)^2 + k^2B2^{-kt}(\ln 2)^2 = k^2(\ln 2)^2[A2^{kt} + B2^{-kt}] = k^2(\ln 2)^2 s$

Portanto, a é proporcional a s.

49. (a) Se y for o valor do quadro t anos após sua compra, então

$$y = 200 \cdot 2^{t/10}$$

(b) Em 1984, t=60; logo, $y = 200 \cdot 2^{60/10} = 200 \cdot 2^6 = 12.800$.

Portanto, em 1984 o valor do quadro foi \$12.800.

(c) $y'(t) = 200 \cdot 2^{t/10}\left(\frac{1}{10}\right)\ln 2 = 20(\ln 2)2^{t/10}$ e $y'(60) = 20(0,6931)2^6 = 887,23$.

Assim, em 1984 o valor do quadro estava aumentando a uma taxa de \$887 por ano.

51. A região está no primeiro quadrante, limitada acima pela curva $y = e^x$ e abaixo pela curva $y = 2^x$, $x \in [0, 1]$. Veja a Figura 7.6.51. Se A unidades de área for a região, então

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (e^{\xi_i} - 2^{\xi_i})\Delta_i x = \int_0^1 (e^x - 2^x)\,dx = e^x - \frac{2^x}{\ln 2}\Big]_0^1$$

$$= \left(e - \frac{2}{\ln 2}\right) - \left(1 - \frac{1}{\ln 2}\right) = e - 1 - \frac{1}{\ln 2} \approx 0,276$$

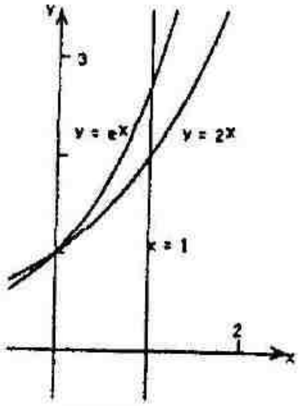


FIGURA 7.6.51.

53. A região está no primeiro quadrante, limitada acima por $y = 3^x$, e abaixo por $y = 1$ $x \in [0, 1]$. Um elemento do volume é um anel circular centrado no eixo x, de raios 3^{ξ_i} e 1. Se V unidades cúbicas for o volume do sólido de revolução, então

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi\left[(3^{\xi_i})^2 - (1)^2\right]\Delta_i x = \pi\int_0^1 (3^{2x} - 1)\,dx = \pi\left[\frac{3^{2x}}{2\ln 3} - x\right]_0^1 = \pi\left[\left(\frac{9}{2\ln 3} - 1\right) - \frac{1}{2\ln 3}\right]$$

$$= \left(\frac{4}{\ln 3} - 1\right)\pi \approx 8,297$$

EXERCÍCIOS 7.7 Aplicações da Função Exponencial Natural

1. Seja A a população t anos a partir da data em que era 40.000. Temos uma tabela das condições iniciais.

t	0	40	T
A	40.000	60.000	80.000

$\frac{dA}{dt} = kA$; logo, $A = A_0e^{kt} = 40,000e^{kt}$. Como $t = 40$, $A = 60.000$ temos

$$60.000 = 40.000\, e^{40k};\quad e^{40k} = \frac{3}{2};\quad e^k = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/40}$$

Assim, $A = 40.000\left(\frac{3}{2}\right)^{t/40}$. Com $A = 80.000$, $t = T$ temos

$$80.000 = 40.000\left(\frac{3}{2}\right)^{T/40};\quad 2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{T/40};\quad \ln 2 = \frac{T}{40}\ln 1{,}5;\quad T = \frac{40\ln 2}{\ln 1{,}5} \approx 68{,}4$$

Portanto, a população será de 80.000 daqui a 68.4 anos.

3. Seja A a população t anos a partir de 1975. Temos uma tabela das condições iniciais.

t	0	10	20
A	50.000	44.000	A_{20}

$\frac{dA}{dt} = kA$; logo, $A = A_0e^{kt} = 50.000e^{kt}$. Como $t = 10$, $A = 44.000$, temos

$$44.000 = 50.000e^{10k};\quad e^{10k} = \frac{22}{25};\quad e^k = \left(\frac{22}{25}\right)^{1/10}.$$

Assim, $A = 50.000\left(\frac{22}{25}\right)^{t/10}$. Qdo $t = 20$ temos $A_{20} = 50.000\left(\frac{22}{25}\right)^2 = 38.720$.

A população esperada em 1995 será de 38.720.

5. Seja V o valor do automóvel t anos após 1º de junho de 1989. Temos uma tabela das condições iniciais.

t	0	1	5
V	7.000	5.800	V_5

$\frac{dV}{dt} = kV$; logo, $V = V_0e^{kt} = 7000e^{kt}$, Com $V = 5.800$ $t = 1$ temos $5.800 = 7.000\, e^k$; $e^k = \frac{29}{35}$.

Assim, $V = 7.000\left(\frac{29}{35}\right)^t$. Qdo $t = 5$ temos $V_5 = 7.000\left(\frac{29}{35}\right)^5 \approx 2.734$

O valor esperado do automóvel em 1º de junho de 1994 será de $2.734.

7. Seja B o número de bactérias presentes em t horas. Temos uma tabela das condições iniciais.

t	0	½	2
B	1.000	2.000	B_2

$\frac{dB}{dt} = kB$; logo, $B = B_0e^{kt}$ $1.000e^{kt}$. Com $B = 2.000$, $t = \frac{1}{2}$ temos $2.000 = 1.000e^{k/2}$; $e^{k/2} = 2$; $e^k = 4$.

Assim, $B = 1.000(4)^t$. Qdo $t = 2$ temos $B_2 = 1.000(16) = 16.000$.

Há 16.000 bactérias presentes após 2h.

9. Seja A miligramas a quantidade de rádios existentes t anos a partir de agora. Temos uma tabela das condições iniciais.

t	0	1.690	100	1.000
A	A_0	$\frac{1}{2}A_0$	A_{100}	$A_{1.000}$

$\frac{dA}{dt} = kA$; logo, $A = A_0e^{kt}$. Com $A = \frac{1}{2}A^0$ e $t = 1.690$ temos $\frac{1}{2}A_0 = A_0e^{1.690k}$; $e^k = (\frac{1}{2})^{1/1.690}$.
Assim, $A = A_0(\frac{1}{2})^{t/1.690}$.

(a) Com $t = 100$, $A_{100} = A_0(\frac{1}{2})^{100/1.690} = 0,96A_0$.

Portanto, após 100 anos, restarão 96% da quantidade existente agora.

(b) Com $t = 1.000$, $A_{1.000} = A_0(\frac{1}{2})^{1.000/1.690} = 0,66A_0$.

Portanto, após 1.000 anos, restarão 66% da quantidade existente agora.

11. Seja S o número existente da espécie t dias após 21 de dezembro. Temos uma tabela de condições iniciais.

t	0	30	90
S	2.400	2.000	S_{90}

$\frac{dS}{dt} = kS$; logo, $S = S_0e^{kt} = 2.400e^{kt}$. Com $S = 2.000$, $t = 30$ temos

$$2.000 = 2.400e^{30t};\quad e^{30t} = \frac{5}{6};\quad e^t = \left(\frac{5}{6}\right)^{1/30}$$

Assim, $S = 2.400\left(\frac{5}{6}\right)^{t/30}$. Qdo. $t = 90$, $S = 2.400\left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 1.389$.

Portanto, espera-se que 1.389 da espécie sobrevivam no inverno.

13. Seja A a quantia investida no final de t anos, se a taxa de juros compostos continuamente for 10%. Temos uma tabela de condições iniciais.

t	0	1
A	500	A_1

$\frac{dA}{dt} = 0,10A$; logo $A = A_0e^{0,10t} = 500e^{0,10t}$.

(a) Qdo. $t = 1$ temos $A_1 = 500e^{0,10} = 552,59$. Portanto, os juros ganhos em um investimento de \$500 no final de um ano é \$52,59.

(b) Seja j a taxa anual de juros. Então,

$$500(1 + j) = 552,59;\quad 1 + j = 1,10518;\quad j = 0,10518$$

Assim, a taxa anual de juros efetiva será de 10,52%.

15. Seja A a quantia em t anos de um investimento de P, a juros compostos continuamente. Temos uma tabela de condições iniciais.

t	0	10	T
A	P	2P	3P

$\frac{dA}{dt} = kA$; logo, $A = A_0e^{kt} = Pe^{kt}$. Com $A = 2P$ e $t = 10$, temos

$$2P = Pe^{10k};\quad e^k = 2^{1/10}$$

Assim, $A = P(2)^{t/10}$. Com $A = 3P$ e $t = T$, temos

$$3P = P(2)^{T/10};\quad 2^{T/10} = 3;\quad \frac{T}{10}\ln 2 = \ln 3;\quad T = \frac{10\ln 3}{\ln 2} \approx 15,9$$

Portanto, a quantia original irá triplicar em 15,9 anos.

17. Seja A a quantia de investimento no final de t anos, se a taxa de juros compostos continuamente for 8%. Temos uma tabela de condições iniciais.

t	0	T
A	500	1.000

$\frac{dA}{dt} = 0{,}08A$; logo, $A = A_0 e^{0,08t} = 500 e^{0,08t}$. Com $A = 1.000$, $t = T$ temos

$$1.000 = 500 e^{0,08T};\quad e^{0,08T} = 2;\quad 0{,}08T = \ln 2;\quad T = \frac{\ln 2}{0{,}08} \approx 8{,}7$$

Portanto, os juros serão acumulados para $1.000 em 8,7 anos.

19. Seja A gramas a quantidade de substância não transformada em t min. Temos uma tabela de condições iniciais.

t	0	10	15
A	A_0	$\frac{2}{3}A_0$	$A_0 - 20$

$\frac{dA}{dt} = kA$; logo, $A = A_0 e^{kt}$. Com $A = \frac{2}{3}A_0$ e $t = 10$ temos

$$\tfrac{2}{3}A_0 = A_0 e^{10k};\quad e^k = (\tfrac{2}{3})^{1/10}$$

Assim, $A = A_0(\frac{2}{3})^{t/10}$. Com $A = A_0 - 20$ e $t = 15$, temos

$$A_0 - 20 = A_0(\tfrac{2}{3})^{15/10};\quad A_0 - A_0(\tfrac{2}{3})^{3/2} = 20;\quad A_0[1 - (\tfrac{2}{3})^{3/2}] = 20;\quad A_0 = \frac{20}{1 - (\frac{2}{3})^{3/2}} \approx 43{,}9$$

21. Seja x kg a quantidade de sal no tanque t min após começar a entrar água fresca. Temos uma tabela de condições iniciais. A água salgada está fluindo para fora do tanque a uma taxa de 3 L/min; assim, o tanque está perdendo $3\left(\frac{x}{100}\right)$ kg de sal por minuto.

t	0	60
x	70	x_{60}

$\frac{dx}{dt} = -0{,}03x$; logo, $x = x_0 e^{-0,03t} = 70 e^{-0,03t}$. Qdo $t = 60$ temos $x_{60} = 70e^{-1,8} \approx 11{,}6$.

Portanto, haverá 11,6 kg de sal no tanque no final de 1 hora.

23. Seja x unidades a quantidade de ^{14}C existente t anos após a morte da árvore. Temos uma tabela de condições iniciais.

t	0	5600	T
x	x_0	$\frac{1}{2}x_0$	$0{,}15x_0$

Como a meia-vida é 5.600 anos, pelo método usado na solução do Exercício 9, temos

$x = x_0(\frac{1}{2})^{t/5600}$. Com $x = 0{,}45x_0$ e $t = T$ temos

$$0{,}15x_0 = x_0(0{,}5)^{T/5600};\quad \ln 0{,}45 = \frac{T}{5600}\ln 0{,}5;\quad T = \frac{5600(\ln 0{,}45)}{\ln 0{,}5} \approx 6.451$$

Portanto, a árvore que se tornou fossilizada morreu 6.451 anos atrás.

25. Seja y o número de fatos que o estudante memorizou no final de t min. Temos uma tabela de condições iniciais.

t	0	20	60	180
y	0	15	y_{60}	y_{180}

$\frac{dy}{dt} = k(60 - y)$; $\frac{dy}{60 - y} = k\,dt$; $\int \frac{dy}{60 - y} = k\int dt$; $-\ln|60 - y| = kt + \bar{C}$; $60 - y = Ce^{-kt}$; $y = 60 - Ce^{-kt}$

Com $y = 0$, $t = 0$ temos $0 = 60 - C$; $C = 60$. Assim, $y = 60 - 60e^{-kt}$. Com $y = 15$, $t = 20$ temos

$$15 = 60 - 60e^{-20k};\quad 60e^{-20k} = 45;\quad e^{-20k} = \frac{3}{4};\quad e^{-k} = \left(\frac{3}{4}\right)^{1/20}$$

Portanto, $y = 60 - 60\left(\frac{3}{4}\right)^{t/20}$.

(a) Qdo $t = 60$, $y_{60} = 60 - 60\left(\frac{3}{4}\right)^3 \approx 34{,}7$ (b) Qdo $t = 180$, $y_{180} = 60 - 60\left(\frac{3}{4}\right)^9 \approx 55{,}5$

27. $P([0, 1]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-x^2/2}dx$. $\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{1 - 0}{4} = \frac{1}{4}$.

(a) Pela regra do trapézio

$$\int_0^1 e^{-x^2/2}dx \approx \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}[e^0 + 2e^{-1/32} + 2e^{-1/8} + 2e^{-9/32} + e^{-1/2}]$$

$$= \frac{1}{8}[1 + 2(0{,}9692) + 2(0{,}8825) + 2(0{,}7548) + 0{,}6065)] = \frac{1}{8}(6{,}8195) = 0{,}8524$$

Assim, $P([0, 1]) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(0{,}8524) = 0{,}3401$.

(b) Pela regra de Simpson

$$\int_0^1 e^{-x^2/2}dx \approx \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}[e^0 + 4e^{-1/32} + 2e^{-1/8} + 4e^{-9/32} + e^{-1/2}]$$

$$= \frac{1}{12}[1 + 4(0{,}96923) + 2(0{,}88250) + 4(0{,}75484) + 0{,}60653] = \frac{1}{12}[10{,}26782] = 0{,}85565$$

$P([0, 1]) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(0{,}85565) \approx 0{,}34136$, enqto $P([0, 1]) = 0{,}34134$ até cinco casas decimais.

29. $\operatorname{fer}(1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-t^2}dt$. $\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{1 - 0}{10} = 0{,}1$. Pela regra de Simpson $\int_0^1 e^{-t^2}dt$

$$\approx \frac{0{,}1}{3}[e^0 + 4e^{-0,01} + 2e^{-0,04} + 4e^{-0,09} + 2e^{-0,16} + 4e^{-0,25} + 2e^{-0,36} + 4e^{-0,49} + 2e^{-0,64} + 4e^{-0,81} + e^{-1}]$$

$$= \frac{1}{30}[1 + 4(0{,}990050) + 2(0{,}960789) + 4((0{,}913931) + 2(0{,}852144) + 4(0{,}778801) + 2(0{,}697676)$$

$$+ 4(0{,}612626) + 2(0{,}527292) + 4(0{,}444858) + 0{,}367879]$$

$$= \frac{1}{30}[22{,}404748] = 0{,}746825$$

Então, $\operatorname{fer}(1) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}}(0{,}746825) = 0{,}842702$, enqto $\operatorname{fer}(1) = 0{,}842701$ até seis casas decimais.

EXERCÍCIOS 7.8 Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem (Suplementar)

Abreviamos "equação diferencial" usando "ED" e "fator de integração", "FI". Não distribua FI; a antiderivada do primeiro membro é sempre y vezes FI.

1. $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 0$ (a) A ED é linear em y, com $P = \frac{1}{x}$. $\int \frac{1}{x}dx = \ln x$; $FI = e^{\ln x} = x$.

$\left(\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y\right)x = 0$; $yx = C$; $y = \frac{C}{x}$

(b) Separamos as variáveis $\frac{1}{y}dy = -\frac{1}{x}dx$; $\int \frac{1}{y}dy = -\int \frac{1}{x}dx$; $\ln|y| = -\ln|x| + K$;

$|y| = e^{k - \ln|x|} = e^{k}e^{-\ln|x|} = \frac{e^{k}}{|x|}$; $y = \frac{\pm e^{k}}{x} = \frac{C}{x}$ onde $C = \pm e^{k}$.

3. $\frac{dy}{dx} + (\operatorname{tg} x)y = 0$ (a) A ED é linear em y, com $P = \operatorname{tg} x$. $\int \operatorname{tg} x\, dx = \ln \sec x$;

$FI = e^{\ln \sec x} = \sec x$. $\left[\frac{dy}{dx} + (\operatorname{tg} x)y\right]\sec x = 0$; $y \sec x = c$; $y = C \cos x$

(b) Separamos as variáveis. $\frac{1}{y}dy = -\operatorname{tg} x\, dx$; $\int \frac{1}{y}dy = -\int \operatorname{tg} x\, dx$; $\ln|y| = -\ln|\sec x| + k$;

$|y| = e^{k - \ln|\sec x|} = e^{k}e^{-\ln|\sec x|} = e^{k}/|\sec x| = e^{k}|\cos x|$; $y = \pm e^{k}\cos x = C\cos x$ onde $C = \pm e^{k}$.

5. $\frac{dy}{dx} - y = e^{x}$. A ED é linear em y, com $P = -1$. $\int(-1)\,dx = -x$; $FI = e^{-x}$.

$\left(\frac{dy}{dx} - y\right)e^{-x} = e^{x}e^{-x} = 1$; $ye^{-x} = \int 1\, dx = x + C$; $y = (x + C)e^{x}$

7. $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{1 + e^{x}}$. A ED é linear em y, com $P = 1$. $\int 1\, dx = x$; $FI = e^{x}$.

$\left(\frac{dy}{dx} + y\right)e^{x} = \frac{e^{x}}{1 + e^{x}}$; $ye^{x} = \int \frac{e^{x}}{1 + e^{x}}dx = \ln(1 + e^{x}) + C$; $y = [\ln(1 + e^{x}) + C]e^{-x}$

9. $(3y - 2x)\frac{dy}{dx} = y$; $3y - 2x = y\frac{dx}{dy}$; $\frac{dx}{dy} + \frac{2}{y}x = 3$. A ED é linear em x, com $P = \frac{2}{y}$. $\int \frac{2}{y}dy = 2\ln y$;

$FI = e^{2\ln y} = y^{2}$. $\left(\frac{dx}{dy} + \frac{2}{y}x\right)y^{2} = 3y^{2}$; $xy^{2} = \int 3y^{2}dy = y^{3} + C$; $x = y + Cy^{-2}$

11. $\frac{dy}{dx} + (2\operatorname{cotg} x)y = \cos x$. A ED é linear em y, com $P = 2\operatorname{cotg} x$. $\int 2\operatorname{cotg} x\, dx = 2\ln \operatorname{sen} x$;

$FI = e^{2\ln \operatorname{sen} x} = \operatorname{sen}^{2}x$. $\left[\frac{dy}{dx} + (2\operatorname{tg} x)y\right]\operatorname{sen}^{2}x = \operatorname{sen}^{2}x\cos x$;

$y\operatorname{sen}^{2}x = \int \operatorname{sen}^{2}x(\cos x\, dx) = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^{3}x + C$; $y = \frac{1}{3}\operatorname{sen} x + C\operatorname{cosec}^{2}x$

13. $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2xy}{1 + x^{2}} = \frac{1}{1 + x^{2}} - \frac{2x}{1 + x^{2}}y$; $\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1 + x^{2}}y = \frac{1}{1 + x^{2}}$. A ED é linear em y, com $P = \frac{2x}{1 + x^{2}}$.

$\int \frac{2x}{1 + x^{2}}dx = \ln(1 + x^{2})$; FI $e^{\ln(1 + x^{2})} = 1 + x^{2}$. $\left(\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1 + x^{2}}y\right)(1 + x^{2}) = 1$;

$y(1 + x^{2}) = \int 1\, dx = x + C$; $y = \frac{x + C}{1 + x^{2}}$

15. $\frac{dy}{dx} = \frac{y\ln y}{x + \ln y}$; $\frac{dx}{dy} = \frac{x + \ln y}{y\ln y} = \frac{1}{y\ln y}x + \frac{1}{y}$; $\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y\ln y}x = \frac{1}{y}$. A ED é linear em x, com $P = -\frac{1}{y\ln y}$.

$-\int \frac{1}{y\ln y}dy = -\ln(\ln y)$. $FI = e^{-\ln(\ln y)} = \frac{1}{\ln y}$. $\left(\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y\ln y}\right)\frac{1}{\ln y} = \frac{1}{y\ln y}$;

$x\frac{1}{\ln y} = \int \frac{1}{y\ln y} = \ln|\ln y| + C$; $x = \ln y(\ln|\ln y| + C)$

17. $x\frac{dy}{dx} - 2y = x^3 + 1$. $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x^2 + x^{-1}$. A ED é linear em y, com $P = -\frac{2}{x}$. $-\int\frac{2}{x}dx = -2\ln x$;
FI $= e^{-2\ln x} = x^{-2}$. $\left(\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y\right)x^{-2} = 1 + x^{-3}$; $yx^{-2} = x - \frac{1}{2}x^{-2} + C$. $y = 1$ qdo $x = 1 \Rightarrow 1 = 1 - \frac{1}{2} + C$;
$C = \frac{1}{2}$. $yx^{-2} = x - \frac{1}{2}x^{-2} + \frac{1}{2}$; $y = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$

19. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = y - x$; $\frac{dy}{dx} - \left(\frac{1}{x} + 1\right)y = -x$. A ED é linear em y, com $P = -\frac{1}{x} - 1$. $\int\left(-\frac{1}{x} - 1\right)dx = -\ln x - x$;
FI $= e^{-\ln x - x} = \frac{e^{-x}}{x}$. $\left[\frac{dy}{dx} - \left(\frac{1}{x} + 1\right)y\right]\frac{e^{-x}}{x} = -e^{-x}$; $y\frac{e^{-x}}{x} = e^{-x} + C$. $y = 2$ qdo $x = 1 \Rightarrow 2e^{-1} = e^{-1} + C$;
$C = e^{-1}$, $y\frac{e^{-x}}{x} = e^{-x} + e^{-1}$; $y = x(1 + e^{x-1})$

21. $\frac{dy}{dx} = 1 + 2y\,\text{cotg}\,x$; $\frac{dy}{dx} - (2\,\text{cotg}\,x)y = 1$. A ED é linear em y, com $P = -2\,\text{cotg}\,x$.
$\int -2\,\text{cotg}\,x\,dx = 2\ln \text{cosec}\,x$. FI $= e^{2\ln\text{cosec}\,x} = \text{cosec}^2 x$. $\left[\frac{dy}{dx} - (2\,\text{cotg}\,x)y\right]\text{cosec}^2 x = \text{cosec}^2 x$;
$y\,\text{cosec}^2 x = \int \text{cosec}^2 x = -\text{cotg}\,x + C$. $y = 2$ qdo $x = \frac{1}{4}\pi \Rightarrow 2(2) = -1 + C$; $C = 5$.
$y\,\text{cosec}^2 x = -\text{cotg}\,x + 5$; $y = 5\,\text{sen}^2 x - \text{sen}\,x\cos x$

23. $\frac{dy}{dx} = \frac{2y + 4}{\text{tg}\,x}$. Método 1. $\frac{dy}{dx} = (2\,\text{cotg}\,x)y + 4\,\text{cotg}\,x$; $\frac{dy}{dx} - (2\,\text{cotg}\,x)y = 4\,\text{cotg}\,x$. A E.D é linear em y em $P = -2\,\text{cotg}\,x$. $\int -2\,\text{cotg}\,x\,dx = 2\ln\text{cosec}\,x$. FI $= e^{2\ln\text{cosec}\,x} = \text{cosec}^2 x$.
$\left[\frac{dy}{dx} - (2\,\text{cotg}\,x)y\right]\text{cosec}^2 x = 4\,\text{cotg}\,x\,\text{cosec}^2 x$; $y\,\text{cosec}^2 x = \int \text{cotg}\,x\,\text{cosec}^2 x\,dx = -2\,\text{cotg}^2 x + C$.
$y = 0$ qdo $x = \frac{1}{6}\pi \Rightarrow 0 = -2(3) + C$; $C = 6$. $y\,\text{cosec}^2 x = 6 - 2\,\text{cotg}^2 x$; $8\,\text{sen}^2 x - 2$
Método 2. Separamos as variáveis. $\int\frac{dy}{2y + 4} = \int \text{cotg}\,x\,dx$; $\frac{1}{2}\ln|2y + 4| = \ln|\text{sen}\,x| + k$;
$|2y + 4| = e^{2\ln|\text{sen}\,x| + 2k}$; $y = \pm e^{2k}\text{sen}^2 x - 2 = C\,\text{sen}2x - 2$. $y = 0$ qdo $x = \frac{1}{6}\pi \Rightarrow 0 = \frac{1}{4}C - 2$, $C = 8$.
$y = 8\,\text{sen}^2 x - 2$

25. Do Exemplo 4, se y graus for a temperatura do corpo após t min, então
$y = 35 + 85\left(\frac{5}{17}\right)^{t/40}$. Se $y = 45$ então $45 = 35 + 85\left(\frac{5}{17}\right)^{t/40}$; $10 = 85\left(\frac{5}{17}\right)^{t/40}$; $\frac{10}{85} = \left(\frac{5}{17}\right)^{t/40}$;
$\ln\frac{10}{85} = \frac{t}{40}\ln\frac{5}{17}$; $t = \frac{40\ln(10/85)}{\ln(5/17)} = 69{,}95$. A temperatura do corpo será de 45° após 70 min.

27. Seja y graus a temperatura e Y−35 graus a diferença de temperatura, t min após o termômetro ser removido. Temos as condições laterais:

t	0	½	a	3
y	75	65	50	y_3

Da lei de resfriamento de Newton, $\frac{dY}{dt} = kY$, $Y_0 = 75 - 35 = 40$. $Y = Y_0 e^{kt}$; $y - 35 = 40e^{kt}$.
Qdo $t = \frac{1}{2}$ e $y = 65$ obtemos $30 = 40e^{k/2}$; $e^{k/2} = \frac{3}{4}$. Assim, $y = 35 + 40(e^{k/2})^{2t}$; $y = 35 + 40\left(\frac{3}{4}\right)^{2t}$.
(a) Qdo t=a e y=50 obtemos $50 = 35 + 40\left(\frac{3}{4}\right)^{2a}$; $\frac{15}{40} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2a}$; $\ln\frac{15}{40} = 2t\ln\frac{3}{4}$;
$a = \frac{\ln(15/40)}{2\ln(3/4)} = 1{,}70$. A temperatura será de 50° após 1,70 min=1h 42 min.
(b) Qdo t=3 obtemos $y_3 = 35 + 40\left(\frac{3}{4}\right)^6 = 42{,}1$. Após 3 min a temperatura será 42,1°.

29. (a) i ampères é a corrente em t s. Da equação (10), $4\frac{di}{dt} + 20i = 60$; $\frac{di}{dt} + 5i = 15$.
A ED é linear em i com $P = 5$. $\int 5\,dt = 5t$; $FI = e^{5t}$. $\left(\frac{di}{dt} + 5i\right)e^{5t} = 15e^{5t}$;
$ie^{5t} = \int 15e^{5t}dt = 3e^{5t} + C$. Qdo $i = 0$ e $t = 0$, obtemos $0 = 3 + C$; $C = -3$. Assim,
$ie^{5t} = 3e^{5t} - 3$; $i = 3 - 3e^{-5t}$ (b) A corrente máxima é 3 ampères.

31. i ampères é a corrente em t s. Da equação (10), $5\frac{di}{dt} + 40i = e^{t}$; $\frac{di}{dt} + 8i = \frac{1}{5}e^{t}$.
A ED é linear em i com $P = 8$. $\int 8\,dt = 8t$; $FI = e^{8t}$. $\left(\frac{di}{dt} + 8i\right)e^{8t} = \frac{1}{5}e^{t}e^{8t} = \frac{1}{5}e^{9t}$;
$ie^{8t} = \int \frac{1}{5}e^{9t}dt = \frac{1}{45}e^{9t} + C$. Qdo $i = 0$ e $t = 0$, obtemos $0 = \frac{1}{45} + C$; $C = -\frac{1}{45}$. Assim,
$ie^{8t} = \frac{1}{45}e^{9t} - \frac{1}{45}$; $i = \frac{1}{45}e^{t} - \frac{1}{45}e^{-8t}$

33. A carga é q coulombs e i ampères após t s. (a) Da Equação (13),
$(1 + 0{,}01\,t)\frac{dq}{dt} + \frac{q}{0{,}1} = 90$; $\frac{dq}{dt} + \frac{10}{1 + 0{,}01\,t}q = \frac{80}{1 + 0{,}01\,t}$. A ED é linear em q com $P = \frac{10}{1 + 0{,}01\,t}$.
$\int \frac{10}{1 + 0{,}01\,t}dt = 1.000\ln(1 + 0{,}01\,t)$; $FI = e^{1.000\ln(1+0{,}01t)} = (1 + 0{,}01t)^{1.000}$
$\left(\frac{dq}{dt} + \frac{10}{1 - 0{,}01\,t}q\right)(1 + 0{,}01.t)^{1.000} = 80(1 + 0{,}01.t)^{999}$; $q(1 + 0{,}01\,t)^{1.000} = \int 80(1 + 0{,}01t)^{999}dt$
$= 8(1 + 0{,}01\,t)^{1.000} + C$. Qdo $t = 0$ e $q = 4$ obtemos $4 = 8 + C$; $C = -4$. Assim,
$q(1 + 0{,}01\,t)^{1.000} = 8(1 + 0{,}01\,t)^{1000} - 4$; $q = 8 - 4(1 + 0{,}01t)^{-1.000}$
(b) $i = \frac{dq}{dt} = 40(1 + 0{,}01\,t)^{-1.001}$ (c) A carga máxima é 8 coulombs.

35. $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = \frac{y^4}{x^4}$; $y^{-4}\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y^{-3} = x^{-4}$. Seja $u = y^{-3}$; $\frac{du}{dx} = -3y^{-4}\frac{dy}{dx}$. Então, $-\frac{1}{3}\frac{du}{dx} + \frac{2}{x}u = x^{-4}$;
$\frac{du}{dx} - \frac{6}{x}u = -3x^{-4}$. A ED é linear em u com $P = -\frac{6}{x}$. $\int -\frac{6}{x}dx = -6\ln x$; $FI = e^{-6\ln x} = x^{-6}$.
$\left(\frac{du}{dx} - \frac{6}{x}u\right)x^{-6} = -3x^{-10}$; $ux^{-6} = \int -3x^{-10}dx$; $y^{-3}x^{-6} = \frac{1}{3}x^{-9} + C$; $y^{-3} = \frac{1}{3}x^{-3} + Cx^{6}$; $y = \left(\frac{1}{3}x^{-3} + Cx^{6}\right)^{-1/3}$

37. $e^{x^2}\frac{dy}{dx} + 2xe^{x^2}y = xy^3$; $y^{-3}\frac{dy}{dx} + 2xy^{-2} = xe^{-x^2}$. Seja $u = y^{-2}$; $\frac{du}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$. $-\frac{1}{2}\frac{du}{dx} + 2xu = xe^{-x^2}$;
$\frac{du}{dx} - 4xu = -2xe^{-x^2}$. A ED é linear em u com $P = -4x$. $\int -4x\,dx = -2x^2$; $FI = e^{-2x^2}$.x^2.
$\left(\frac{du}{dx} - 4xu\right)e^{-2x^2} = -2xe^{-3x^2}$; $ue^{-2x^2} = \int -2xe^{-3x^2}dx$; $y^{-2}e^{-2x^2} = \frac{1}{3}e^{-3x^2} + C$; $y^{-2} = \frac{1}{3}e^{-x^2} + Ce^{2x^2}$;
$y = \pm(\frac{1}{3}e^{-x^2} + Ce^{2x^2})^{-1/2}$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 7

1. $f(x) = x^3 - 4$. f é crescente $\Rightarrow f$ é biunívoca $\Rightarrow f$ tem uma inversa.

(a) Seja $y = f(x)$. Então, $y = x^3 - 4$; $x = \sqrt[3]{y+4}$. Logo, $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y+4}$, e portanto $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+4}$.

O domínio de f^{-1} é $(-\infty, +\infty)$ e a imagem de f^{-1} é $(-\infty, +\infty)$.

3. $f(x) = 9 - x^2$. $f(3) = 0 = f(-3) \Rightarrow f$ é não-biunívoca $\Rightarrow f$ não tem uma inversa.

5. $f(x) = \dfrac{3x-4}{x} = 3 - \dfrac{4}{x}$. Em $(-\infty, 0)$ f é crescente e $f(x) > 3$; em $(0, +\infty)$ f é crescente e $f(x) < 3$. Portanto, f é biunívoca, e então, tem uma inversa.

(a) Seja $y = f(x)$. Então, $y = \dfrac{3x-4}{x}$; $xy = 3x - 4$; $3x - xy = 4$; $x = \dfrac{4}{3-y}$.

Logo, $f^{-1}(y) = \dfrac{4}{3-y}$, e então $f^{-1}(x) = \dfrac{4}{3-x}$. O domínio de f^{-1} é $\{x \mid x \neq 3\}$. A imagem de f^{-1} é o domínio de f, o qual é $\{y \mid y \neq 0\}$.

7. (a) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$. f é crescente $\Rightarrow f$ é biunívoca $\Rightarrow f$ tem uma inversa.

(b) Seja $y = f(x)$. Então, $y = \sqrt[3]{x+1}$; $y^3 = x + 1$; $x = y^3 - 1$.

Assim $f^{-1}(y) = y^3 - 1$, e assim, $f^{-1}(x) = x^3 - 1$.

(c) $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\sqrt[3]{x+1}) = (\sqrt[3]{x+1})^3 - 1 = (x+1) - 1 = x$

$f(f^{-1}(x)) = f(x^3 - 1) = \sqrt[3]{(x^3-1)+1} = \sqrt[3]{x^3} = x$

9. $f(x) = x^2 - 6x + 8$, $x \geq 3$; $d = 3$. Procuramos o valor de $c \geq 3$ para o qual $f(c) = 3$.

$$c^2 - 6c + 8 = 3; \quad c^2 - 6c + 5 = 0; \quad (c-1)(c-5) = 0; \quad c = 5$$

$f'(x) = 2x - 6$. Assim, $f'(x) > 0$ se $x > 3$. Logo, há um intervalo fechado contendo 5, no qual f é contínua e crescente. Então, o Teorema 7.2.4 aplica-se e

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(5)} = \frac{1}{4}$$

11. $f(x) = 8x^3 + 6x$; $d = 4$. Queremos encontrar o valor de c, para o qual $f(c) = 4$.

$8c^3 + 6c = 4$; $4c^3 + 3c - 2 = 0$. Experimentando $c = \pm 1$, $c = \pm \frac{1}{2}$, $c = \pm \frac{1}{4}$, pela divisão sintética, vemos que $c = \frac{1}{2}$. $f'(x) = 24x^2 + 6$. Logo, $f'(x) >$ para todo x. Assim, há um intervalo fechado contendo $\frac{1}{2}$ no qual f é contínua e crescente. Então, o Teorema 7.2.4 aplica-se e

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(\frac{1}{2})} = \frac{1}{12}$$

13. $f'(x) = \dfrac{d}{dx}(\ln x^2)^2 = 2(\ln x^2)\dfrac{d}{dx}(\ln x^2) = 2(\ln x^2)\dfrac{1}{x^2}(2x) = \dfrac{4 \ln x^2}{x}$ que é igual a $\dfrac{8 \ln x}{x}$ se $x > 0$.

15. $g'(x) = \dfrac{d}{dx} 2^{\cos 4x} = 2^{\cos 4x}(\ln 2)\dfrac{d}{dx}(\cos 4x) = (-4 \ln 2) 2^{\cos 4x} \operatorname{sen} 4x$

17. $f'(x) = \frac{d}{dx}\left[e^{x/(4+x^2)}\right] = e^{x/(4+x^2)}\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{4+x^2}\right] = e^{x/(4+x^2)}\cdot\frac{1(4+x^2)-2x\cdot x}{(4+x^2)^2} = \frac{(4-x^2)}{(4+x^2)^2}e^{x/(4+x^2)}$

19. $f'(x) = \frac{d}{dx}\sqrt{\log_{10}\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\left(\log_{10}\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1/2}\frac{d}{dx}[\log_{10}(1+x) - \log_{10}(1-x)]$

$= \frac{1}{2}\left(\log_{10}\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1/2}\left(\frac{\log_{10}e}{1+x}+\frac{\log_{10}e}{1-x}\right) = \frac{\log_{10}e}{(1-x^2)\sqrt{\log_{10}\frac{1+x}{1-x}}}$

21. $f(t) = t^{3/\ln t}$. Como $t > 0$, então, pela Definição 7.5.2 $f(t) = e^{(3\ln t)/\ln t} = e^3$; $f'(t) = 0$.

23. Seja $y = (x)^{x^{e^x}}$; $x > 0$. $\ln y = x^{e^x}\ln x$; $\ln|\ln y| = e^x\ln x + \ln|\ln x|$

$\frac{1}{\ln y}\cdot\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = e^x\ln x + e^x\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}$; $\frac{dy}{dx} = y\ln y\left(e^x\ln x + \frac{e^x}{x} + \frac{1}{x\ln x}\right)$

$= (x)^{x^{e^x}}x^{e^x}\ln x\left(e^x\ln x + \frac{e^x}{x} + \frac{1}{x\ln x}\right) = (x)^{x^{e^x}+e^x-1}(xe^x\ln^2 x + e^x\ln x + 1)$

25. $\int\frac{3e^{2x}}{1+e^{2x}}dx = \frac{3}{2}\int\frac{2e^{2x}dx}{1+e^{2x}} = \frac{3}{2}\ln(1+e^{2x}) + C$

27. $\int(e^{3x} + 2^{3x})dx = \frac{1}{3}\int e^{3x}(3\,dx) + \frac{1}{3}\int 2^{3x}(3\,dx) = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{2^{3x}}{3\ln 2} + C$

29. $\int\frac{xe^{6x^2}}{\sqrt{1+e^{6x^2}}}dx = \frac{1}{12}\int(1+e^{6x^2})^{-1/2}(12x\,e^{6x^2}dx) = \frac{1}{12}\cdot 2(1+e^{6x^2})^{1/2} + C = \frac{1}{6}\sqrt{1+e^{6x^2}} + C$

31. Seja $u = 3\cdot 2^x + 4$; $du = 3(\ln 2)2^x dx$; $2^x dx = \frac{du}{3\ln 2}$. Então,

$\int\frac{2^x dx}{\sqrt{3\cdot 2^x + 4}} = \frac{1}{3\ln 2}\int u^{-1/2}du = \frac{1}{3\ln 2}\cdot 2u^{1/2} + C = \frac{2}{3\ln 2}\sqrt{3\cdot 2^x + 4} + C$

33. $\int_0^2 x^2e^{x^3}dx = \frac{1}{3}\int_0^2 e^{x^3}(3x^2dx) = \frac{1}{3}e^{x^3}\Big]_0^2 = \frac{1}{3}(e^8 - 1)$

35. $\int_1^8\frac{x^{1/3}}{x^{4/3}+4}dx = \frac{3}{4}\int_1^8\frac{\frac{4}{3}x^{1/3}dx}{x^{4/3}+4} = \frac{3}{4}\ln|x^{4/3}+4|\Big]_1^8 = \frac{3}{4}(\ln 20 - \ln 5) = \frac{3}{4}\ln 4 = \frac{3}{4}\ln 2^2 = \frac{3}{2}\ln 2$

37. Seja $u = e^x$; $du = e^x dx$. Então, $\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}}{e^x - 5}dx = \int_0^{\ln 2}\frac{e^x\cdot e^x dx}{e^x - 5} = \int_1^2\frac{u}{u-5}du = \int_1^2\left(1 + \frac{5}{u-5}\right)du$

$= u + 5\ln|u-5|\Big]_1^2 = (2 + 5\ln 3) - (1 + 5\ln 4) = 1 + 5\ln\frac{3}{4}$

39. $ye^x + xe^y + x + y = 0$; $\left(ye^x + e^x\frac{dy}{dx}\right) + \left(xe^y\frac{dy}{dx} + e^y\right) + 1 + \frac{dy}{dx} = 0$; $(e^x + xe^y + 1)\frac{dy}{dx} = -ye^x - e^y - 1$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{ye^x + e^y + 1}{e^x + xe^y + 1}$

41. Seja $y = f(x) = \log_{10} x$ logo $dy = \frac{\log_{10} e}{x}dx$. Com $x = 100.000$ e $\Delta x = dx = 937$

$\log_{10} 100937 = f(100.000 + \Delta x) \approx f(100.000) + dy = \log_{10} 100.000 + \frac{\log_{10} e}{x}dx = 5 + \frac{0,4343}{100.000}(937)$
$= 5,00407$. De fato, $\log_{10} 100.937 = 5,00405$.

43. Uma partícula está se deslocando em linha reta. Em t s, s m é sua distância orientada a partir da origem, v m/s é sua velocidade e a m/s^2 é sua aceleração.

$$a = \frac{dv}{dt} = e^t + e^{-t}; \quad v = \int (e^t + e^{-t})\,dt = e^t - e^{-t} + C_1$$

Como $v=1$ qdo $t=0$, então $1 = 1 - 1 + C_1$; $C_1 = 1$. Portanto,

$$v = \frac{ds}{dt} = e^t - e^{-t} + 1; \quad s = \int (e^t - e^{-t} + 1)\,dt = e^t + e^{-t} + t + C_2$$

Como $s=2$ qdo $t=0$, então $2 = 1 + 1 + 0 + C_2$; $C_2 = 0$. Portanto, $s = e^t + e^{-t} + t$.

45. Um elemento do volume é um disco circular centrado no eixo x, $x \in [0, b]$, de raio $e^{-\xi_i}$. Se $g(b)$ unidades cúbicas for o volume do sólido de revolução, então

$$g(b) = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi \left(e^{-\xi_i}\right)^2 \Delta_i x = \pi \int_0^b e^{-2x}dx = -\tfrac{1}{2}\pi\left[e^{-2x}\right]_0^b = -\tfrac{1}{2}\pi[e^{-2b} - e^0] = \tfrac{1}{2}\pi(1 - e^{-2b})$$

$$\lim_{b \to +\infty} g(b) = \lim_{b \to +\infty} \tfrac{1}{2}\pi(1 - e^{-2b}) = \tfrac{1}{2}\pi$$

47. Seja x unidades a quantidade de substâncias que restou t anos após ter começado a desaparecer. A meia-vida da substância é 1.900 anos. Pelo método de resolução do Exercício 7.7.9, $x = x_0(\tfrac{1}{2})^{t/1.900}$. Com $x = 0,05x_0$ e $t=T$, temos

$$0,05x_0 = x_0(0,5)^{T/1900}; \quad \ln 0,05 = \frac{T}{1.900}\ln 0,5; \quad T = \frac{1900 \ln 0,05}{\ln 0,5} \approx 8.212$$

Portanto, levará 8.212 anos para 95% do depósito desaparecer.

49. $f(x) = \ln|x|$; $x < 0$. $x < 0 \Rightarrow |x|$ é decrescente $\Rightarrow f$ é decrescente $\Rightarrow f$ é biunívoca $\Rightarrow$ f tem uma inversa. Seja $y = f(x)$. Então,

$$y = \ln|x|; \quad |x| = e^y; \quad -x = e^y; \quad x = -e^y$$

Se $g = f^{-1}$, então, $g(y) = -e^y$ e portanto $g(x) = -e^x$.

O domínio de g é a imagem de f, a qual é $(-\infty, +\infty)$.

51. A pressão é p N/m^2 qdo o volume é V cm^3 e a pressão inicial e o volume são p_0 N/m^2 e $v_0{}^2$ m^3. Temos

$$\frac{dp}{dv} = -k\frac{p}{v}; \quad \frac{dp}{p} + k\frac{dv}{v} = 0; \quad \ln|p| + k\ln|v| = C; \quad pv^k = C$$

Qdo $v = v_0$, $p = p_0$; então $C = p_0v_0{}^k$. Portanto, $pv^k = p_0v_0{}^k$.

53. Seja p dinas/cm^2 a pressão qdo. o volume é V cm^3. pela Lei de Boyle, PV=C.

Qdo P=50, V=60; assim, C=3.000. Portanto, $P = \frac{3000}{V}$.

Do resultado do Exercício 52, usando um sinal de menos, uma vez que o pistão está comprimindo o gás, se W dinas for o trabalho realizado pelo pistão, então

$$W = -\int_{60}^{40} P\,dV = \int_{40}^{60} \frac{3000}{V}\,dV = 3000\ln|V|\Big]_{40}^{60} = 3000(\ln 60 - \ln 40) = 3000\ln\frac{3}{2}$$

55. Seja A a quantia investida após t anos, se P for a quantia original e os juros forem de 100i%, compostos continuamente. Então, $A = Pe^{it}$. Com $A = 2P$, $i = 0,08$, e $t = T$, temos

$$2P = Pe^{0,08T};\quad e^{0,08T} = 2;\quad 0,08T = \ln 2;\quad T = \frac{\ln 2}{0,08} \approx 8,66$$

Portanto, o investimento dobrará em 8,66 anos.

57. Seja A o número de bactérias existentes após t horas.

Temos uma tabela de condições iniciais.

t	0	1/3	1
A	A_0	$2A_0$	1.500.000

$\frac{dA}{dt} = kA$; então $A = A_0e^{kt}$. $A = 2A_0$ qdo. $t = \frac{1}{3}$; logo

$$2A_0 = A_0e^{k/3};\quad e^{k/3} = 2;\quad e^k = 8$$

Portanto, $A = A_0 8^t$. $A = 1.500.000$ qdo $t = 1$; então $1.500.000 = A_0 \cdot 8$; $A_0 = 187.500$.

Assim, havia 187.500 bactérias inicialmente.

59. y é o número de verbos memorizados após t min, $y \leq 50$.

Temos uma tabela de condições iniciais.

t	0	30	T
y	0	20	49

$$\frac{dy}{50-y} = k\,dt;\quad \int\frac{dy}{50-y} = k\int dt;\quad -\ln(50-y) = kt + \ln C;\quad 50 - y = Ce^{-kt};\quad y = 50 - Ce^{-kt}$$

Com $y = 0$ e $t = 0$, temos $0 = 50 - C$; $C = 50$. Portanto, $y = 50 - 50e^{-kt}$.

Com y=20 e t=30, temos

$$20 = 50 - 50e^{-30k};\quad 50e^{-30k} = 30;\quad e^{-30k} = 0,6;\quad e^{-k} = (0,6)^{1/30}$$

Portanto, $y = 50 - 50(0,6)^{t/30}$.

(a) Qdo. $t = 60$, $y = 50 - 50(0,6)^2 = 32$.

(b) Qdo. $t = 120$, $y = 50 - 50(0,6)^3 \approx 43,5$

(c) Com y=49 e t=T, temos

$$49 = 50 - 50(0,6)^{T/30};\quad (0,6)^{T/30} = 0,02;\quad \frac{T}{30}\ln 0,6 = \ln 0,02;\quad T = \frac{30\ln 0,02}{\ln 0,6} = 229,7$$

Após 229,7 min $\approx$ 3,83 h, o estudante terá apenas um verbo para memorizar.

61. Seja x kg a quantidade de sal no tanque, t min após ter começado a fluir. Temos uma tabela de condições iniciais.

t	0	T
x	120	135

O tanque está recebendo 6 kg de sal por minuto e está perdendo $2\left(\frac{x}{60}\right)$ kg de sal por minuto. Então,

$\frac{dx}{dt} = 6 - \frac{x}{30} = \frac{180 - x}{30}$; $\frac{dx}{180 - x} = \frac{dt}{30}$; $\int \frac{dx}{180 - x} = \frac{1}{30}\int dt$; $-\ln|180 - x| + \ln C = \frac{t}{30}$; $180 - x = Ce^{-t/30}$

Com x=120, t=0, temos 60=C. Assim, $180 - x = 60e^{-t/30}$. Com x=135, t=T, temos

$45 = 60e^{-T/30}$; $0,75 = e^{-T/30}$; $\ln 0,75 = -\frac{T}{30}$; $T = 30 \cdot \ln 0,75 = 8,63$

Portanto, haverá 135 kg de sal no tanque, 8,63 minutos após o fluxo ter começado.

63. $f(x) = e^x$; $f'(x) = e^x$. Seja (c, e^c) o ponto sobre o gráfico de f, para o qual a reta tangente passe pela origem. A inclinação da reta por (c, e^c) e $(0, 0)$ é $\frac{e^c}{c}$. A reta também tem uma inclinação de $f'(c) = e^c$. Logo, $\frac{e^c}{c} = e^c$; $c = 1$. Assim, o ponto é $(1, e)$.

65. Da definição de uma derivada

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1 + x) - \log_a 1}{x - 0} = \frac{d}{dx}\log_a(1 + x)\Big|_{x=0} = \frac{\log_a e}{1 + x}\Big|_{x=0} = \log_a e$$

67. Da definição da derivada, $\lim_{x \to 1} \frac{x^b - 1}{x - 1} = \frac{d}{dx}x^b\Big|_{x=1} = bx^{b-1}\Big|_{x=1} = b$

69. Seja $g(x) = f(x)e^{-cx}$. Então, $g'(x) = f'(x)e^{-cx} + f(x)(-ce^{-cx})$.

Como $f'(x) = cf(x)$ e $g'(x) = cf(x)e^{-cx} - cf(x)e^{-cx} = 0$. Portanto, $g(x) = k$ onde k for uma constante. Logo, $f(x)e^{-cx} = k$; $f(x) = ke^{cx}$.

71. Se $t \geq 0$, então $\int_0^t e^{-|x|}dx = \int_0^t e^{-x}dx = -e^{-x}\Big]_0^t = -e^{-t} + e^0 = 1 - e^{-|t|}$.

Se $t < 0$, então $\int_0^t e^{-|x|}dx = \int_0^t e^{x}dx = e^{x}\Big]_0^t = e^{t} - e^0 = -(1 - e^{-|t|})$.

Podemos combinar esses dois casos e escrever $\int_0^t e^{-|x|}dx = \operatorname{sgn} t\,(1 - e^{-|t|})$.

73. (a) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x-3} = \ln|x-3|\Big]_{-2}^{-1} = \ln 4 - \ln 5 = \ln \frac{4}{5}$; $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big]_{-2}^{-1} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2 = \ln \frac{1}{2}$

Como $\ln \frac{4}{5} > \ln \frac{1}{2}$, então, $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x-3} \geq \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}$.

(b) $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$; $\int_1^2 \frac{dx}{x-3} = \ln|x-3|\Big]_1^2 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$

Como $\ln 2 > -\ln 2$, então, $\int_1^2 \frac{dx}{x} \geq \int_1^2 \frac{dx}{x-3}$.

(c) $\int_4^5 \frac{dx}{x-3} = \ln|x-3|\Big]_4^5 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$; $\int_4^5 \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big]_4^5 = \ln 5 - \ln 4 = \ln \frac{5}{4}$

Como $\ln 2 > \ln \frac{5}{4}$, então, $\int_4^5 \frac{dx}{x-3} \geq \int_4^5 \frac{dx}{x}$.

75. $x^2\frac{dy}{dx} + 2xy = 3x^2 + 1$; $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 3 + x^{-2}$. A ED é linear em y com $P = \frac{2}{x}$. $\int \frac{2}{x}dx = 2\ln x$;

$FI = e^{2\ln x} = x^2$. $\left(\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y\right)x^2 = 3x^2 + 1$; $yx^2 = \int(3x^2 + 1)\,dx = x^3 + x + C$; $y = x + x^{-1} + Cx^{-2}$

77. $\cos x\frac{dy}{dx} = 1 - y - \operatorname{sen} x$; $\frac{dy}{dx} + (\sec x)y = \sec x - \operatorname{tg} x$. A ED é linear em y com $P = \sec x$.

$\int \sec x\,dx = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$; $FI = e^{\ln(\sec x + \operatorname{tg} x)} = \sec x + \operatorname{tg} x$.

$\left[\frac{dy}{dx} + (\sec x)y\right](\sec x + \operatorname{tg} x) = (\sec x - \operatorname{tg} x)(\sec x + \operatorname{tg} x) = \sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 1$

$y(\sec x + \operatorname{tg} x) = \int 1\,dx = x + C$. Qdo y=2 e x=0, obtemos $2 = C$. $y(\sec x + \operatorname{tg} x) = x + 2$;

$y = (x + 2)/(\sec x + \operatorname{tg} x) = (x + 2)(\sec x - \operatorname{tg} x)$

79. A corrente de i ampères em t s. (a) Da equação (10) da Secção 7.8,

$$(0{,}03 + 0{,}01t)\frac{di}{dt} + 10i = 100;\quad (3 + t)\frac{di}{dt} + 1{,}000i = 10{,}000;\quad \frac{di}{dt} + \frac{1{,}000}{3+t}i = \frac{10{,}000}{3+t}$$

A ED é linear em i com $P = \frac{1000}{3+t}$. $\int \frac{1000}{3+t}dt = 1000\ln(3+t)$; $F.I = e^{1000\ln(3+t)} = (3+t)^{1000}$

$\left(\frac{di}{dt} + \frac{1000}{3+t}i\right)(3+t)^{1000} = 1000(3+t)^{999}$; $i(3+t)^{1{,}000} = \int 10000(3+t)^{999}dt = 10(3+t)^{1000} + C$

Qdo i=0 e t=0, obtemos $0 = 10(3^{1000}) + C$; $C = -10(3^{1000})$. Assim,

$$i(3+t)^{1{,}000} = 10(3+t)^{1{,}000} - 10(3^{1{,}000});\quad i = 10 - 10(1 + \tfrac{1}{3}t)^{-1{,}000}$$

(b) A corrente máxima é 10 ampères.

81. Seja y graus a temperatura e $Y = y - 40$ graus a diferença de temperatura t min atrás. Temos as condições laterais:

t	30	10	0
y	150	90	y_0

Da lei do resfriamento de Newton, $\frac{dY}{dt} = kY$, $Y = Y_0e^{kt}$

Se t=10 e $Y = 90 - 40 = 50$, obtemos $50 = Y_0e^{10k}$; $e^{10k} = 50Y_0^{-1}$.

Qdo $t = 30$ e $Y = 150 - 40 = 110$, obtemos $110 = Y_0e^{30} = Y_0(50Y_0^{-1})^3 = 125{,}000Y_0^{-2}$. Portanto,

$Y_0 = \sqrt{125{,}000/110} \approx 33{,}7$ e $y_0 = 73{,}7$. A temperatura no momento é 73,7°.

CAPÍTULO 8

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS E FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

EXERCÍCIOS 8.1 As Funções Trigonométricas Inversas

1. (a) $\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}\pi$ (b) $\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{6}\pi$ (c) $\cos^{-1}\frac{1}{2} = \frac{1}{3}\pi$ (d) $\cos^{-1}(-\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}\pi$

3. (a) $\operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{6}\pi$ (b) $\operatorname{tg}^{-1}(-\sqrt{3}) = -\frac{1}{3}\pi$ (c) $\sec^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{6}\pi$ (d) $\sec\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{7}{6}\pi$

5. (a) $\operatorname{sen}^{-1} 1 = \frac{1}{2}\pi$ (b) $\operatorname{sen}^{-1}(-1) = -\frac{1}{2}\pi$ (c) $\operatorname{cosec}^{-1} 1 = \frac{1}{2}\pi$

   (d) $\operatorname{cosec}^{-1}(-1) = -\frac{1}{2}\pi$ (e) $\operatorname{sen}^{-1} 0 = 0$

7. Dada $x = \operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{3}$. Então, $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$ e $0 < x < \frac{1}{2}\pi$.

   (a) $\cos x = \frac{2}{3}\sqrt{2}$ (b) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$

   (c) $\operatorname{cotg} x = 2\sqrt{2}$ (d) $\sec x = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{4}\sqrt{2}$

   (e) $\operatorname{cosec} x = 3$

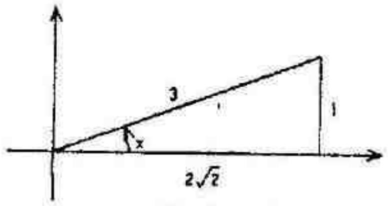


FIGURA 8.1.7

9. Dada $x = \operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{3})$. Então, $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{3}$ e $-\frac{1}{2}\pi < x < 0$.

   (a) $\cos x = \frac{2}{3}\sqrt{2}$ (b) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{4}\sqrt{2}$

   (c) $\operatorname{cotg} x = -2\sqrt{2}$ (d) $\sec x = \frac{3}{4}\sqrt{2}$

   (e) $\operatorname{cosec} x = -3$

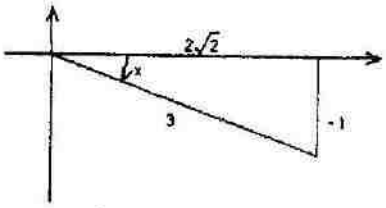


FIGURA 8.1.9

11. Dada $y = \operatorname{tg}^{-1}(-2)$. Então, $\operatorname{tg} y = -2$ e $-\frac{1}{2}\pi < y < 0$.

   (a) $\operatorname{sen} y = -\frac{-2}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{5}\sqrt{5}$ (b) $\cos y = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{5}$

   (c) $\operatorname{cotg} y = -\frac{1}{2}$ (d) $\sec y = \sqrt{5}$

   (e) $\operatorname{cosec} y = -\frac{1}{2}\sqrt{5}$

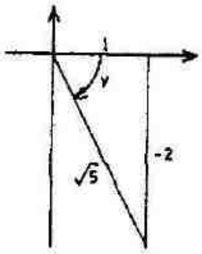


FIGURA 8.1.11

13. Dada $t = \operatorname{cosec}^{-1}(-\frac{3}{2})$. Então, $\operatorname{cosec} t = -\frac{3}{2}$ e $-\pi < t \leq -\frac{1}{2}\pi$.

   (a) $\operatorname{sen} t = -\frac{2}{3}$ (b) $\cos t = -\frac{1}{3}\sqrt{5}$

   (c) $\operatorname{tg} t = \frac{-2}{-\sqrt{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$ (d) $\operatorname{cotg} t = \frac{1}{2}\sqrt{5}$

   (e) $\sec t = \frac{3}{-\sqrt{5}} = -\frac{3}{5}\sqrt{5}$

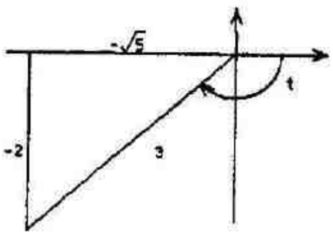


FIGURA 8.1.13

15. (a) $\text{sen}^{-1}(\text{sen}\ \frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{6}\pi$ (b) $\text{sen}^{-1}[\text{sen}(-\frac{1}{6}\pi)] = -\frac{1}{6}\pi$ (c) $\text{sen}^{-1}(\text{sen}\ \frac{5}{6}\pi) = \text{sen}^{-1}(\text{sen}\ \frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{6}\pi$

(d) $\text{sen}^{-1}(\text{sen}\ \frac{11}{6}\pi) = \text{sen}^{-1}[\text{sen}(-\frac{1}{6}\pi)] = -\frac{1}{6}\pi$

17. (a) $\cos^{-1}(\cos \frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{3}\pi$ (b) $\cos^{-1}[\cos(-\frac{1}{3}\pi)] = \cos^{-1}(\cos \frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{3}\pi$

(c) $\cos^{-1}(\cos \frac{2}{3}\pi) = \frac{2}{3}\pi$ (d) $\cos^{-1}(\cos \frac{4}{3}\pi) = \cos^{-1}(\cos \frac{2}{3}\pi) = \frac{2}{3}\pi$

19. (a) $\text{tg}^{-1}(\text{tg}\ \frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{6}\pi$ (b) $\text{tg}^{-1}[\text{tg}(-\frac{1}{3}\pi)] = -\frac{1}{3}\pi$

(c) $\text{tg}^{-1}(\text{tg}\ \frac{7}{6}\pi) = \text{tg}^{-1}(\text{tg}\ \frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{6}\pi$ (d) $\text{tg}^{-1}[\text{tg}(-\frac{4}{3}\pi)] = \text{tg}^{-1}[\text{tg}(-\frac{1}{3}\pi)] = -\frac{1}{3}\pi$

21. (a) $\text{cotg}^{-1}(\text{cotg}\ \frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{6}\pi$ (b) $\text{cotg}^{-1}[\text{cotg}(-\frac{1}{3}\pi)] = \text{cotg}^{-1}(\text{cotg}\ \frac{2}{3}\pi) = \frac{2}{3}\pi$

(c) $\text{cotg}^{-1}(\text{cotg}\ \frac{7}{6}\pi) = \text{cotg}^{-1}(\text{cotg}\ \frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{6}\pi$ (d) $\text{cotg}^{-1}[\text{cotg}(-\frac{4}{3}\pi)] = \text{cotg}^{-1}(\text{cotg}\ \frac{2}{3}\pi) = \frac{2}{3}\pi$

23. (a) $\sec^{-1}(\sec \frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{3}\pi$ (b) $\sec^{-1}[\sec(-\frac{1}{3}\pi)] = \sec^{-1}(\sec \frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{3}\pi$

(c) $\sec^{-1}(\sec \frac{2}{3}\pi) = \sec^{-1}(\sec \frac{4}{3}\pi) = \frac{4}{3}\pi$ (d) $\sec^{-1}(\sec \frac{4}{3}\pi) = \frac{4}{3}\pi$

25. (a) $\text{cosec}^{-1}(\text{cosec}\ \frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{6}\pi$ (b) $\text{cosec}^{-1}[\text{cosec}(-\frac{1}{6}\pi)] = \text{cosec}^{-1}[\text{cosec}(-\frac{5}{6}\pi)] = -\frac{5}{6}\pi$

(c) $\text{cosec}^{-1}(\text{cosec}\ \frac{5}{6}\pi) = \text{cosec}^{-1}(\text{cosec}\ \frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{6}\pi$ (d) $\text{cosec}^{-1}(\text{cosec}\ \frac{11}{6}\pi) = \text{cosec}^{-1}[\text{cosec}(-\frac{5}{6}\pi)] = -\frac{5}{6}\pi$

27. (a) Seja $\text{sen}^{-1}\frac{1}{2}\sqrt{3} = \alpha$. Então, $\text{sen}\ \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ e $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$. Portanto, $\text{tg}\ \alpha = \sqrt{3}$.

(b) Seja $\text{tg}^{-1}\frac{1}{2}\sqrt{3} = \beta$. Então, $\text{tg}\ \beta = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ e $0 < \beta < \frac{1}{2}\pi$. Portanto, $\text{sen}\ \beta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{1}{7}\sqrt{21}$.

29. (a) Seja $\text{sen}^{-1}(-\frac{1}{2}) = \alpha$. Então, $\text{sen}\ \alpha = -\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}\pi < \alpha < 0$. Portanto, $\cos \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

(b) Seja $\cos^{-1}(-\frac{1}{2}) = \beta$. Então, $\cos \beta = -\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}\pi < \beta < \pi$. Portanto, $\text{sen}\ \beta = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

31. Seja $\theta = \text{sen}^{-1}\left(-\frac{5}{13}\right)$. Então, $\text{sen}\,\theta = -\frac{5}{13}$ e $-\frac{1}{2}\pi < \theta < 0$.

$$\cos\left[2\ \text{sen}^{-1}\left(-\frac{5}{13}\right)\right] = \cos 2\theta = 1 - 2\ \text{sen}^2\theta = 1 - 2\left(-\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{169}{169} - \frac{50}{169} = \frac{119}{169}$$

33. Seja $\text{sen}^{-1}\frac{2}{3} = \alpha$. Então, $\text{sen}\ \alpha = \frac{2}{3}$ e $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$; logo, $\cos \alpha = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Seja $\cos^{-1}\frac{1}{3} = \beta$. Então, $\cos \beta = \frac{1}{3}$ e $0 < \beta < \frac{1}{2}\pi$; logo, $\text{sen}\ \beta = \frac{2}{3}\sqrt{2}$.

$$\text{sen}\left(\text{sen}^{-1}\frac{2}{3} + \cos^{-1}\frac{1}{3}\right) = \text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\ \alpha \cos \beta + \cos \alpha\ \text{sen}\ \beta = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{5}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{2} = \frac{2}{9}(1 + \sqrt{10})$$

35. $\alpha = \text{sen}^{-1}\frac{2}{3}$. Então, $\text{sen}\ \alpha = \frac{2}{3}$ e $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$; logo, $\cos \alpha = \frac{1}{3}\sqrt{5}$.

Seja $\beta = \text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$. Então, $\text{sen}\ \beta = -\frac{1}{3}$ e $-\frac{1}{2}\pi < \beta < 0$; logo, $\cos \beta = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

$$\cos\left[\text{sen}^{-1}\frac{2}{3} + 2\ \text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)\right] = \cos(\alpha + 2\beta) = \cos \alpha \cos 2\beta - \text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ 2\beta$$

$$= \cos \alpha(1 - 2\ \text{sen}^2\beta) - \text{sen}\ \alpha(2\ \text{sen}\ \beta \cos \beta) = \frac{1}{3}\sqrt{5}\left[1 - 2\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right] - \frac{2}{3}\left[2\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{5}\left[\frac{7}{9}\right] - \frac{2}{3}\left[-\frac{4}{9}\sqrt{2}\right] = \frac{1}{27}(7\sqrt{5} + 8\sqrt{2})$$

37. Seja $\alpha = \text{tg}^{-1}\frac{3}{4}$. Então, $\text{tg}\,\alpha = \frac{3}{4}$ e $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$.

Seja $\beta = \text{sen}^{-1}\frac{1}{2}$. Então, $\text{sen}\,\beta = \frac{1}{2}$ e $0 < \beta < \frac{1}{2}\pi$; logo, $\text{tg}\,\beta = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

$$\text{tg}\left(\text{tg}^{-1}\frac{3}{4} - \text{sen}^{-1}\frac{1}{2}\right) = \text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}{1 + \text{tg}\,\alpha\ \text{tg}\,\beta} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\sqrt{3}}{1 + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\sqrt{3}} = \frac{9 - 4\sqrt{3}}{12 + 3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(9 - 4\sqrt{3})(4 - \sqrt{3})}{3(4 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{3})} = \frac{48 - 25\sqrt{3}}{3(16 - 3)} = \frac{1}{39}(48 - 25\sqrt{3})$$

39. Seja $\alpha = \text{sen}^{-1}\frac{1}{3}$. Então, $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{3}$ e $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$; logo, $\cos\alpha = \frac{2}{3}\sqrt{2}$.

Seja $\beta = \text{tg}^{-1}\frac{1}{2}$. Então, $\text{tg}\,\beta = \frac{1}{2}$ e $0 < \beta < \frac{1}{2}\pi$; logo, $\text{sen}\,\beta = \frac{1}{5}\sqrt{5}$ e $\cos\beta = \frac{2}{5}\sqrt{5}$.

$$\cos\left(\text{sen}^{-1}\frac{1}{3} - \text{tg}^{-1}\frac{1}{2}\right) = \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta = \frac{2}{3}\sqrt{2}\cdot\frac{2}{5}\sqrt{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\sqrt{5} = \frac{1}{15}(4\sqrt{10} + \sqrt{5})$$

41. Seja $\cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \alpha$. Então, $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$ e $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$; logo, $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Seja $\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \beta$. Então, $\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ e $0 < \beta < \frac{1}{2}\pi$; logo, $\text{sen}\,\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta = \frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Como $0 < \alpha + \beta < \pi$ e $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, então $\alpha + \beta = \frac{1}{4}\pi$.

Esboços dos gráficos dos Exercícios de 43 a 49 aparecem no texto nas Figs. 8.1-43 até 8.1-49.

51. $y = 2\,\text{sen}\,4\pi(t + \frac{1}{8})$, $t \geq 0$.

(a) $\frac{1}{2}y = \text{sen}\,4\pi(t + \frac{1}{8})$. Sejam k e n quaisquer inteiros. Então,

$$\text{sen}^{-1}(\tfrac{1}{2}y) = 4\pi(t + \tfrac{1}{8}) - 2k\pi \quad \text{ou} \quad \pi - \text{sen}^{-1}(\tfrac{1}{2}y) = 4\pi(t + \tfrac{1}{8}) - 2n\pi$$

$$t = \frac{1}{4\pi}\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}y\right) - \frac{1}{8} + \frac{1}{2}k \quad \text{ou} \quad t = \frac{1}{8} - \frac{1}{4\pi}\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}y\right) + \frac{1}{2}n$$

(b) Tomando $y=1$ com $t > 0$, obtemos

$$t = \frac{1}{4\pi}\text{sen}^{-1}\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2}k = \frac{1}{24} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2}k = \frac{6k - 1}{12} \quad \text{ou} \quad t = \frac{1}{8} - \frac{1}{4\pi}\text{sen}^{-1}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}n = \frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{1}{2}n = \frac{6n + 1}{12}$$

Tomando $n=0$, $k=1$, e $n=1$, obtemos os valores $t = \frac{1}{12}$, $t = \frac{5}{12}$ e $t = \frac{7}{12}$.

53. $\text{cosec}^{-1}x = \frac{1}{2}\pi - \sec^{-1}x$ para $|x| \geq 1$ e a imagem de $\sec^{-1}$ é $[0, \frac{1}{2}\pi) \cup [\pi, \frac{3}{2}\pi)$.

Se $\sec^{-1}x \in [0, \frac{1}{2}\pi)$, então $\text{cosec}^{-1}x \in (0, \frac{1}{2}\pi]$; se $\sec^{-1}x \in [\pi, \frac{3}{2}\pi)$, então $\text{cosec}^{-1}x \in (-\pi, -\frac{1}{2}\pi]$.

Portanto, a imagem de cosec^{-1} é $(-\pi, -\frac{1}{2}\pi] \cup (0, \frac{1}{2}\pi]$.

EXERCÍCIOS 8.2 Derivadas das Funções Trigonométricas Inversas

1. $f'(x) = \frac{d}{dx}(\text{sen}^{-1}\frac{1}{2}x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2}}\frac{d}{dx}(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$

3. $g'(x) = \frac{d}{dx}(\text{tg}^{-1}2x) = \frac{1}{1 + (2x)^2}\frac{d}{dx}(2x) = \frac{2}{1 + 4x^2}$

5. $F'(x) = \frac{d}{dx}(2\cos^{-1}\sqrt{x}) = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{1 - x}}\right)\frac{d}{dx}\sqrt{x} = -\frac{2}{\sqrt{1 - x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{x - x^2}}$

7. $g'(t) = \frac{d}{dt}(\sec^{-1}5t + \text{cosec}^{-1}5t) = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\pi) = 0$

9. $f'(x) = \frac{d}{dx}(\text{sen}^{-1}\sqrt{1 - x^2}) = \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - x^2)}}\frac{d}{dx}\sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}}(-2x) = -\frac{x}{|x|\sqrt{1 - x^2}}$

11. $F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\text{cotg}^{-1}\frac{2}{x} + \text{tg}^{-1}\frac{x}{2}\right) = \frac{-1}{1 + \left(\frac{2}{x}\right)^2}\left(-\frac{2}{x^2}\right) + \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{x^2 + 4} + \frac{2}{4 + x^2} = \frac{4}{4 + x^2}$

13. $h'(y) = \frac{d}{dy}(y\,\text{sen}^{-1}2y) = y.\frac{1}{\sqrt{1 - 4y^2}}(2) + \text{sen}^{-1}2y = \frac{2y}{\sqrt{1 - 4y^2}} + \text{sen}^{-1}2y$

15. $g'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^2\sec^{-1}\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}(x^2)\cdot\sec^{-1}\frac{1}{x} + x^2\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1}\frac{1}{x}\right)$

$= 2x\sec^{-1}\frac{1}{x} + x^2\frac{1}{\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sec^{-1}\frac{1}{x} - \frac{x}{\sqrt{\frac{1 - x^2}{x^2}}} = 2x\sec^{-1}\frac{1}{x} - \frac{x|x|}{\sqrt{1 - x^2}}$

17. $f'(x) = \frac{d}{dx}\cos^{-1}\text{sen}\,x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2x}}(\cos x) = -\frac{\cos x}{|\cos x|}$

19. $F'(x) = \frac{d}{dx}\ln(\text{tg}^{-1}x^2) = \frac{1}{\text{tg}^{-1}x^2}\frac{d}{dx}(\text{tg}^{-1}x^2) = \frac{1}{\text{tg}^{-1}x^2}\cdot\frac{1}{1 + x^4}(2x) = \frac{2x}{(1 + x^4)\ \text{tg}^{-1}x^2}$

21. $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(4\,\text{sen}^{-1}\frac{1}{2}x + x\sqrt{4 - x^2}\right) = \frac{4}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2}}\left(\frac{1}{2}\right) + \sqrt{4 - x^2} + x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}}$

$= \frac{4}{\sqrt{4 - x^2}} + \sqrt{4 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{4 - x^2}{\sqrt{4 - x^2}} + \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{4 - x^2} = 2\sqrt{4 - x^2}$

23. $h'(x) = \frac{d}{dx}\text{cosec}^{-1}(2e^{3x}) = \frac{-1}{2e^{3x}\sqrt{4e^{6x} - 1}}\cdot 6e^{3x} = \frac{-3}{\sqrt{4e^{6x} - 1}}$

25. $\frac{d}{dx}(x\,\text{cotg}^{-1}x + \ln\sqrt{1 + x^2}) = \frac{d}{dx}\left[x\,\text{cotg}^{-1}x + \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)\right] = \text{cotg}^{-1}x - \frac{x}{1 + x^2} + \frac{2x}{2(1 + x^2)} = \text{cotg}^{-1}x$

27. $e^{x+y} = \cos^{-1}x$; $e^{x+y}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$; $1 + \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{e^{x+y}\sqrt{1 - x^2}}$; $\frac{dy}{dx} = -1 - \frac{1}{\cos^{-1}x\sqrt{1 - x^2}}$

29. $x \operatorname{sen} y + x^3 = \operatorname{tg}^{-1} y$; $\operatorname{sen} y + x \cos y \dfrac{dy}{dx} + 3x^2 = \dfrac{1}{1+y^2} \cdot \dfrac{dy}{dx}$

$(1+y^2)(3x^2 + \operatorname{sen} y) = [1 - x \cos y(1+y^2)]\dfrac{dy}{dx}$; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(1+y^2)(3x^2+\operatorname{sen} y)}{1 - x\cos y(1+y^2)}$

31. $y = \sec^{-1}(2x+1)$; $\left.\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=1/2} = \left.\dfrac{2}{(2x+1)\sqrt{(2x+1)^2-1}}\right]_{x=1/2} = \dfrac{2}{2\sqrt{2^2-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Em $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\pi)$ a inclinação da reta tangente é $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ e sua equação é $y - \frac{1}{3}\pi = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2})$; $2\sqrt{3}x - 6y + 2\pi - \sqrt{3} = 0$. A inclinação da reta normal é $-\sqrt{3}$ e sua equação é $y - \frac{1}{3}\pi = -\sqrt{3}(x - \frac{1}{2})$; $6\sqrt{3}x + 6y - 2\pi - 3\sqrt{3} = 0$.

33. Um letreiro de 3 m de altura tem sua base 2 m acima dos olhos de uma mulher que está tentando lê-lo. Seja E a posição dos olhos da mulher, x m a distância de E, a partir da parede, e θ a medida em radianos do ângulo subentendido em E pelo letreiro. Seja A a parte superior do letreiro, B a sua base e C o ponto da parede no nível dos olhos da mulher. Então,

$$\theta = m(\angle AEB) = m(\angle AEC) - m(\angle BEC) = \operatorname{cotg}^{-1}\frac{x}{5} - \operatorname{cotg}^{-1}\frac{x}{2}, \quad x \geq 0$$

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{25}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{4}} = \frac{-5}{25+x^2} + \frac{2}{4+x^2} = \frac{-5(4+x^2)+2(25+x^2)}{(25+x^2)(4+x^2)} = \frac{3(10-x^2)}{(25+x^2)(4+x^2)}$$

Seja $\dfrac{d\theta}{dx} = 0$. $\sqrt{10}$ é o único número crítico. Se $0 \leq x < \sqrt{10}$ então $\dfrac{d\theta}{dx} > 0$ e se $x > \sqrt{10}$, então $\dfrac{d\theta}{dx} < 0$. Logo, θ tem um valor máximo absoluto qdo. $x = \sqrt{10}$.

35. Em t s, seja E a posição dos olhos do observador, x cm a distância de E a partir da parede e θ a medida em radianos do ângulo subentendido em E pelo quadro. Seja A a parte superior do quadro, B a parte inferior e C o ponto na parede ao nível dos olhos do observador.

$$\theta = m(\angle AEB) = m(\angle AEC) - m(\angle BEC) = \operatorname{cotg}^{-1}\frac{x}{70} - \operatorname{cotg}^{-1}\frac{x}{30}$$

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right]_{x=100} = \left[-\frac{1}{70}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{4.900}} + \frac{1}{30}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{900}}\right]_{x=100}\cdot\frac{dx}{dt} = \left[-\frac{1}{70\left(1+\frac{100}{49}\right)} + \frac{1}{30\left(1+\frac{100}{9}\right)}\right](-40)$$

$$= \left(-\frac{7}{1.490} + \frac{3}{1.090}\right)(-40) = \frac{1.264}{16.241} \approx 0,078$$

Logo, qdo o observador está a 100 m da parede, θ é decrescente em 0,078 rad/s.

37. Em t min, seja x km a distância do foco de luz em S, partindo do ponto A, na praia, mais próximo da luz e seja θ a medida em radianos do ângulo subentendido na luz, pelo segmento de reta AS. Como o holofote faz 2 revoluções por minuto $\frac{d\theta}{dt} = 4\pi$. Qdo $x = 2$, $\sec\theta = \frac{1}{3}\sqrt{13}$. Portanto,

$$x = 3\ \operatorname{tg}\ \theta;\quad \left.\frac{dx}{dt}\right]_{x=2} = 3\sec^2\theta\cdot\left.\frac{d\theta}{dt}\right]_{x=2} = 3\cdot\frac{13}{9}\cdot 4\pi = \frac{52}{3}\pi$$

Logo, a velocidade escalar do holofote ao longo da praia é $\frac{52}{3}\pi$ km/min.

39. Veja a Figura 8.2.39. Seja L a posição da luz, C o centro da circunferência, M o oposto diamétrico de L. Em t s, seja W a posição da mulher, S a posição de sua sombra, θ a medida em radianos de $\angle CLW = \angle MLS$, x o comprimento do segmento CW e y o comprimento do arco MS. Como a medida do ângulo central MCS é duas vezes a medida do ângulo circunscrito MLS, $y = r(2\theta) = 2r\ \operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{r}$. Logo,

$$\left.\frac{dy}{dt}\right]_{x=r/2} = 2r\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{r}\right)^2}\cdot\frac{1}{r}\cdot\left.\frac{dx}{dt}\right]_{x=r/2} = 2\cdot\frac{1}{1+(\frac{1}{2})^2}\cdot 1,5 = 2\cdot\frac{4}{5}\cdot 1,5 = 2,4$$

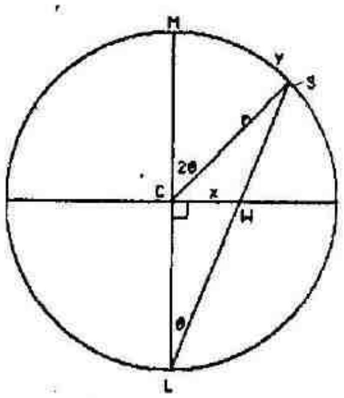


FIGURA 8.2.39

Logo, no instante dado, a sombra está se deslocando pela parede a 2,4 m/s.

41. O comprimento da corda entre o peso e o gancho é x m qdo a medida em radianos do ângulo entre a corda e o chão é θ, e $\frac{dx}{dt} = -\frac{3}{4}$. Então,

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{x}{8},\ x > 8;\quad \theta = \operatorname{cosec}^{-1}\frac{x}{8};\quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{\frac{x}{8}\sqrt{\frac{x^2}{64}-1}}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{-8}{x\sqrt{x^2-64}}\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{6}{x\sqrt{x^2-64}}$$

43. Seja $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}x + \cos^{-1}x$. Para $x \in (-1, 1)$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$; logo, $f(x) = C$. Seja $x = 0$: $0 + \frac{1}{2}\pi = C$; $C = \frac{1}{2}\pi$ de modo que $f(x) = \frac{1}{2}\pi$ para $x \in (-1, 1)$. Mas $f(-1) = -\frac{1}{2}\pi + \pi = \frac{1}{2}\pi$ e $f(1) = \frac{1}{2}\pi + 0 = \frac{1}{2}\pi$. Logo, para todo $x \in [-1, 1]$, $f(x) = \frac{1}{2}\pi$ de modo que $\cos^{-1}x = \frac{1}{2}\pi - \operatorname{sen}^{-1}x$.

45. $f(x) = \operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{x} - \operatorname{cotg}^{-1}x$ (a) $f'(x) = \frac{1}{1+(1/x)^2}\cdot\frac{-1}{x^2} - \left(\frac{-1}{1+x^2}\right) = -\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} = 0$

(b) $f(-1) = \operatorname{tg}^{-1}(-1) - \operatorname{cotg}(-1) = -\frac{1}{4}\pi - (\frac{3}{4}\pi) = -\pi$ enquanto $f(1) = \operatorname{tg}^{-1}1 - \operatorname{cotg}^{-1}1 = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi$

(c) O Teorema 5.1.2 não é contradito pois f não é definida em 0.

EXERCÍCIOS 8.3 Integrais que Resultam em Funções Trigonométricas Inversas

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \frac{1}{2}\,\text{sen}^{-1} 2x + C$

3. $\int \frac{dx}{9x^2+16} = \frac{1}{3}\int \frac{3\,dx}{(3x)^2+4^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\,\text{tg}^{-1}\frac{3}{4}x + C = \frac{1}{12}\,\text{tg}^{-1}\frac{3x}{4} + C$

5. $\int \frac{dx}{4+(x-1)^2} = \int \frac{d(x-1)}{2^2+(x-1)^2} = \frac{1}{2}\,\text{tg}^{-1}\frac{x-1}{2} + C$

7. $\int \frac{dx}{4x\sqrt{x^2-16}} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4^2}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\sec^{-1}\frac{x}{4} + C = \frac{1}{16}\sec^{-1}\frac{x}{4} + C$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{\sqrt{5}\,dx}{\sqrt{2-(\sqrt{5}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\text{sen}^{-1}\frac{\sqrt{5}\,x}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\text{sen}^{-1}\frac{\sqrt{10}}{2}x + C$

11. $\int \frac{r\,dr}{\sqrt{16-9r^4}} = \frac{1}{6}\int \frac{6r\,dr}{\sqrt{4^2-(3r^2)^2}} = \frac{1}{6}\,\text{sen}^{-1}\frac{3r^2}{4} + C$

13. $\int \frac{e^x\,dx}{7+e^{2x}} = \int \frac{e^x\,dx}{(\sqrt{7})^2+(e^x)^2} = \frac{1}{\sqrt{7}}\,\text{tg}^{-1}\frac{e^x}{\sqrt{7}} + C$

15. Seja $x = u^2$, $dx = 2u\,du$. Então, $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int \frac{2u\,du}{(1+u^2)u} = 2\int \frac{du}{1+u^2} = 2\,\text{tg}^{-1}u + C = 2\,\text{tg}^{-1}\sqrt{x} + C$

17. $\int \frac{dx}{x^2-x+2} = \int \frac{dx}{(x^2-x+\frac{1}{4})+(2-\frac{1}{4})} = \int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}} = \frac{2}{\sqrt{7}}\,\text{tg}^{-1}\left[\frac{2}{\sqrt{7}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right] + C = \frac{2}{\sqrt{7}}\,\text{tg}^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{7}} + C$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{15+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(15+1)-(x^2-2x+1)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4^2-(x-1)^2}} = \text{sen}^{-1}\frac{x-1}{4} + C$

Usando o Teorema 8.2.2 com $u = \frac{1-x}{4}$ temos a resposta na forma $\cos^{-1}\frac{1-x}{4} + C$.

21. Seja $v = x+1$; então, $x = v-1$ e $dx = dv$. Logo,

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(3+1)-(x^2+2x+1)}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}} = \int \frac{(v-1)\,dv}{\sqrt{4-v^2}} = \int \frac{v\,dv}{\sqrt{4-v^2}} - \int \frac{dv}{\sqrt{4-v^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int (4-v^2)^{-1/2}(-2v\,dv) - \text{sen}^{-1}\frac{v}{2} = -\sqrt{4-v^2} - \text{sen}^{-1}\frac{v}{2} + C = -\sqrt{3-2x-x^2} - \text{sen}^{-1}\frac{x+1}{2} + C$$

23. Seja $v = x+1$; logo $x = v-1$ e $dx = dv$. Então,

$$\int \frac{(2+x)\,dx}{\sqrt{4-2x-x^2}} = \int \frac{(2+x)\,dx}{\sqrt{5-(x^2+2x+1)}} = \int\frac{(2+x)\,dx}{\sqrt{5-(x+1)^2}} = \int \frac{(v+1)\,dv}{\sqrt{5-v^2}} = \int\frac{v\,dv}{\sqrt{5-v^2}} + \int \frac{dv}{\sqrt{5-v^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int(5-v^2)^{-1/2}(-2v\,dv) + \text{sen}^{-1}\frac{v}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5-v^2} + \text{sen}^{-1}\frac{v}{\sqrt{5}}+C$$

$$= -\sqrt{4-2x-x^2} + \text{sen}^{-1}\frac{x+1}{\sqrt{5}}$$

25. $$\int\frac{2x^3\,dx}{2x^2-4x+3} = \int\left(x+2+\frac{5x-6}{2x^2-4x+3}\right)dx = \frac{1}{2}x^2+2x+\int\frac{\frac{5}{4}(4x-4)-1}{2x^2-4x+3}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{5}{4}\int\frac{(4x-4)\,dx}{2x^2-4x+3} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^2+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^2+2x+\frac{5}{4}\ln(2x^2-4x+3) - \frac{1}{2}\sqrt{2}\;\text{tg}^{-1}\sqrt{2}(x-1)+C$$

27. $$\int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}\,dx = \int_0^1\frac{dx}{1+x^2}+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x\,dx}{1+x^2} = \text{tg}^{-1}x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big]_0^1$$

$$=(\text{tg}^{-1}1+\tfrac{1}{2}\ln 2)-(\text{tg}^{-1}0+\tfrac{1}{2}\ln 1) = \tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}\ln 2$$

29. $$\int_{-4}^{-2}\frac{dt}{\sqrt{-t^2-6t-5}} = \int_{-4}^{-2}\frac{dt}{\sqrt{4-(t^2+6t+9)}} = \int_{-4}^{-2}\frac{dt}{\sqrt{2^2-(t+3)}}$$

$$=\text{sen}^{-1}\frac{t+3}{2}\Big]_{-4}^{-2} = \text{sen}^{-1}\frac{1}{2} - \text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}\pi - \left(-\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{3}\pi$$

31. $$\int_0^1\frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int_0^1\frac{e^x\,dx}{(e^x)^2+1} = \text{tg}^{-1}e^x\Big]_0^1 = \text{tg}^{-1}e - \text{tg}^{-1}1 = \text{tg}^{-1}e - \tfrac{1}{4}\pi$$

33. Seja $u = \ln x$; logo $du = \frac{1}{x}\,dx$. Então, $\int_1^e \frac{dx}{x[1+(\ln x)^2]} = \int_0^1\frac{du}{1+u^2} = \text{tg}^{-1}u\Big]_0^1 = \text{tg}^{-1}1-\text{tg}^{-1}0 = \frac{1}{4}\pi$.

35. A unidades de área é a área da região limitada por $y = 8/(x^2+4)$, pelos eixos e por $x=2$.

$$A = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} \frac{8}{\xi_i^2+4}\Delta_i x = 8\int_0^2\frac{1}{x^2+2^2}\,dx = 8\cdot\frac{1}{2}\text{tg}^{-1}\frac{x}{2}\Big]_0^2 = 4(\text{tg}^{-1}1-\text{tg}^{-1}0) = 4(\tfrac{1}{4}\pi-0)=\pi$$

37. A unidades de área é a área limitada por $y = 1/\sqrt{5-4x-x^2}$, pelo eixo x, $x = -\frac{7}{2}$, e $x=\frac{1}{2}$.

$$A=\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{5-4\xi_i-\xi_i^2}}\Delta_i x = \int_{-7/2}^{-1/2}\frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int_{-7/2}^{-1/2}\frac{dx}{\sqrt{9-(x^2+4x+4)}} = \int_{-7/2}^{-1/2}\frac{dx}{\sqrt{3^2-(x+2)^2}}$$

$$=\text{sen}^{-1}\frac{x+2}{3}\Big]_{-7/2}^{-1/2} = \text{sen}^{-1}\frac{1}{2}-\text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}\pi-\left(-\frac{1}{6}\pi\right)=\frac{1}{3}\pi$$

39. $\frac{d}{du}\left(\frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a}\right) = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\frac{u}{a}\sqrt{\frac{u^2}{a^2}-1}}\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{u\sqrt{u^2-a^2}}$ como $a>0$, de modo que $\int\frac{1}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a}+C$

41. Seja $u = ax$, $du = a\,dx$. Então, $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \int \frac{a\,dx}{a^2+a^2x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{a}\,tg^{-1}x + C = \frac{1}{a}\,tg^{-1}\frac{u}{a} + C$

43. Temos $v\frac{dv}{ds} = -k^2s$; $\int v\,dv = -k^2\int s\,ds$; $\frac{1}{2}v^2 = -\frac{1}{2}k^2s^2 + \frac{C}{2}$; $v^2 = -k^2s^2 + C$.

Como $v^2 \geq 0$ e $-k^2s^2 \leq 0$, então $C \geq 0$. Se $C = 0$, então $v = s = 0$ e a partícula não está se movendo. Portanto, seja $c = k^2a^2$ com $a > 0$. Então,

$$v^2 = -k^2s^2 + k^2a^2; \quad v = \pm k\sqrt{a^2 - s^2}$$

(b) Como $v = \frac{ds}{dt}$ temos $\frac{ds}{dt} = \pm k\sqrt{a^2 - s^2}$; $\int \frac{ds}{\sqrt{a^2 - s^2}} = \pm k\int dt$; $-\cos^{-1}\frac{s}{a} = \pm kt + C$.

Qdo. $t = 0$, $s = a$. Assim, $C = \cos^{-1} 1 = 0$. Logo, $-\cos^{-1}\frac{s}{a} = \pm kt$; $\cos^{-1}\frac{s}{a} = \mp kt$; $\frac{s}{a} = \cos(\mp kt)$.

Como $\cos(-kt) = \cos(kt)$, temos $s = a\cos kt$.

(c) Como $a > 0$ e $\cos kt \leq 1$, então o valor máximo de $|s| = |a\cos t|$ é a.

(d) Seja t_1 o valor de t qdo. $s=a$ e seja m qualquer inteiro par. Então,

$$a = a\cos kt_1; \quad \cos kt_1 = 1; \quad kt_1 = m\pi; \quad t_1 = \frac{m\pi}{k}$$

Seja t_2 o valor de t qdo. $s=-a$ e seja n qualquer inteiro ímpar. Então,

$$-a = a\cos kt_2; \quad \cos kt_2 = -1; \quad kt_2 = n\pi; \quad t_2 = \frac{n\pi}{k}$$

Logo, a partícula está em a qdo. $t=0$; está em $-a$ qdo. $t = \frac{\pi}{k}$; está em a qdo. $t = \frac{2\pi}{k}$. Portanto, se T s for o tempo para a partícula ir de a a $-a$ e voltar

$$T = \frac{2\pi}{k} - 0 = \frac{2\pi}{k}$$

45. Seja s cm a distância orientada da partícula da origem em t s. Então,

$$s = 5 - 10\,sen^2 2t = 5(1 - 2\,sen^2 2t) = 5\cos 4t; \quad v = \frac{ds}{dt} = -20\,sen\,4t; \quad \frac{dv}{dt} = -80\cos 4t = -16s$$

A última igualdade tem a forma $\frac{dv}{dt} = -k^2s$. Portanto, o movimento é harmônico simples.

47. $\frac{d}{du}(-cotg^{-1}u) = -\left(-\frac{1}{1+u^2}\right) = \frac{1}{1+u^2}$ de modo que $\int \frac{du}{1+u^2} = -cotg^{-1}u + C$. Pela Definição 8.1.4,

$$-cotg^{-1}u + C = -(\tfrac{1}{2}\pi - tg^{-1}u) + C = tg^{-1}u + \bar{C} \quad \text{onde} \quad \bar{C} = C - \tfrac{1}{2}\pi$$

Portanto, a fórmula deste exercício é equivalente à fórmula (2).

EXERCÍCIOS 8.4 As Funções Hiperbólicas

1. $1 - \operatorname{cotgh}^2 x = 1 - \dfrac{\cosh^2 x}{\operatorname{senh}^2 x} = \dfrac{\operatorname{senh}^2 x - \cosh^2 x}{\operatorname{senh}^2 x} = \dfrac{-1}{\operatorname{senh}^2 x} = -\cosh^2 x$

3. $\operatorname{tgh}(x + y) = \dfrac{\operatorname{senh}(x + y)}{\cosh(x + y)} = \dfrac{\operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y}{\cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y}$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{senh} x \cosh y}{\cosh x \cosh y} + \dfrac{\cosh x \operatorname{senh} y}{\cosh x \cosh y}}{\dfrac{\cosh x \cosh y}{\cosh x \cosh y} + \dfrac{\operatorname{senh} x \operatorname{senh} y}{\cosh x \cosh y}} = \frac{\operatorname{tgh} x + \operatorname{tgh} y}{1 + \operatorname{tgh} x \operatorname{tgh} y}$$

5. (a) Do Exercício 4, temos a identidade

$$2\cosh^2 y - 1 = \cosh 2y; \quad \cosh^2 y = \frac{\cosh 2y + 1}{2}; \quad \cosh y = \sqrt{\frac{\cosh 2y + 1}{2}}, \quad \text{pois} \quad \cosh y \geq 1$$

Seja $y = \frac{1}{2}x$; $x = 2y$. Então, temos $\cosh \frac{1}{2}x = \sqrt{\dfrac{\cosh x + 1}{2}}$.

(b) Do Exercício 4, temos também a identidade

$$2\operatorname{senh}^2 y + 1 = \cosh 2y; \quad \operatorname{senh}^2 y = \frac{\cosh 2y - 1}{2}; \quad \operatorname{senh} y = \pm\sqrt{\frac{\cosh 2y - 1}{2}}$$

Seja $y = \frac{1}{2}x$; $x = 2y$. Então, temos $\operatorname{senh} \frac{1}{2}x = \pm\sqrt{\dfrac{\cosh x - 1}{2}}$.

7. (a) $\operatorname{tgh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ e $\operatorname{tgh}(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x}$. Portanto, $\operatorname{tgh}(-x) = -\operatorname{tgh} x$.

(b) $\operatorname{sech} x = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$ e $\operatorname{sech}(-x) = \dfrac{2}{e^{-x} + e^x}$. Portanto, $\operatorname{sech}(-x) = \operatorname{sech} x$.

9. $\cosh 3x = \cosh[x + (2x)] = \cosh x \cosh(2x) + \operatorname{senh} x \operatorname{senh}(2x)$

$= \cosh x(2\cosh^2 x - 1) + \operatorname{senh} x(2 \operatorname{senh} x \cosh x) = 2\cosh^3 x - \cosh x + 2\operatorname{senh}^2 x \cosh x$

$= 2\cosh^3 x - \cosh x + 2(\cosh^2 x - 1)\cosh x = 4\cosh^3 x - 3\cosh x$

11. A fórmula (9) estabelece que $\cosh x + \operatorname{senh} x = e^x$. Logo,

$$(\operatorname{senh} x + \cosh x)^n = (e^x)^n = e^{nx} = \cosh nx + \operatorname{senh} nx$$

13. $\operatorname{tgh}(\ln x) = \dfrac{e^{\ln x} - e^{-\ln x}}{e^{\ln x} + e^{-\ln x}} = \dfrac{x - \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x}} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

15. (a) $D_x(\operatorname{senh} x) = D_x\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$

(b) $D_x(\operatorname{cotgh} x) = D_x\left(\dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}\right) = \dfrac{\operatorname{senh} x \operatorname{senh} x - \cosh x \cosh x}{\operatorname{senh}^2 x} = \dfrac{\operatorname{senh}^2 x - \cosh^2 x}{\operatorname{senh}^2 x} = \dfrac{-1}{\operatorname{senh}^2 x} = -\operatorname{cosech}^2 x$

17. $f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\text{tgh}\ \frac{4x+1}{5}\right] = \frac{4}{5}\,\text{sech}^2\frac{4x+1}{5}$

19. $f'(y) = \frac{d}{dy}\left[\text{senh}\ e^{2y}\right] = 2e^{2y}\cosh e^{2y}$

21. $f'(w) = \frac{d}{dw}(\text{sech}^2 4w) = 2\,\text{sech}\,4w\,\frac{d}{dw}(\text{sech}\,4w) = 2\,\text{sech}\,4w(-\text{sech}\,4w\ \text{tgh}\ 4w)\,4 = -8\,\text{sech}^2 4w\ \text{tgh}\ 4w$

23. $f'(x) = \frac{d}{dx}(e^x\cosh x) = \frac{d}{dx}\left[e^x\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\right] = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}\right) = e^{2x}$

25. $\frac{d}{dt}\ln(\text{tgh}\ t) = \frac{1}{\text{tgh}\ t}(\text{sech}^2 t) = \frac{\cosh t}{\text{senh}\,t}\cdot\frac{1}{\cosh^2 t} = \frac{1}{\text{senh}\,t\cosh t} = \frac{2}{2\,\text{senh}\,t\cosh t} = \frac{2}{\text{senh}\,2t} = 2\,\text{cosech}\,2t$

27. $G'(x) = \frac{d}{dx}\text{sen}^{-1}(\text{tgh}\ x^2) = \frac{1}{\sqrt{1-\text{tgh}^2 x^2}}\frac{d}{dx}(\text{tgh}\ x^2) = \frac{1}{\text{sech}\,x^2}(\text{sech}^2x^2)(2x) = 2x\,\text{sech}\,x^2$

29. Seja $y = x^{\text{senh}\,x}$, $x > 0$. $\ln y = \text{senh}\,x\ln x$; $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \cosh x\ln x + \text{senh}\,x\left(\frac{1}{x}\right)$

$\frac{dy}{dx} = x^{\text{senh}\,x}\left(\frac{x\cosh x\ln x + \text{senh}\,x}{x}\right) = x^{\text{senh}\,x-1}(x\cosh x\ln x + \text{senh}\,x)$

31. (a) $\int \text{tgh}\ u\,du = \int\frac{\text{senh}\,u\,du}{\cosh u} = \ln|\cosh u| + C$ (b) $\int \text{cotgh}\ u\,du = \int\frac{\cosh u\,du}{\text{senh}\,u} = \ln|\text{senh}\,u| + C$

33. $\int \text{cosech}\ u\,du = \int\frac{du}{\text{senh}\,u} = \int\frac{du}{2\,\text{senh}\,\frac{1}{2}u\cosh\frac{1}{2}u} = \int\frac{\frac{1}{\cosh^2\frac{1}{2}u}}{\frac{\text{senh}\,\frac{1}{2}u}{\cosh\frac{1}{2}u}}\left(\frac{1}{2}du\right) = \int\frac{\text{sech}^2\frac{1}{2}u}{\text{tgh}\,\frac{1}{2}u}\left(\frac{1}{2}du\right) = \ln\left|\text{tgh}\ \frac{1}{2}u\right| + C$

35. Seja $u = e^t$; $du = e^t dt$. Então, $\int e^t\cosh(e^t)\,\text{senh}(e^t)\,dt = \cos u(\text{sen}\,u\,du) = \frac{1}{2}\cosh^2 u + C = \frac{1}{2}\cosh^2 e^t + C$

37. Seja $u = \sqrt{x}$; $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Então, $\int\frac{\text{senh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int\text{senh}\,u\,du = 2\cosh u + C = 2\cosh\sqrt{x} + C$

39. $\int\text{cotgh}^2 3x\,dx = \int(1 + \text{cosech}^2 3x)\,dx = x - \frac{1}{3}\,\text{cotgh}\ 3x + C$

41. $\int\text{sech}^2 x\ \text{tgh}^5 x\,dx = \int\text{tgh}^5 x\,(\text{sech}^2 x\,dx) = \frac{1}{6}\ \text{tgh}^6 x + C$

43. Seja $u = \cosh x$; $du = \text{senh}\,x\,dx$. Então,

$\int\text{tgh}\ x\ln(\cosh x)\,dx = \int\ln(\cosh x)\frac{\text{senh}\,x\,dx}{\cosh x} = \int\ln u\,\frac{du}{u} = \frac{1}{2}(\ln u)^2 + C = \frac{1}{2}\ln^2(\cosh x) + C$

45. $\int_0^{\ln 3}\text{sech}^2 t\,dt = \text{tgh}\ t\Big]_0^{\ln 3} = \text{tgh}(\ln 3) - \text{tgh}\ 0 = \frac{e^{\ln 3} - e^{-\ln 3}}{e^{\ln 3} + e^{-\ln 3}} = \frac{3 - \frac{1}{3}}{3 +} = \frac{8}{10} = \frac{4}{}$

47. $\int_0^2\text{senh}^3 x\cosh x\,dx = \frac{1}{4}\,\text{senh}^4 x\Big]_0^2 = \frac{1}{4}\,\text{senh}^4 2$

49. Veja a Fig. 8.4.49. Seja $f(x) = \text{sech}\, x$; $f'(x) = -\text{sech}\, x \text{ tgh}\, x$

$f''(x) = -\text{sech}\, x(\text{sech}^2 x) - (-\text{sech}\, x \text{ tgh}\, x) \text{ tgh}\, x = \text{sech}\, x(\text{tgh}^2 x - \text{sech}^2 x) = \text{sech}\, x(1 - 2\,\text{sech}^2 x)$

Seja $f'(x) = 0$: $\text{sech}\, x \text{ tgh}\, x = 0$; $\text{tgh}\, x = 0$; $x = 0$.

Seja $f''(x) = 0$: $\text{sech}^2 x = \frac{1}{2}$; $\cosh^2 x = 2$; $\cosh x = \sqrt{2}$; $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sqrt{2}$; $e^x - 2\sqrt{2} + e^{-x} = 0$

$(e^x)^2 - (2\sqrt{2})e^x + 1 = 0$; $e^x = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{8 - 4}}{2} = \sqrt{2} \pm 1$

$x = x_1 = \ln(\sqrt{2} + 1) \approx 0{,}88$ e $x = \ln(\sqrt{2} - 1) = \ln\left[\frac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{2} + 1}\right] = \ln\left[\frac{1}{\sqrt{2} + 1}\right] = -\ln(\sqrt{2} + 1) = -x_1$

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$x < -x_1$		+	+	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = -x_1$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	f é crescente; o gráfico tem um ponto de inflexão
$-x_1 < x < 0$		+	−	f é crescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = 0$	1	0	−	f tem um máximo relativo; o gráfico é côncavo para baixo
$0 < x < x_1$		−	−	f é decrescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = x_1$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	−	+	f é decrescente; o gráfico tem um ponto de inflexão
$x_1 < x$		−	+	f é decrescente; o gráfico é côncavo para cima

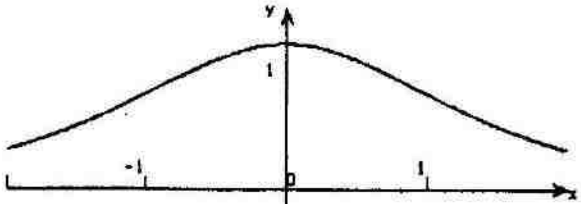


FIGURA 8.4.49

51. A unidades de área é a área da região limitada por $y = a \cosh \frac{x}{a}$, pelos eixos e $x = x_1$.

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} a \cosh \frac{\xi_i}{a} \Delta_i x = a\int_0^{x_1} \cosh \frac{x}{a}\, dx = a^2 \int_0^{x_1} \cosh \frac{x}{a} \frac{dx}{a} = a^2 \text{senh} \frac{x}{a}\Big]_0^{x_1} = a^2 \text{senh} \frac{x_1}{a}$$

53. Se s cm for a distância orientada da partícula a partir da origem em t s, então

$$s = e^{-ct/2}(A \text{ senh}\, t + B \cosh t)$$

$$v = \frac{ds}{dt} = -\tfrac{1}{2}c e^{-ct/2}(A \text{ senh}\, t + B \cosh t) + e^{-ct/2}(A \cosh t + B \text{ senh}\, t)$$

$$v = e^{-ct/2}[(B - \tfrac{1}{2}cA) \text{ senh}\, t + (A - \tfrac{1}{2}cB) \cosh t]$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\tfrac{1}{2}c e^{-ct/2}[(B - \tfrac{1}{2}cA) \text{ senh}\, t + (A - \tfrac{1}{2}cB) \cosh t] + e^{-ct/2}[(B - \tfrac{1}{2}cA) \cosh t + (A - \tfrac{1}{2}cB) \text{ senh}\, t]$$

$$a = e^{-ct/2}[(A - cB + \tfrac{1}{4}c^2 A) \text{ senh}\, t + (B - cA + \tfrac{1}{4}c^2 B) \cosh t]$$

$$a = (1 - \tfrac{1}{4}c^2)(e^{-ct/2}[A \text{ senh}\, t + B \cosh t]) - c(e^{-ct/2}[(B - \tfrac{1}{2}cA) \text{ senh}\, t + (A - \tfrac{1}{2}cB) \cosh t])$$

Portanto, $a = (1 - \tfrac{1}{4}c^2)s - cv$.

55. Seja $f(x) = \text{tgh}\, x$; $f'(x) = \text{sech}^2 x$. Como f é derivável para todo x, f é contínua para todo x. Como $f'(x) > 0$ para todo x, f é crescente para todo x.

EXERCÍCIOS 8.5 As Funções Hiperbólicas Inversas (Suplementar)

1. Seja $y = \text{senh}^{-1}x$ Então, $x = \text{senh } y$. Assim,

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2};\ 2x = e^y - e^{-y};\ (e^y)^2 - (2x)e^y - 1 = 0;\ e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2};\ e^y = x + \sqrt{x^2+1}$$

Como $x - \sqrt{x^2+1} < 0$ e $e^y > 0$ desprezamos o sinal de menos. Portanto,

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2+1});\ \text{senh } x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

3. Seja $y = \text{cotgh}^{-1}x$ e $|x| > 1$. Então, $x = \text{cotgh } y$. Logo,

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}};\ x(e^y - e^{-y}) = e^y + e^{-y};\ xe^{2y} - x = e^{2y} + 1;\ (x-1)e^{2y} = x + 1;\ e^{2y} = \frac{x+1}{x-1};\ 2y = \ln\frac{x+1}{x-1}$$

Portanto, $y = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$ de modo que $\text{cotgh}^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$, $|x| > 1$.

5. Seja $y = \text{tgh}^{-1}x$ e $|x| < 1$. Então, $x = \text{tgh } y$ e $D_x y = \frac{1}{D_y x} = \frac{1}{\text{sech}^2 y} = \frac{1}{1 - \text{tgh}^2 y} = \frac{1}{1-x^2}$.

Pela regra da cadeia, se u for uma função derivável de x,

$$D_x(\text{tgh}^{-1}u) = \frac{1}{1-u^2}D_x u,\ |u| < 1$$

7. Seja $y = \text{sech}^{-1}x$ e $0 < x < 1$. Então $x = \text{sech } y$ e

$$D_x y = \frac{1}{D_y x} = \frac{1}{-\text{sech } y \text{ tgh } y} = -\frac{1}{\text{sech } y\sqrt{1 - \text{sech}^2 y}} = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

Pela regra da cadeia, se u for uma função derivável de x,

$$D_x(\text{sech}^{-1}u) = -\frac{1}{u\sqrt{1-u^2}}D_x u,\ 0 < u < 1$$

9. (a) A fórmula (1) é $\text{senh}^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. Logo, $\text{senh}^{-1}\frac{1}{4} = \ln\left(\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{16}+1}\right) = \ln\frac{1}{4}(1 + \sqrt{17})$.

(b) A fórmula (3) é $\text{tgh}^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $|x| < 1$. Logo, $\text{tgh}^{-1}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln 3$.

11. $f'(x) = \frac{d}{dx}(\text{senh}^{-1}x^2) = \frac{1}{\sqrt{(x^2)^2+1}}(2x) = \frac{2x}{\sqrt{x^4+1}}$

13. $F'(x) = \frac{d}{dx}(\text{tgh}^{-1}4x) = \frac{1}{1-16x^2}(4) = \frac{4}{1-16x^2}$

15. $g'(x) = \frac{d}{dx}\text{cotgh}^{-1}(3x+1) = \frac{1}{1-(3x+1)^2}(3) = \frac{3}{1-(9x^2+6x+1)} = -\frac{1}{2x+3x^2}$

17. $f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2\cosh^{-1}x^2) = 2x\cosh^{-1}x^2 + (x^2)\frac{1}{\sqrt{x^4-1}}(2x) = 2x\cosh^{-1}x^2 + \frac{2x^3}{\sqrt{x^4-1}}$

19. $f'(x) = \frac{d}{dx}\text{senh}^{-1}(\text{tg } x) = \frac{1}{\sqrt{\text{tg}^2x+1}}(\sec^2 x) = \frac{\sec^2 x}{|\sec x|} = |\sec x|$

21. $h'(x) = \frac{d}{dx}\cosh^{-1}(\text{cosec } x) = \frac{1}{\sqrt{\text{cosec}^2 x - 1}}(-\text{cosec } x \text{ cotg } x) = \frac{\text{cosec } x \text{ cotg } x}{|\text{cotg } x|}$

23. $f'(z) = \frac{d}{dz}(\text{cotgh}^{-1}z^2)^3 = 3(\text{cotgh}^{-1}z^2)^2\frac{d}{dz}(\text{cotgh}^{-1}z^2) = 3(\text{cotgh}^{-1}z^2)^2 \cdot \frac{1}{1-z^4}(2z) = \frac{6z(\text{cotgh}^{-1}z^2)^2}{1-z^4}$

25. $g'(x) = \frac{d}{dx}\text{tgh}^{-1}(\cos e^x) = \frac{1}{1-\cos^2 e^x}\frac{d}{dx}(\cos e^x) = \frac{1}{\text{sen}^2 e^x}(-\text{sen } e^x)e^x = -e^x\text{cosec } e^x$

27. $G'(x) = \frac{d}{dx}(x\,\text{senh}^{-1}x - \sqrt{1+x^2}) = \text{senh}^{-1}x + x\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \text{senh}^{-1}x$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 8

1. Dada $x = \text{sen}^{-1}\frac{3}{5}$, $y = \cos^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right)$.

$\text{sen } x = \frac{3}{5}$ e $0 < x < \frac{1}{2}\pi$. $\cos y = -\frac{4}{5}$ e $\frac{1}{2}\pi < y < \pi$. Veja a Figura 8.1.

(a) $\cos x = \frac{4}{5}$ (b) $\text{sen } y = \frac{3}{5}$ (c) $\text{tg } x = \frac{3}{4}$ (d) $\text{tg } y = -\frac{3}{4}$

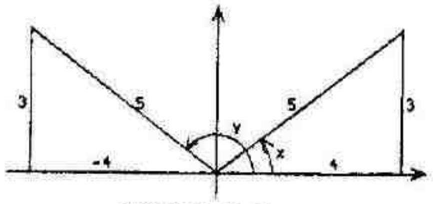


FIGURA 8.1

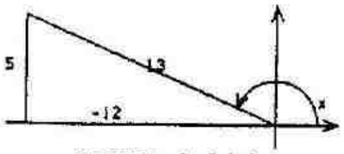


FIGURA 8.3(a)

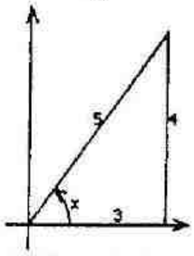


FIGURA 8.3(b)

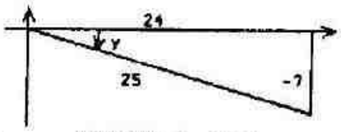


FIGURA 8.3(c)

3. (a) Seja $x = \cos^{-1}\left(-\frac{12}{13}\right)$; logo $\cos x = -\frac{12}{13}$ e $\frac{1}{2}\pi < x < \pi$. Assim, $\text{sen } x = \frac{5}{13}$. Veja a Figura 8.3(a).

$$\text{sen}\left[2\cos^{-1}\left(-\frac{12}{13}\right)\right] = \text{sen } 2x = 2\,\text{sen } x \cos x = 2\left(\frac{5}{13}\right)\left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{120}{169}$$

(b) Seja $x = \cos^{-1}\frac{3}{5}$; logo $\cos x = \frac{3}{5}$ e $0 < x < \frac{1}{2}\pi$. Assim, $\text{tg } x = \frac{4}{3}$. Veja a Figura 8.3(b).

Seja $y = \text{sen}^{-1}\left(-\frac{7}{25}\right)$; logo, $\text{sen } y = -\frac{7}{25}$ e $-\frac{1}{2}\pi < y < 0$; $\text{tg } y = -\frac{7}{24}$. Veja a Figura 8.3(c).

$$\text{tg}\left[\cos^{-1}\frac{3}{5} + \text{sen}^{-1}\left(-\frac{7}{25}\right)\right] = \text{tg}(x + y) = \frac{\text{tg } x + \text{tg } y}{1 - \text{tg } x \text{ tg } y} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{7}{24}}{1 + \frac{4}{3}\cdot\frac{7}{24}} = \frac{4\cdot 24 - 7.3}{3\cdot 24 + 4\cdot 7} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

5. $f'(x) = \frac{d}{dx}\text{tg}^{-1} 2^x = \frac{1}{1 + (2^x)^2}\frac{d}{dx}(2^x) = \frac{2^x \ln 2}{1 + 2^{2x}}$

7. $F'(x) = \frac{d}{dx}\text{senh}^3 2x = 3\,\text{senh}^2 2x(\cosh 2x)(2) = 6\,\text{senh}^2 2x \cosh 2x$

9. $\frac{d}{dx}\sec^{-1}\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{(x^2+1)-1}}\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2}}\cdot\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}\cdot 2x = \frac{x}{|x|(x^2+1)}$

11. $g'(x) = \frac{d}{dx}\text{sen}^{-1}(\text{tgh } \sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{tgh}^2\sqrt{x}}}\cdot\frac{d}{dx}(\text{tgh } \sqrt{x}) = \frac{1}{\text{sech}\sqrt{x}}\cdot\text{sech}^2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\text{sech}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

13. $h'(x) = \frac{d}{dx}\text{cosech}^2 e^{2x} = 2\,\text{cosech } e^{2x}\frac{d}{dx}(\text{cosech } e^{2x}) = 2\,\text{cosech } e^{2x}(-\text{cosech } e^{2x}\,\text{cotgh } e^{2x})(2e^{2x})$

$= -4e^{2x}\,\text{cosech}^2 e^{2x}\,\text{cotgh } e^{2x}$

15. Seja $y = (\cosh x)^{1/x}$. Então, $\ln y = \frac{1}{x}\ln(\cosh x)$; $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\cosh x}\cdot\text{senh } x - \frac{1}{x^2}\ln(\cosh x)$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{x \text{ tgh } x - \ln(\cosh x)}{x^2}\right] = (\cosh x)^{1/x}\left[\frac{x \text{ tgh } x - \ln(\cosh x)}{x^2}\right]$$

19. $\cot g^{-1} \dfrac{x^2}{3y} + xy^2 = 0$; $\quad \dfrac{-1}{1 + \left(\dfrac{x^2}{3y}\right)^2} \cdot \dfrac{2x(3y) - x^2\left(3\dfrac{dy}{dx}\right)}{9y^2} + y^2 + 2xy\dfrac{dy}{dx} = 0$

$\dfrac{-9y^2}{9y^2 + x^4} \cdot \dfrac{6xy - 3x^2\dfrac{dy}{dx}}{9y^2} + y^2 + 2xy\dfrac{dy}{dx} = 0$; $\quad -(6xy - 3x^2\dfrac{dy}{dx}) + 9y^4 + x^4y^2 + 18xy^3y + 2x^5y\dfrac{dy}{dx}$

$(3x^2 + 18xy^3 + 2x^5y)\dfrac{dy}{dx} = 6xy - 9y^4 - x^4y^2$; $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6xy - 9y^4 - x^4y^2}{3x^2 + 18xy^3 + 2x^5y}$

21. $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{1 - x^4}}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{1 - (x^2)^2}} = \frac{3}{2}\,\text{sen}^{-1}x^2 + C$

23. $\displaystyle\int \text{tgh}^2 3x\,dx = \int (1 - \text{sech}^2 3x)\,dx = x - \frac{1}{3}\,\text{tgh}\,3x + C$

25. $\displaystyle\int \frac{dt}{2t^2 + 3t + 5} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{9}{16}\right) + \frac{5}{2} - \frac{9}{16}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(t + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{31}}\,\text{tg}^{-1}\frac{t + \frac{3}{4}}{\frac{1}{4}\sqrt{31}} + C = \frac{2}{\sqrt{31}}\,\text{tg}^{-1}\frac{4t + 3}{\sqrt{31}} + C$

27. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} - 8}} = \int \frac{e^x\,dx}{e^x\sqrt{e^{2x} - 8}}$. Seja $u = e^x$; então $du = e^x dx$. Temos

$\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - 8}} = \frac{1}{\sqrt{8}}\sec^{-1}\frac{e^x}{\sqrt{8}} + C = \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,\sec^{-1}\tfrac{1}{4}\sqrt{2}e^x + C$

29. $\displaystyle\int_1^2 \frac{(t + 2)\,dt}{\sqrt{4t - t^2}} = \int_1^2 \frac{(t + 2)\,dt}{\sqrt{4 - (t^2 - 4t + 4)}} = \int_1^2 \frac{(t + 2)\,dt}{\sqrt{4 - (t - 2)^2}}$

Seja $u = t - 2$; então $du = dt$. Qdo. $t = 1$, $u = -1$; qdo. $t = 2$, $u = 0$. Temos

$$\int_{-1}^0 \frac{u + 4}{\sqrt{4 - u^2}}\,du = -\frac{1}{2}\int_{-1}^0 \frac{-2u\,du}{\sqrt{4 - u^2}} + 4\int_{-1}^0 \frac{du}{\sqrt{4 - u^2}} = -\frac{1}{2}(2\sqrt{4 - u^2}) + 4\,\text{sen}^{-1}\frac{u}{2}\Big]_{-1}^0$$

$$= (-2 + 0) - (-\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi) = \frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} - 2$$

31. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + \cosh y}\,dy = \int_0^1 \sqrt{2}\cosh\frac{y}{2}\,dy = 2\sqrt{2}\left[\text{senh}\,\frac{y}{2}\right]_0^1 = 2\sqrt{2}\,\text{senh}\,\frac{1}{2}$

33. $E = 20\cos 120\pi t$; $\dfrac{E}{20} = \cos 120\pi t$. (a) Qdo. k e n são quaisquer inteiros. Então,

$$120\pi t = 2k\pi + \cos^{-1}\left(\frac{E}{20}\right) \text{ ou } 120\pi t = 2\pi n - \cos^{-1}\left(\frac{E}{20}\right)$$

$$t = \frac{k}{60} + \frac{1}{120\pi}\cos^{-1}\left(\frac{E}{20}\right) \text{ ou } t = \frac{n}{60} - \frac{1}{120\pi}\cos^{-1}\left(\frac{E}{20}\right)$$

O menor valor positivo de t é $\dfrac{1}{120\pi}\cos^{-1}\left(\dfrac{E}{20}\right)$.

(b) Qdo. $E = 0$, $t = \dfrac{1}{120\pi}\cos^{-1}\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{120\pi}\cdot\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{360}$.

(c) Qdo. $E = 5$, $t = \dfrac{1}{120\pi}\cos^{-1}\dfrac{1}{4} \approx 0{,}0035$.

(d) Qdo. $E = -10$, $t = \dfrac{1}{120\pi}\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{120\pi}\cdot\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{1}{180}$.

(e) Qdo. $E = -5$, $t = \dfrac{1}{120\pi}\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{4}\right) \approx 0{,}0048$.

35. Como $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ então $\cosh(\ln x) = \frac{e^{\ln x} + e^{-\ln x}}{2} = \frac{x + \frac{1}{x}}{2} = \frac{x^2 + 1}{2x}$

37. A unidades de área é a área da região limitada por $y = 9/\sqrt{9 - x^2}$, pelos eixos e $x = 2\sqrt{2}$.

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{9}{\sqrt{9 - \xi_i^2}} \Delta_i x = 9\int_0^{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} dx = 9\left[\operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{3}\right]_0^{2\sqrt{2}} = 9 \operatorname{sen}^{-1} \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

39. A região é limitada pela curva $y = \sqrt{\operatorname{senh} x}$, pelo eixo x e raios x=2 e $x = \ln 2$. Um elemento do volume é um disco circular centrado no eixo x, $x \in [0, \ln 2]$, de raio $\sqrt{\operatorname{senh} \xi_i}$. Se V unidades cúbicas é o volume do sólido de revolução, então

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi(\sqrt{\operatorname{senh} \xi_i})^2 \Delta_i x = \int_0^{\ln 2} \pi \operatorname{senh} x \, dx = \pi\left[\cosh x\right]_0^{\ln 2} = \pi[\cosh(\ln 2) - \cosh 0]$$

$$= \pi\left[\frac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{2} - 1\right] = \pi\left(\frac{2 + \frac{1}{2}}{2} - 1\right) = \frac{1}{4}\pi$$

41. Em t h, seja x km a distância do carro que está no ponto da estrada mais perto do holofote, e seja θ a medida em radianos do ângulo entre o feixe de luz e o raio mais próximo da estrada. O carro está viajando a 60 km/h; assim, $\frac{dx}{dt} = 60$. Então,

$$\operatorname{tg} \theta = 2x \quad \text{e} \quad -\tfrac{1}{2}\pi < \theta < \tfrac{1}{2}\pi; \quad \theta = \operatorname{tg}^{-1} 2x; \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{2}{1 + 4x^2} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{120}{1 + 4x^2}$$

(a) Qdo $x = 0$, $\frac{d\theta}{dt} = 120$. Logo, o feixe de luz está mudando de direção em 120 rad/h.

(b) Qdo $x = \frac{1}{2}$, $\frac{d\theta}{dt} = \frac{120}{1 + 1} = 60$. Logo, o feixe de luz está mudando de direção em 60 rad/h.

43. Em t h, seja x km a distância do observador ao ponto do solo exatamente embaixo do avião, e seja θ a medida em radianos do ângulo de elevação do avião em relação ao observador. O avião está voando a 300 km/h; então 300 mil/h; portanto $\frac{dx}{dt} = 300$.

$$\operatorname{cotg} \theta = \frac{x}{4}; \quad \theta = \operatorname{cotg}^{-1} \frac{x}{4}; \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\frac{1}{4}}{1 + \frac{x^2}{16}} \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{4}{x^2 + 16} \cdot 300 = -\frac{1200}{x^2 + 16}; \quad \left.\frac{d\theta}{dt}\right]_{x=2} = -60$$

Logo, a medida do ângulo de elevação está variando à taxa de 60 rad/h.

45. Veja a Figura 8.45. Suponha que uma pessoa reme de A até um ponto P na circunferência e então ande de P a B. Seja s a distância de A a P e seja θ a medida em radianos de $\angle PAB$. Então, $\theta = \cos^{-1} s$. Arc PB tem comprimento $\frac{1}{2} m(\angle PCB) = \frac{1}{2} \cdot 2\theta = \cos^{-1} s$. Uma pessoa rema a $1\frac{1}{2}$ m/h e anda a 5 km/h, se T h for o tempo total para a viagem,

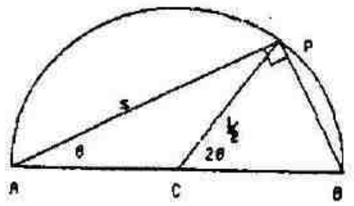


FIGURA 8.45

$$T = \frac{2}{3}s + \frac{1}{5}\cos^{-1} s, \quad s \in [0, 1]; \quad \frac{dT}{ds} = \frac{2}{3} - \frac{1}{5\sqrt{1 - s^2}}; \quad \frac{d^2T}{ds^2} = \frac{-s}{5(1 - s^2)^{3/2}}$$

Como $\frac{d^2T}{ds^2} < 0$, qualquer número crítico deve ser um máximo relativo. Logo, o valor mínimo absoluto deve ocorrer em um ponto extremo. Como $T(0) = \frac{1}{5} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{10} < T(1) = \frac{2}{3}$, a pessoa deveria ir andando de A até B, e o tempo gasto seria $\frac{\pi}{10}$ h.

47. Da Fórmula 8.5.2, $\cosh^{-1} 2 = \ln(2 + \sqrt{2^2 - 1}) = \ln(2 + \sqrt{3})$

49. $\frac{d}{dw}(w^2 \operatorname{senh}^{-1} 2w) = 2w \operatorname{senh}^{-1} 2w + (w^2)\frac{1}{\sqrt{4w^2 + 1}}(2) = 2w \operatorname{senh}^{-1} 2w + \frac{2w^2}{\sqrt{4w^2 + 1}}$

51. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} e^{-2x}) = \frac{-1}{e^{-2x}\sqrt{1 - (e^{-2x})^2}} \frac{d}{dx} e^{-2x} = \frac{-1}{e^{-2x}\sqrt{1 - e^{-4x}}}(-2e^{-2x}) = \frac{2}{\sqrt{1 - e^{-4x}}}$

53. Seja $x = a \operatorname{senh} u$, $a > 0$. Então, $dx = a \cosh u \, du$, $u = \operatorname{senh}^{-1}(x/a)$ e

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{senh}^2 u} = a\sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 u} = a\sqrt{\cosh^2 u} = a \cosh u$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2 + x^2}} = \int \frac{a \cosh u \, du}{a^2 \operatorname{senh}^2 u (a \cosh u)} = \frac{1}{a^2}\int \operatorname{cosech}^2 u \, du = -\frac{1}{a^2} \operatorname{cotgh} u + C = -\frac{1}{a^2} \operatorname{cotgh}\left(\operatorname{senh}^{-1} \frac{x}{a}\right) + C$$

CAPÍTULO 9

TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

EXERCÍCIOS 9.1 Integração por Partes

A fórmula para integração por partes é $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

1. Seja $u = x$ e $dv = e^{3x}dx$. Então, $du = dx$ e $v = \frac{1}{3}e^{3x}$.

$$\int xe^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$$

3. Seja $u = x$ e $dv = \sec x \operatorname{tg} x\,dx$. Então, $du = dx$ e $v = \sec x$.

$$\int x\sec x \operatorname{tg} x\,dx = x\sec x - \int \sec x\,dx = x\sec x - \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

5. Seja $u = \ln x$ e $dv = dx$. Então, $du = \frac{1}{x}dx$ e $v = x$.

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C$$

7. Seja $u = \ln^2 x$ e $dv = dx$. Então, $du = \frac{2}{x}\ln x\,dx$ e $v = x$.

$$I = \int(\ln x)^2dx = x\ln^2x - \int x\cdot\frac{2}{x}\ln x\,dx = x\ln^2x - 2\int\ln x\,dx$$

Agora seja $\bar{u} = \ln x$ e $d\bar{v} = dx$. Então, $d\bar{u} = \frac{1}{x}dx$ e $\bar{v} = x$.

$$I = x\ln^2x - 2\left(x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx\right) = x\ln^2x - 2x\ln x + 2x + C$$

9. Seja $u = \operatorname{tg}^{-1}x$ e $dv = x\,dx$. Então, $du = \frac{dx}{1+x^2}$ e $v = \frac{1}{2}x^2$.

$$\int x\operatorname{tg}^{-1}x\,dx = \tfrac{1}{2}x^2\operatorname{tg}^{-1}x - \tfrac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{1+x^2} = \tfrac{1}{2}x^2\operatorname{tg}^{-1}x - \tfrac{1}{2}\int dx + \tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2} = \tfrac{1}{2}x^2\operatorname{tg}^{-1}x - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}x + C$$

$$= \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}x(x^2+1) - \tfrac{1}{2}x + C$$

De outro modo, seja $v = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$. Então, $v\,du = \frac{1}{2}dx$ e

$$\int x\operatorname{tg}^{-1}x\,dx = \tfrac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{tg}^{-1}x - \tfrac{1}{2}\int dx = \tfrac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{tg}^{-1}x - \tfrac{1}{2}x + C$$

11. Seja $u = xe^x$ e $dv = \frac{dx}{(x+1)^2}$. Então, $du = (xe^x + e^x)dx$ e $v = -\frac{1}{x+1}$.

$$\int\frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = -\frac{xe^x}{x+1} + \int\frac{1}{x+1}[e^x(x+1)]dx = -\frac{xe^x}{x+1} + \int e^xdx = -\frac{xe^x}{x+1} + e^x + C = \frac{-xe^x + xe^x + e^x}{x+1} + C$$

$= \frac{e^x}{x+1} + C$. Note que $\int\frac{xe^{ax}}{(bx+1)^2}dx$ pode ser integrado apenas se $a = b$.

13. Substitua primeiro $t = \cos x$, $dt = -\operatorname{sen} x\, dx$. Assim, $I = \int \operatorname{sen} x \ln(\cos x)\, dx = -\int \ln t\, dt$.

Agora seja $u = \ln t$, $dv = dt$. Então, $du = \frac{1}{t}\, dt$ e $v = t$.

$$I = -\left(t \ln t - \int t \cdot \frac{1}{t}\, dt\right) = -t \ln t + \int dt = -t \ln t + t + C = -\cos x \ln(\cos x) + \cos x + C$$

15. Seja $u = e^x$ e $dv = \cos x\, dx$. Então, $du = e^x dx$ e $v = \operatorname{sen} x$.

$$I = \int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx$$

Seja $\bar{u} = e^x$ e $d\bar{v} = \operatorname{sen} x\, dx$. Então, $d\bar{u} = e^x dx$ e $\bar{v} = -\cos x$.

$$I = e^x \operatorname{sen} x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx\right) = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - I$$

$$2I = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) + 2C; \quad I = \tfrac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) + C$$

17. Seja $u = x^2$ e $dv = \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - x^2}}$. Então, $du = 2x\, dx$ e $v = -\sqrt{1 - x^2}$.

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -x^2\sqrt{1 - x^2} + \int 2x\sqrt{1 - x^2}\, dx = -x^2\sqrt{1 - x^2} - \frac{2}{3}(1 - x^2)^{3/2} + C$$

19. Seja $u = x^2$ e $dv = \operatorname{senh} x\, dx$. Então, $du = 2x\, dx$, e $v = \cosh x$.

$$\int x^2 \operatorname{senh} x\, dx = x^2 \cosh x - 2\int x \cosh x\, dx$$

Seja $\bar{u} = x$ e $d\bar{v} = \cosh x\, dx$. Então, $d\bar{u} = dx$, e $\bar{v} = \operatorname{senh} x$.

$$\int x^2 \operatorname{senh} x\, dx = x^2 \cosh x - 2\left(x \operatorname{senh} x - \int \operatorname{senh} x\, dx\right) = x^2 \cosh x - 2x \operatorname{senh} x + 2\cosh x + C$$

21. Substitua primeiro $t = \sqrt{z}$, $dt = \frac{1}{2\sqrt{z}}$. Assim, $I = \int \frac{\operatorname{cotg}^{-1}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\, dz = 2\int \operatorname{cotg}^{-1} t\, dt$.

Agora seja $u = \operatorname{cotg}^{-1} t$ e $dv = dt$. Então, $du = \frac{-1}{1 + t^2}\, dt$ e $v = t$.

$$I = 2t \operatorname{cotg}^{-1} t + \int \frac{2t\, dt}{1 + t^2} = 2t \operatorname{cotg}^{-1} t + \ln(1 + t^2) + C = 2\sqrt{z} \operatorname{cotg}^{-1}\sqrt{z} + \ln(1 + z) + C$$

23. Substitua primeiro $x = t^2$, $dx = 2t\, dt$. Assim, $I = \int \cos\sqrt{x}\, dx = \int 2t \cos t\, dt$.

Agora seja $u = 2t$, $dv = \cos t\, dt$. Então, $du = 2\, dt$ e $v = \operatorname{sen} t$.

$$I = 2t \operatorname{sen} t - \int 2 \operatorname{sen} t\, dt = 2t \operatorname{sen} t + 2\cos t + C = 2\sqrt{x} \operatorname{sen}\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C$$

25. Para calcular $\int x^2 3^x dx$, seja $u = x^2$ e $dv = 3^x dx$. Então $du = 2x\, dx$ e $v = \frac{3^x}{\ln 3}$.

$$\int x^2 3^x dx = \frac{3^x x^2}{\ln 3} - \frac{2}{\ln 3}\int x 3^x dx$$

Seja $\bar{u} = x$ e $d\bar{v} = 3^x dx$. Então $d\bar{u} = dx$ e $\bar{v} = \frac{3^x}{\ln 3}$.

$$\int x^2 3^x dx = \frac{3^x x^2}{\ln 3} - \frac{2}{\ln 3}\left(\frac{3^x x}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3}\int 3^x dx\right) = \frac{3^x x^2}{\ln 3} - \frac{2x\, 3^x}{(\ln 3)^2} + \frac{2 \cdot 3^x}{(\ln 3)^3} + C$$

Logo $\int_0^2 x^2 3^x dx = \frac{3^x x^2}{\ln 3} - \frac{2x\, 3^x}{(\ln 3)^2} + \frac{2 \cdot 3^x}{(\ln 3)^3}\Big]_0^2 = \left(\frac{36}{\ln 3} - \frac{36}{\ln^2 3} + \frac{18}{\ln^3 3}\right) - \frac{2}{\ln^3 3} = \frac{36}{\ln 3} - \frac{36}{\ln^2 3} + \frac{16}{\ln^3 3}$

27. Para calcular $\int \text{sen } 3x \cos x \, dx$, seja $u = \text{sen } 3x$, $dv = \cos x \, dx$. Então, $du = 3 \cos 3x \, dx$, $v = \text{sen } x$.

$$\int \text{sen } 3x \cos x \, dx = \text{sen } 3x \text{ sen } x - 3\int \cos 3x \text{ sen } x \, dx$$

Seja $\bar{u} = \cos 3x$ e $d\bar{v} = \text{sen } x \, dx$. Então, $d\bar{u} = -\text{sen } 3x \, dx$ e $\bar{v} = -\cos x$.

$$\int \text{sen } 3x \cos x \, dx = \text{sen } 3x \text{ sen } x - 3\left(-\cos 3x \cos x - 3\int \text{sen } 3x \cos x \, dx\right)$$

$$-8\int \text{sen } 3x \cos x \, dx = \text{sen } 3x \text{ sen } x + 3 \cos 3x \cos x - 8C$$

$$\int \text{sen } 3x \cos x \, dx = -\frac{1}{8} \text{ sen } 3x \text{ sen } x - \frac{3}{8} \cos 3x \cos x + C$$

(Um método mais rápido é dado no Exemplo 9.2.5.)

$$\int_0^{\pi/3} \text{sen } 3x \cos x \, dx = -\frac{1}{8} \text{ sen } 3x \text{ sen } x - \frac{3}{8} \cos 3x \cos x\Big]_0^{\pi/3}$$

$$= \left(-\frac{1}{8} \text{sen } \pi \text{ sen} \frac{\pi}{3} - \frac{3}{8} \cos \pi \cos \frac{\pi}{3}\right) - \left(-\frac{1}{8} \text{ sen } 0 \text{ sen } 0 - \frac{3}{8} \cos 0 \cos 0\right) = -\frac{3}{8}(-1)\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{8} = \frac{3}{16} + \frac{3}{8} = \frac{9}{16}$$

29. Seja $u = x$ e $dv = e^{2x}dx$. Então, $du = dx$ e $v = \frac{1}{2}e^{2x}$.

$$\int_0^2 xe^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x}\Big]_0^2 - \frac{1}{2}\int_0^2 e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}\Big]_0^2 = (e^4 - \frac{1}{4}e^4) - (-\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}(3e^4 + 1)$$

31. P/ calcular $\int e^{3x} \text{sen } 4x \, dx$, seja $u = e^{3x}$, $dx = \text{sen } 4x \, dx$. Então, $du = 3e^{3x}dx$, $v = -\frac{1}{4} \cos 4x$.

$$\int e^{3x} \text{sen } 4x \, dx = -\frac{1}{4} e^{3x} \cos 4x + \frac{3}{4}\int e^{3x} \cos 4x \, dx$$

Seja $\bar{u} = e^{3x}$ e $d\bar{v} = \cos 4x \, dx$. Então $d\bar{u} = 3e^{3x}dx$ e $\bar{v} = \frac{1}{4} \text{ sen } 4x$.

$$\int e^{3x} \text{sen } 4x \, dx = -\frac{1}{4} e^{3x} \cos 4x + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4} e^{3x} \text{sen } 4x - \frac{3}{4}\int e^{3x} \text{sen } 4x \, dx\right)$$

$$\frac{25}{16}\int e^{3x} \text{sen } 4x \, dx = -\frac{1}{4} e^{3x} \cos 4x + \frac{3}{16} e^{3x} \text{sen } 4x + \frac{16}{25} C$$

$\int e^{3x} \text{sen } 4x \, dx = -\frac{4}{25} e^{3x} \cos 4x + \frac{3}{25} e^{3x} \text{sen } 4x + C$. Uma forma alternativa é usar a fórmula (3).

Portanto,

$$\int_0^{\pi/4} e^{3x} \text{sen } 4x \, dx = -\frac{4}{25} e^{3x} \cos 4x + \frac{3}{25} e^{3x} \text{sen } 4x\Big]_0^{\pi/4} = -\frac{4}{25} e^{3\pi/4}(-1) + \frac{3}{25} e^{3\pi/4}(0) + \frac{4}{25}$$

$$= \frac{4}{25}(e^{3\pi/4} + 1)$$

33. Substitua primeiro $t = x^2$, $dt = 2x\,dx$. Assim, $I = \int_2^4 \sec^{-1}\sqrt{t}\,dt = \int_{\sqrt{2}}^2 2x\sec^{-1}x\,dx$.

Agora seja $u = \sec^{-1}x$ e $dv = 2x\,dx$. Então, $du = \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ e $v = x^2$; logo $v\,du = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

$$I = x^2\sec^{-1}x\Big]_{\sqrt{2}}^2 - \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = 4\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \left[\sqrt{x^2-1}\right]_{\sqrt{2}}^2 = \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3} + 1$$

35. A unidades de área é a área da região limitada por $y = \ln x$, pelo eixo x e $x = e^2$.

$$A = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^n \ln\xi_i\,\Delta_i x = \int_1^{e^2}\ln x\,dx$$

Seja $u = \ln x$ e $dv = dx$. Então $du = \frac{1}{x}dx$ e $v = x$.

$$A = x\ln x\Big]_1^{e^2} - \int_1^{e^2}dx = x\ln x - x\Big]_1^{e^2} = (2e^2 - e^2) - (-1) = e^2 + 1$$

37. V unidades cúbicas é o volume qdo a região do Ex. 35 faz uma rotação em torno do eixo y. Um elemento do volume é um invólucro cilíndrico centrado no eixo x, de raio médio m_i e altura $\ln m_i$.

$$V = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^n 2\pi m_i\ln m_i\,\Delta_i x = 2\pi\int_1^{e^2} x\ln x\,dx$$

Seja $u = \ln x$ e $dv = dx$. Então, $du = \frac{1}{x}dx$ e $v = \frac{1}{2}x^2$.

$$V = 2\pi\left(\frac{1}{2}x^2\ln x\Big]_1^{e^2} - \frac{1}{2}\int_1^{e^2}x\,dx\right) = 2\pi\left[\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_1^{e^2} = 2\pi\left[\left(\frac{1}{2}e^4\cdot 2 - \frac{1}{4}e^4\right) - \left(-\frac{1}{4}\right)\right] = \frac{\pi}{2}(3e^4 + 1)$$

39. A unidades de área é a área da região limitada por $y = 2xe^{-x/2}$, pelo eixo x e $x = 4$.

$$A = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^n 2\xi_i e^{-\xi_i/2}\Delta_i x = 2\int_0^4 xe^{-x/2}dx$$

Seja $u = x$ e $dv = e^{-x/2}dx$. Então $du = dx$ e $v = -2e^{-x/2}$. Portanto,

$$A = 2\left(-2xe^{-x/2}\Big]_0^4 + 2\int_0^4 e^{-x/2}dx\right) = 2\left[-2xe^{-x/2} - 4e^{-x/2}\right]_0^4 = 2[(-8e^{-2} - 4e^{-2}) - (-4)] = 8 - 24e^{-2}$$

41. Se M kg for a massa da barra, então, $M = \int_0^6 2e^{-x}dx = -2e^{-x}\Big]_0^6 = -2e^{-6} + 2$. $M_y = \int_0^6 2xe^{-x}dx$.

Seja $u = 2x$ e $dv = e^{-x}dx$. Então, $du = 2\,dx$ e $v = -e^{-x}$.

$$M_y = -2xe^{-x}\Big]_0^6 + \int_0^6 2e^{-x}dx = -12e^{-6} + (2 - 2e^{-6}) = 2 - 14e^{-6}.\quad \bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2 - 14e^{-6}}{2 - 2e^{-6}} = \frac{e^6 - 7}{e^6 - 1}.$$

A massa é $(2 - 2e^{-6})$ kg e o centróide está a $\dfrac{e^6 - 7}{e^6 - 1}$ m de um dos extremos.

43. A região está no primeiro quadrante limitada por $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, e pelo eixo y.

$$A = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx = \operatorname{sen} x + \cos x \Big]_0^{\pi/4} = \sqrt{2} - 1$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \cos 2x\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x\Big]_0^{\pi/4} = \frac{1}{4}.\quad M_y = \int_0^{\pi/4} x(\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx.$$

Seja $u = x$ e $dv = (\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx$. Então, $du = dx$ e $v = \operatorname{sen} x + \cos x$.

$$M_y = x(\operatorname{sen} x + \cos x)\Big]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} (\operatorname{sen} x + \cos x)\,dx = \frac{\pi}{4}\sqrt{2} - \Big[-\cos x + \operatorname{sen} x\Big]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}\sqrt{2} - 1$$

$\bar{x} = \dfrac{M_y}{A} = \dfrac{\frac{1}{4}\pi\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} \approx 0,267$ e $\bar{y} = \dfrac{M_x}{A} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\sqrt{2} - 1} \approx 0,604$. O centróide está em $(0,267, 0,604)$.

45. Escolha a origem na borda do tanque, com o eixo positivo x para baixo. Seja W J o trabalho realizado para bombear a água até a borda do tanque. um elemento do volume é um disco circular de raio $e^{-\xi_i}$, $\xi_i \in [0, 4]$. Seja $u = x$, $dv = e^{-2x}$; $du = dx$, $v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$.

$$W = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} w\xi_i \left(e^{-\xi_i}\right)^2 \Delta_i x = w\pi \int_0^4 x e^{-2x}\,dx = w\pi\left[-\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx\right]_0^4 = w\pi\left[-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right]_0^4$$

$$= w\pi\left(-2e^{-8} - \frac{1}{4}e^{-8} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}(1 - 9e^{-8})\,w\pi$$

47. $C'(x) = \ln x$; logo $C(x) = \int \ln x\,dx$. Seja $u = \ln x$ e $dv = dx$. Então, $du = \frac{1}{x}\,dx$ e $v = x$.

$C(x) = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$. Como $C(1) = 5$, $5 = 0 - 1 + C$; $C = 6$. $C(x) = x\ln x - x + 6$.

49. (a) Se $r = -1$, então, $\int x^r \ln x\,dx = \int \ln x\,\dfrac{dx}{x} = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2 + C$.

Se $r \neq -1$, seja $u = \ln x$ e $dv = x^r\,dx$. Então $du = \frac{1}{x}\,dx$ e $v = \dfrac{x^{r+1}}{r+1}$.

$$\int x^r \ln x\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1}\ln x - \int \frac{x^r}{r+1}\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1}\ln x - \frac{x^{r+1}}{(r+1)^2} + C$$

(b) Com $r = 3$ temos $\int x^3 \ln x\,dx = \dfrac{x^4}{4}\ln x - \dfrac{x^4}{16} + C$.

51. (a) Seja $u = \sec^{m-2} x$ e $dv = \sec^2 x$. Então, $du = (m-2)\sec^{m-2} x \operatorname{tg} x\,dx$ e $v = \operatorname{tg} x$.

$$\int \sec^m x\,dx = \int \sec^{m-2} x \sec^2 x\,dx = \sec^{m-2} x \operatorname{tg} x - (m-2)\int \sec^{m-2} x \operatorname{tg}^2 x\,dx$$

$$\int \sec^m x\,dx = \sec^{m-2} x \operatorname{tg} x - (m-2)\int \sec^{m-2} x(\sec^2 x - 1)\,dx$$

$$\int \sec^m x\,dx = \sec^{m-2} x \operatorname{tg} x - (m-2)\int \sec^m x\,dx + (m-2)\int \sec^{m-2} x\,dx$$

$$(m-1)\int \sec^m x\,dx = \sec^{m-2} x \operatorname{tg} x + (m-2)\int \sec^{m-2} x\,dx$$

$$\int \sec^m x\,dx = \frac{\sec^{m-2} x \operatorname{tg} x}{m-1} + \frac{m-2}{m-1}\int \sec^{m-2} x\,dx$$

(b) Da fórmula da parte (a) com $m = 6$, e novamente com $m = 4$, temos

$$\int \sec^6 x\,dx = \frac{\sec^4 x \operatorname{tg} x}{5} + \frac{4}{5}\int \sec^4 x\,dx = \frac{\sec^4 x \operatorname{tg} x}{5} + \frac{4}{5}\left(\frac{\sec^2 x \operatorname{tg} x}{3} + \frac{2}{3}\int \sec^2 x\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{5}\sec^4 x \operatorname{tg} x + \frac{4}{15}\sec^2 x \operatorname{tg} x + \frac{8}{15}\operatorname{tg} x + C$$

53. Integramos o fator entre chaves e diferenciamos o outro fator, então repetimos o procedimento

$$I = \int (e^{au})\,\text{sen}\,nu\,du = \frac{1}{a}e^{au}\,\text{sen}\,nu - \frac{n}{a}\int (e^{au})\cos nu\,du = \frac{1}{a}e^{au}\,\text{sen}\,nu - \frac{n}{a}\left[\frac{1}{a}\cos nu - \frac{n}{a}\int e^{au}(\,\text{sen}\,nu)\,du\right]$$

$$= \frac{1}{a}e^{au} - \frac{n}{a}\left[\frac{1}{a}e^{au}\cos nu + \frac{n}{a}I\right] = \frac{1}{a}e^{au}\,\text{sen}\,nu - \frac{n}{a^2}e^{au}\cos nu - \frac{n^2}{a^2}I.$$ Portanto,

$$\frac{a^2 + n^2}{a^2}I = \frac{ae^{au}\,\text{sen}\,nu - ne^{au}\cos nu}{a^2}$$ e logo, $$I = \frac{e^{au}}{a^2 + n^2}(a\,\text{sen}\,nu - n\cos nu) + C$$

55. A corrente é i ampères em t s. Pela fórmula (10) da Secção 7.8, $\frac{di}{dt} + 3i = 10\,\text{sen}\,10t$.

A ED é linear em i com $P = 3$. $\int 3\,dt = 3t$; $IF = e^{3t}$. $\left(\frac{di}{dt} + 3i\right)e^{3t} = 10e^{3t}.\text{sen}\,10t$;

$ie^{3t} = 10\int e^{3t}\,\text{sen}\,10t\,dt = 10\frac{e^{3t}}{3^2 + 10^2}(3\,\text{sen}\,10t - 10\cos 10t) + C$. Qdo. $i = 0$ e $t = 0$, temos

$0 = \frac{10}{109}(0 - 10) + C$; $C = \frac{100}{109}$. $i = \frac{10}{109}(3\,\text{sen}\,10t - 10\cos 10t) + \frac{100}{109}e^{-3t}$

(a) Qdo. $t = 0,1$, $i = \frac{10}{109}(3\,\text{sen}\,1 - 10\cos 1) + \frac{100}{109}e^{-0,3} \approx 0,4156$

(b) Qdo. $t = 3$, $i = \frac{10}{109}(3\,\text{sen}\,30 - 10\cos 30) + \frac{100}{109}e^{-9} = -0,4133$

57. A corrente é i ampères em t s. Pela fórmula (10) da Secção 7.8,

$0,1\frac{di}{dt} + 100i = 120\,\text{sen}\,120\pi t$; $\frac{di}{dt} + 1.000i = 1.200\,\text{sen}\,120\pi t$. A ED é linear em i com $P = 1.000$.

$\int 1.000\,dt = 1.000t$; $IF = e^{1.000t}$, $\left(\frac{di}{dt} + 1.000i\right)e^{1.000t} = 1.200e^{1.000t}\,\text{sen}\,120\pi t$;

$$ie^{1.000t} = 1.200\int e^{1.000t}\,\text{sen}\,120\pi t\,dt = 1.200\frac{e^{1.000t}}{1.000^2 + (120\pi)^2}(1.000\,\text{sen}\,120\pi t - 120\pi\cos 120\pi t) + C$$

Qdo, $i = 0$ e $t = 0$, obtemos $0 = \frac{1.200}{1.000^2 + (120\pi)^2}(-120\pi) + C$; $C = \frac{90\pi}{625 + 9\pi^2}$

(a) $i = \frac{3}{625 + 9\pi^2}(250\,\text{sen}\,120\pi t - 30\pi\cos 120\pi t) + \frac{90\pi}{625 + 9\pi^2}e^{-1.000t}$

(b) $i \approx \frac{3}{625 + 9\pi^2}(250\,\text{sen}\,120\pi t - 30\pi\cos 120\pi t)$ qdo, t é grande.

EXERCÍCIOS 9.2 Integração de Potências de Seno e Co-seno

1. $\int \operatorname{sen}^4 x(\cos x\, dx) = \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C$

3. $\int \cos^3 4x\ \operatorname{sen} 4x\, dx = -\frac{1}{4}\int \cos^3 4x(-4\ \operatorname{sen} 4x\, dx) = -\frac{1}{16}\cos^4 4x + C$

5. $\int \operatorname{sen}^3 x\, dx = \int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x\, dx = \int (1-\cos^2 x)\operatorname{sen} x\, dx = \int \operatorname{sen} x\, dx + \int \cos^2 x(-\operatorname{sen} x\, dx) = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$

7. $\int \operatorname{sen}^4 z\, dz = \int (\operatorname{sen}^2 z)^2 dz = \int \left(\frac{1-\cos 2z}{2}\right)^2 dz = \frac{1}{4}\int dz - \frac{1}{2}\int \cos 2z\, dz + \frac{1}{4}\int \cos^2 2z\, dz$

$= \frac{1}{4}z - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2z + \frac{1}{8}\int (1+\cos 4z)\, dz = \frac{1}{4}z - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2z + \frac{1}{8}z + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4z + C = \frac{3}{8}z - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2z + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4z + C$

9. $\int \cos^2 \frac{1}{2}x\, dx = \int \left(\frac{1+\cos x}{2}\right) dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + C$

11. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\, dx = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \cos x\, dx = \int \operatorname{sen}^2 x(1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x\, dx = \int (\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^4 x)\cos x\, dx$

$= \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x - \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C$

13. $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\, dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x\, dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x\, dx$

$= \int (-\cos^2 x + 2\cos^4 x - \cos^6 x)(-\operatorname{sen} x\, dx) = -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C$

15. $\int \operatorname{sen}^2 3t \cos^2 3t\, dt = \int (\operatorname{sen} 3t \cos 3t)^2 dt = \int \left(\frac{\operatorname{sen} 6t}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{4}\int \operatorname{sen}^2 6t\, dt = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1-\cos 12t}{2}\right) dt$

$= \frac{1}{8}t - \frac{1}{96}\operatorname{sen} 12t + C$

17. $\int \frac{\cos^3 3x}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} 3x}}\, dx = \int \frac{\cos^2 3x \cos 3x}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} 3x}}\, dx = \int (1-\operatorname{sen}^2 3x)(\operatorname{sen} 3x)^{-1/3}\cos 3x\, dx$

$= \frac{1}{3}\int [(\operatorname{sen} 3x)^{-1/3} - (\operatorname{sen} 3x)^{5/3}](3\cos 3x\, dx) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 3x)^{2/3} - \frac{1}{8}(\operatorname{sen} 3x)^{8/3} + C$

Nota: Usamos as seguintes fórmulas:

$\operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(a-b) + \operatorname{sen}(a+b)]$

$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$

19. $\int \cos 4x \cos 3x\, dx = \frac{1}{2}\int (\cos x + \cos 7x)\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \frac{1}{14}\operatorname{sen} 7x + C$

21. $\int \operatorname{sen} 3y \cos 5y\, dy = \frac{1}{2}\int (-\operatorname{sen} 2y + \operatorname{sen} 8y)\, dy = \frac{1}{4}\cos 2y - \frac{1}{16}\cos 8y + C$

23. $\int(\operatorname{sen}3t-\operatorname{sen}2t)^2dt=\int(\operatorname{sen}^2 3t-2\operatorname{sen}3t\operatorname{sen}2t+\operatorname{sen}^2 2t)\,dt$

$=\int\left(\frac{1-\cos 6t}{2}\right)dt-\int(\cos t-\cos 5t)\,dt+\int\left(\frac{1-\cos 4t}{2}\right)dt$

$=\frac{1}{2}t-\frac{1}{12}\operatorname{sen}6t-\operatorname{sen}t+\frac{1}{5}\operatorname{sen}5t+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}\operatorname{sen}4t+C$

$=t-\frac{1}{12}\operatorname{sen}6t-\operatorname{sen}t+\frac{1}{5}\operatorname{sen}5t-\frac{1}{8}\operatorname{sen}4t+C$

25. $\int_0^{\pi/2}\cos^3x\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos^2x\cos x\,dx=\int_0^{\pi/2}(1-\operatorname{sen}^2x)(\cos x\,dx)=\operatorname{sen}x-\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3x\Big]_0^{\pi/2}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

27. $\int_0^1\operatorname{sen}^4\tfrac{1}{2}\pi x\,dx=\int_0^1\left(\frac{1-\cos\pi x}{2}\right)^2dx=\frac{1}{4}\int_0^1(1-2\cos\pi x+\cos^2\pi x)\,dx$

$=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2\pi}\operatorname{sen}\pi x\Big]_0^1+\frac{1}{4}\int_0^1\left(\frac{1+\cos 2\pi x}{2}\right)dx=\frac{1}{4}+\left[\frac{1}{8}x+\frac{1}{16\pi}\operatorname{sen}2\pi x\right]_0^1=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

29. $\int_0^1\operatorname{sen}^2\pi t\cos^2\pi t\,dt=\int_0^1(\operatorname{sen}\pi t\cos\pi t)^2dt=\int_0^1\left(\frac{\operatorname{sen}2\pi t}{2}\right)^2dt=\frac{1}{4}\int_0^1\operatorname{sen}^2 2\pi t\,dt=\frac{1}{4}\int_0^1\left(\frac{1-\cos 4\pi t}{2}\right)dt$

$=\frac{1}{8}\left[t-\frac{1}{4\pi}\operatorname{sen}4\pi t\right]_0^1=\frac{1}{8}$

31. $\int_0^{\pi/8}\operatorname{sen}3x\cos 5x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/8}(-\operatorname{sen}2x+\operatorname{sen}8x)\,dx=\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 8x\Big]_0^{\pi/8}=\left(\frac{1}{8}\sqrt{2}+\frac{1}{16}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\right)$

$=\frac{1}{8}(\sqrt{2}-1)$

33. (a) Seja $u=\operatorname{sen}x$, $du=\cos x\,dx$. $\int 2\operatorname{sen}x\cos x\,dx=\int 2u\,du=u^2+C_1=\operatorname{sen}^2x+C_1$

(b) Seja $u=\cos x$, $du=-\operatorname{sen}x\,dx$. $\int 2\operatorname{sen}x\cos x\,dx=-\int 2u\,du=-u^2+C_2=-\cos^2x+C_2=\operatorname{sen}^2x-1+C_2$

(c) $\int 2\operatorname{sen}x\cos x\,dx=\int\operatorname{sen}2x\,dx=-\tfrac{1}{2}\cos 2x+C_3=-\tfrac{1}{2}(1-2\operatorname{sen}^2x)+C_3=\operatorname{sen}^2x-\tfrac{1}{2}+C_3$

As respostas são as mesmas com $C_2=C_1+1$ e $C_3=C_1+\tfrac{1}{2}$.

35. $\int_0^{\pi}\cos^nx\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos^nx\,dx+\int_{\pi/2}^{\pi}\cos^nx\,dx$. Na segunda integral seja $x=\pi-u$, $dx=-du$; logo,

$I=\int_0^{\pi}\cos^nx\,dx=\int_0^{\pi/2}(\cos x)^ndx+\int_{\pi/2}^{0}[\cos(\pi-u)]^ndx=\int_0^{\pi/2}(\cos x)^ndx+\int_0^{\pi/2}(-\cos u)^ndx$

Se n for um inteiro positivo ímpar, a soma das duas últimas integrais será zero; logo, $I=0$.

37. Seja $x=-u$, $dx=-du$. Então,

$I=\int_{-1}^{1}\cos n\pi x\operatorname{sen}m\pi x\,dx=\int_{1}^{-1}\cos(-n\pi u)\operatorname{sen}(-n\pi u)(-du)=\int_{-1}^{1}\cos n\pi u(-\operatorname{sen}n\pi u)\,du=-I.$

Logo, $I=0$ para quaisquer números m e n. Se f for uma função ímpar qualquer, então,

$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=0.$

39. A região é limitada por $y = \text{sen}^2 x$ e pelo eixo x de $x = 0$ a $x = \pi$.

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=0}^{n} \text{sen}\ \xi_i \Delta_i x = \int_0^{\pi} \text{sen}^2 x\, dx = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 - \cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\text{sen}\ 2x\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\pi$$

41. Um elemento do volume é um disco circular centrado no eixo x, $x \in [0, \pi]$, de raio $\text{sen}^2 \xi_i$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi (\text{sen}^2 \xi_i)^2 \Delta_i x = \pi \int_0^{\pi} (\text{sen}^2 x)^2 dx = \pi \int_0^{\pi} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{4}\int_0^{\pi} (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[x - \text{sen}\ 2x\right]_0^{\pi} + \frac{\pi}{4}\int_0^{\pi}\left(\frac{1 + \cos 4x}{2}\right) dx = \frac{\pi}{4}\cdot\pi + \frac{\pi}{8}\left[x + \frac{1}{4}\text{sen}\ 4x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{3}{8}\pi^2$$

43. Um elemento do volume é um anel circular centrado na reta $y = 1$, $x \in [0, \pi]$, de raios 1 e $1 - \text{sen}^2 \xi_i = \cos^2 \xi_i$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi [1 - (\cos^2 \xi_i)^2] \Delta_i x = \pi \int_0^{1}\left[1 - \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2\right] dx = \pi\left[x\right]_0^{1} - \frac{\pi}{4}\int_0^{\pi} (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx$$

$$= \pi^2 - \frac{\pi}{4}\left[x + \text{sen}\ 2x\right]_0^{\pi} - \frac{\pi}{4}\int_0^{\pi}\left(\frac{1 + \cos 4x}{2}\right) dx = \pi^2 - \frac{\pi}{4}\cdot\pi - \frac{\pi}{8}\left[x + \frac{1}{4}\text{sen}\ 4x\right]_0^{\pi} = \pi^2 - \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{5}{8}\pi^2$$

45. A região é limitada por $y = \cos x$, pelo eixo x, $x = 1$ e $x = \tfrac{1}{2}\pi$.

$$A = \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = \text{sen}\ x\Big]_0^{\pi/2} = 1. \quad M_x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{4}\left[x + \frac{1}{2}\text{sen}\ 2x\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}\pi.$$

$M_y = \int_0^{\pi/2} x \cos x\, dx$. Seja $u = x$ e $dv = \cos x\, dx$. Então, $du = dx$ e $v = \text{sen}\ x$. Portanto,

$$M_y = x\ \text{sen}\ x\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \text{sen}\ x\, dx = \frac{1}{2}\pi + \Big[\cos x\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\pi - 1$$

$\bar{x} = \dfrac{M_y}{A} = \dfrac{1}{2}\pi - 1$ e $\bar{y} = \dfrac{M_x}{A} = \dfrac{1}{8}\pi$. O centróide está no ponto $\left(\frac{1}{2}\pi - 1, \frac{1}{8}\pi\right)$.

47. $$\frac{d}{du}\text{sen}^{n-1} u \cos u = (n - 1)\text{sen}^{n-2} u \cos^2 u - \text{sen}^n u = (n - 1)\text{sen}^{n-2} u (1 - \text{sen}^2 u) - \text{sen}^n u$$

$= (n - 1)\text{sen}^{n-2} u - n\,\text{sen}^n u$. Portanto,

$$\text{sen}^{n-1} u \cos u = (n - 1)\int \text{sen}^{n-2} u\, du - n\int \text{sen}^n u\, du; \quad \int \text{sen}^n u\, du = -\frac{1}{n}\text{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n}\int \text{sen}^n u\, du$$

49. A equação do dique é $y = -100 \cos\frac{\pi}{200}x$, $x \in [-100, 100]$. Seja $f(x) = -y$. A força sobre o elemento vertical de área $f(\xi_i)\Delta_i x$ e a profundidade média é $\tfrac{1}{2}f(\xi_i)$, é $\tfrac{1}{2}\rho f(\xi_i)^2 \Delta x_i$. Se f N for a força do dique, devido à simetria,

$$F = 2\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}\rho f(\xi_i)^2 \Delta_i x = \rho \int_0^{100}\left(100 \cos\frac{\pi}{200}x\right)^2 dx = 5000\int_0^{100}\left(1 + \cos\frac{\pi}{100}\right) dx$$

$$= 5000\rho\left[x + \frac{100}{\pi}\text{sen}\ \frac{\pi}{100}x\right]_0^{100} = 5000(62,5)\,100 = 31.250.000$$

A força do dique é **31.250.000** N= **15.625** toneladas.

EXERCÍCIOS 9.3 Integração de Potências da Tangente, Co-tangente, Secante e Co-secante

1. $\int tg^2 5x\,dx = \int (sec^2 5x - 1)\,dx = \frac{1}{5}\,tg\,5x - x + C$

3. Seja $u = 2x^2$, $du = 4x\,dx$.

$\int x\,cotg^2\,2x^2 dx = \frac{1}{4}\int cotg^2 u\,du = \frac{1}{4}\int (cosec^2 u - 1)\,du = -\frac{1}{4}\,cotg\,u - \frac{1}{4}\,u + C = -\frac{1}{4}\,cotg\,2x^2 - \frac{1}{2}\,x^2 + C$

5. $\int cotg^3 t\,dt = \int (cosec^2 t - 1)\,cotg\,t\,dt = \int cosec\,t(cosec\,t\,cotg\,t\,dt) - \int cotg\,t\,dt = -\frac{1}{2}\,cosec^2 t - ln\,|sen\,t| + C$

7. $\int tg^6 3x\,dx = \int tg^4 3x(sec^2 3x - 1)\,dx = \frac{1}{3}\int tg^4 3x(3\,sec^2 3x\,dx) - \int tg^4 3x\,dx$

$= \frac{1}{15}\,tg^5 3x - \int tg^2 3x(sec^2 3x - 1)\,dx = \frac{1}{15}\,tg^5 3x - \frac{1}{3}\int tg^2 3x(3\,sec^2 3x\,dx) + \int tg^2 3x\,dx$

$= \frac{1}{15}\,tg^5 3x - \frac{1}{9}\,tg^3 3x + \int (sec^2 3x - 1)\,dx = \frac{1}{15}\,tg^5 3x - \frac{1}{9}\,tg^3 3x + \frac{1}{3}\,tg\,3x - x + C$

9. $\int sec^4 x\,dx = \int (tg^2 x + 1)\,sec^2 x\,dx = \frac{1}{3}\,tg^3 x + tg\,x + C$

11. Seja $u = cosec\,x$ e $dv = cosec^2 x\,dx$. Então, $du = -cosec\,x\,cotg\,x\,dx$ e $v = -cotg\,x$.

$\int cosec^3 x\,dx = -cosec\,x\,cotg\,x - \int cosec\,x\,cotg^2 x\,dx = -cosec\,x\,cotg\,x - \int cosec\,x(cosec^2 x - 1)\,dx$

$\int cosec^3 x\,dx = -cosec\,x\,cotg\,x - \int cosec^3 x\,dx + \int cosec\,x\,dx;\ 2\int cosec^3 x\,dx = -cosec\,x\,cotg\,x + ln\,|cosec\,x - cotg\,x| + 2C$

$\int cosec^3 x\,dx = -\frac{1}{2}\,cosec\,x\,cotg\,x + \frac{1}{2}\,ln\,|cosec - cotg\,x| + C$

13. Seja $u = e^x$, $du = e^x dx$.

$\int e^x\,tg^4(e^x)\,dx = \int tg^4 u\,du = \int tg^2 u(sec^2 u - 1)\,du = \int tg^2 u\,sec^2 u\,du - \int (sec^2 u - 1)\,du$

$= \frac{1}{3}\,tg^3 u - tg\,u + u + C = \frac{1}{3}\,tg^3(e^x) - tg(e^x) + e^x + C$

15. $\int tg^6 x\,sec^4 x\,dx = \int tg^6 x(tg^2 x + 1)\,sec^2 x\,dx = \int (tg^8 x + tg^6 x)\,sec^2 x\,dx = \frac{1}{9}\,tg^9 x + \frac{1}{7}\,tg^7 x + C$

17. $\int cotg^2 3x\,cosec^4 3x\,dx = \int cotg^2 3x(cotg^2 3x + 1)\,cosec^2 3x\,dx = \frac{1}{3}\int (cotg^4 3x + cotg^2 3x)(3\,cosec^2 3x\,dx)$

$= -\frac{1}{15}\,cotg^5 3x - \frac{1}{9}\,cotg^3 3x + C$

19. $\int (tg\,2x + cotg\,2x)^2 dx = \int (tg^2 2x + 2 + cotg^2 2x)\,dx = \int (sec^2 2x - 1 + 2 + cosec^2 2x - 1)\,dx$

$= \frac{1}{2}\,tg\,2x - \frac{1}{2}\,cotg\,2x + C$

21. $\int \frac{2\,sen\,w - 1}{cos^2 w}\,dw = \int (2\,tg\,w\,sec\,w - sec^2 w)\,dw = 2\,sec\,w - tg\,w + C$

23. $\int \operatorname{tg}^5 3x\,dx = \int \operatorname{tg}^3 3x(\sec^2 3x - 1)\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 3x - \int \operatorname{tg}^3 3x\,dx = \frac{1}{12}\operatorname{tg}^4 3x - \int \operatorname{tg} 3x(\sec^2 3x - 1)\,dx$

$= \frac{1}{12}\operatorname{tg}^4 3x - \frac{1}{6}\operatorname{tg}^2 3x + \frac{1}{3}\ln|\sec 3x| + C$

25. $\int \frac{du}{1 + \sec \frac{1}{2}u} = \int \frac{\cos \frac{1}{2}u}{\cos \frac{1}{2}u + 1}\,du = \int \frac{2\cos^2 \frac{1}{4}u - 1}{2\cos^2 \frac{1}{4}u}\,du = \int (1 - \tfrac{1}{2}\sec^2 \tfrac{1}{4}u)\,du = u - 2\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}u + C$

27. $\int \frac{\sec^3 x}{\operatorname{tg}^4 x}\,dx = \int \frac{1}{\cos^3 x}\cdot\frac{\cos^4 x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx = \int \frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^4 x} = -\frac{1}{3}\operatorname{sen}^{-3}x + C = -\frac{1}{3}\operatorname{cosec}^3 x + C$

29. Seja $u = \ln x$, $du = dx/x$.

$\int \frac{\operatorname{tg}^3(\ln x)\sec^6(\ln x)}{x}\,dx = \int \operatorname{tg}^3 u \sec^6 u\,du = \int (\sec^2 u - 1)\sec^6 u \operatorname{tg} u\,du$

$= \int (\sec^7 u - \sec^5 u)\sec u \operatorname{tg} u\,du = \frac{1}{8}\sec^8 u - \frac{1}{6}\sec^6 u + C = \frac{1}{8}\sec^8(\ln x) - \frac{1}{6}\sec^6(\ln x) + C$

31. $\int_{\pi/16}^{\pi/12} \operatorname{tg}^3 4x\,dx = \int_{\pi/16}^{\pi/12}(\sec^2 4x - 1)\operatorname{tg} 4x\,dx = \int_{\pi/16}^{\pi/12}\operatorname{tg} 4x(\sec^2 4x\,dx) - \int_{\pi/16}^{\pi/12}\operatorname{tg} 4x\,dx$

$= \frac{1}{8}\operatorname{tg}^2 4x\Big]_{\pi/16}^{\pi/12} - \frac{1}{4}\ln|\sec 4x|\Big]_{\pi/16}^{\pi/12} = \frac{1}{8}(3 - 1) - \frac{1}{4}(\ln 2 - \ln\sqrt{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\ln 2$

33. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sec^6 x\,dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2\sec^2 x\,dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}(1 + 2\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x)\sec^2 x\,dx$

$= \operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) - \left(-1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{56}{15}$

35. $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\cos^4 t}{\operatorname{sen}^6 t}\,dt = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\operatorname{cotg}^4 t \operatorname{cosec}^2 t\,dt = -\frac{1}{5}\operatorname{cotg}^5 t\Big]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{1}{5}$

37. A região é limitada por $y = \operatorname{tg}^2 x$, pelo eixo x e $x = \frac{1}{4}\pi$.

$A = \int_0^{\pi/4}\operatorname{tg}^2 x\,dx = \int_0^{\pi/4}(\sec^2 x - 1)\,dx = \operatorname{tg} x - x\Big]_0^{\pi/4} = 1 - \frac{1}{4}\pi.$

39. Um elemento do volume é um disco circular centrado no eixo x, $x \in [0, \frac{1}{4}\pi]$, de raio $\sec^2 \xi_i$.

$V = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\pi(\sec^2\xi_i)^2\Delta_i x = \pi\int_0^{\pi/4}\sec^2 x \sec^2 x\,dx = \pi\int_0^{\pi/4}(\operatorname{tg}^2 x + 1)\sec^2 x\,dx$

$= \pi\left[\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x\right]_0^{\pi/4} = \pi\left(\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{4}{3}\pi$

41. $\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \int \operatorname{tg}^{n-2}x \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \operatorname{tg}^{n-2}x(\sec^2 x - 1)\,dx = \int \operatorname{tg}^{n-2}x\sec^2 x\,dx - \int \operatorname{tg}^{n-2}x\,dx$

$= \frac{\operatorname{tg}^{n-1}x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2}x\,dx$ se $n > 1$.

43. $\int \operatorname{cotg}^n x\,dx = \int \operatorname{cotg}^{n-2}x \operatorname{cotg}^2 x\,dx = \int \operatorname{cotg}^{n-2}x(\operatorname{cosec}^2 x - 1)\,dx = \int \operatorname{cotg}^{n-2}x \operatorname{cosec}^2 x\,dx - \int \operatorname{cotg}^{n-2}x\,dx$

$= -\frac{\operatorname{cotg}^{n-1}x}{n-1} - \int \operatorname{cotg}^{n-2}x\,dx$ se $n > 1$.

EXERCÍCIOS 9.4 Integração por Substituição Trigonométrica

1\. Seja $x = 2 \operatorname{sen}\theta$ onde $0 < \theta \leq \frac{1}{2}\pi$ se $x > 0$ e $-\frac{1}{2}\pi \leq \theta < 0$ se $x < 0$. Então, $dx = 2\cos\theta\, d\theta$ e

$\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4\operatorname{sen}^2\theta} = 2\sqrt{\cos^2\theta} = 2\cos\theta.$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 - x^2}} = \int \frac{2\cos\theta\, d\theta}{4\operatorname{sen}^2\theta(2\cos\theta)} = \frac{1}{4}\int \operatorname{cosec}^2\theta\, d\theta = -\frac{1}{4}\operatorname{cotg}\theta + C = -\frac{\sqrt{4 - x^2}}{4x} + C$$

3\. Seja $x = 2\operatorname{tg}\theta$ onde $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ se $x > 0$ e $-\frac{1}{2}\pi < \theta < 0$ se $x < 0$. Então, $dx = 2\sec^2\theta\, d\theta$ e

$\sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{4\operatorname{tg}^2\theta + 4} = 2\sqrt{\sec^2\theta} = 2\sec\theta.$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4}} = \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{2\operatorname{tg}\theta(2\sec\theta)} = \frac{1}{2}\int \operatorname{cosec}\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\ln|\operatorname{cosec}\theta - \operatorname{cotg}\theta| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x}\right| + C$$

5\. Seja $x = 5\operatorname{sen}\theta$ onde $0 < \theta \leq \frac{1}{2}\pi$ se $x > 0$ e $-\frac{1}{2}\pi \leq \theta < 0$ se $x < 0$. Então, $dx = 5\cos\theta\, d\theta$ e

$\sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - 25\operatorname{sen}^2\theta} = 5\sqrt{\cos^2\theta} = 5\cos\theta.$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{25 - x^2}} = \int \frac{5\cos\theta\, d\theta}{5\operatorname{sen}\theta(5\cos\theta)} = \frac{1}{5}\int \operatorname{cosec}\theta\, d\theta = \frac{1}{5}\ln|\operatorname{cosec}\theta - \operatorname{cotg}\theta| + C = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{5 - \sqrt{25 - x^2}}{x}\right| + C$$

7\. Suponha $a > 0$. Seja $x = a\sec\theta$ onde $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ se $x > a$ e $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ se $x < -a$. Então,

$dx = a\sec\theta\operatorname{tg}\theta\, d\theta$ e $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2} = a\sqrt{\operatorname{tg}^2\theta} = a\operatorname{tg}\theta.$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a\sec\theta\operatorname{tg}\theta\, d\theta}{a\operatorname{tg}\theta} = \int \sec\theta\, d\theta = \ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + C$$

$$= \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right| + C = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| - \ln a + C = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2} + C|$$

9\. **Método 1**. Seja $x = 2\operatorname{tg}\theta$ onde $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ se $x > 0$ e $-\frac{1}{2}\pi < \theta < 0$ se $x < 0$. Então,

$dx = 2\sec^2\theta\, d\theta$ e $x^2 + 4 = 4\operatorname{tg}^2\theta + 4 = 4(\operatorname{tg}^2\theta + 1) = 4\sec^2\theta.$

$$\int \frac{x^2\, dx}{(x^2 + 4)^2} = \int \frac{4\operatorname{tg}^2\theta(2\sec^2\theta\, d\theta)}{16\sec^4\theta} = \frac{1}{2}\int \frac{\operatorname{tg}^2\theta}{\sec^2\theta}\, d\theta = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\int (1 - \cos 2\theta)\, d\theta = \frac{1}{4}\theta - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 2\theta + C$$

$$= \frac{1}{4}\theta - \frac{1}{4}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}\cdot\frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}} + C = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{2} - \frac{x}{2(x^2 + 4)} + C.$$

Método 2.

$$\int \frac{x^2\, dx}{(x^2 + 4)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{x^2 + 4}{(x^2 + 4)^2}\, dx + \frac{1}{2}\int \frac{x^2 - 4}{(x^2 + 4)^2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 + 4} + \frac{1}{2}\int \frac{(1 - 4x^{-2})\, dx}{(x + 4x^{-1})^2} = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x + 4x^{-1}}\right) + C$$

11\. Seja $x = \frac{3}{2}\sec\theta$ onde $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ se $x > \frac{3}{2}$ e $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ se $x < -\frac{3}{2}$. Então, $dx = \frac{3}{2}\sec\theta\operatorname{tg}\theta\, d\theta$

e $(4x^2 - 9)^{3/2} = (9\sec^2 - 9)^{3/2} = 27(\operatorname{tg}^2\theta)^{3/2} = 27\operatorname{tg}^3\theta.$

$$\int \frac{dx}{(4x^2 - 9)^{3/2}} = \int \frac{\frac{3}{2}\sec\theta\operatorname{tg}\theta\, d\theta}{27\operatorname{tg}^3\theta} = \frac{1}{18}\int \frac{\cos\theta\, d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = -\frac{1}{18}\operatorname{cosec}\theta + C = -\frac{1}{18}\cdot\frac{2x}{\sqrt{4x^2 - 9}} + C = -\frac{x}{9\sqrt{4x^2 - 9}} + C$$

13. Seja $t^2 = u$, $2t\,dt = du$. Então, $I = \int \frac{2\,dt}{t\sqrt{t^4+25}} = \int \frac{2t\,dt}{t^2\sqrt{t^4+25}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2+25}}$.

Agora seja $u = 5\,\text{tg}\,\theta$ onde $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ pois $u > 0$. Então, $du = 5\sec^2\theta\,d\theta$ e

$\sqrt{u^2+25} = \sqrt{25\,\text{tg}^2\theta + 25} = 5\sqrt{\sec^2\theta} = 5\sec\theta$. Portanto,

$$I = \int \frac{5\sec^2\theta\,d\theta}{5\,\text{tg}\,\theta(5\sec\theta)} = \frac{1}{5}\int\frac{\sec\theta}{\text{tg}\,\theta}\,d\theta = \frac{1}{5}\int \text{cosec}\,\theta\,d\theta = \frac{1}{5}\ln|\text{cosec}\,\theta - \text{cotg}\,\theta| + C$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{\sqrt{u^2+25}}{u} - \frac{5}{u}\right| + C = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{\sqrt{t^4+25}-5}{t^2}\right| + C$$

15. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{4x+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+4)-4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-4}}$

Seja $x + 2 = 2\sec\theta$ onde $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ se $x > 0$ e $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ se $x < -4$. Então,

$dx = 2\sec\theta\,\text{tg}\,\theta\,d\theta$ e $\sqrt{(x+2)^2-4} = \sqrt{4\sec^2\theta - 4} = 2\sqrt{\text{tg}^2\theta} = 2\,\text{tg}\,\theta$.

$$I = \int\frac{2\sec\theta\,\text{tg}\,\theta\,d\theta}{2\,\text{tg}\,\theta} = \int\sec\theta\,d\theta = \ln|\sec\theta + \text{tg}\,\theta| + \bar{C} = \ln\left|\frac{x+2}{2} + \frac{\sqrt{4x+x^2}}{2}\right| + \bar{C}$$

$$= \ln|x + 2 + \sqrt{4x+x^2}| + C$$

17. $I = \int \frac{dx}{(5-4x-x^2)^{3/2}} = \int \frac{dx}{[9-(x+2)^2]^{3/2}}$

Seja $x + 2 = 3\,\text{sen}\,\theta$ onde $0 \le \theta \le \frac{1}{2}\pi$ se $x \ge -2$ e $-\frac{1}{2}\pi \le \theta < 0$ se $x < -2$. Então,

$dx = 3\cos\theta\,d\theta$ e $[9-(x+2)^2]^{3/2} = [9 - 9\,\text{sen}^2\theta]^{3/2} = 27(\cos^2\theta)^{3/2} = 27\cos^3\theta$.

$$I = \int\frac{3\cos\theta\,d\theta}{27\cos^3\theta} = \frac{1}{9}\int\sec^2\theta\,d\theta = \frac{1}{9}\,\text{tg}\,\theta + C = \frac{x+2}{9\sqrt{5-4x-x^2}} + C$$

19. Seja $\text{tg}\,x = 2\,\text{sen}\,\theta$ onde $0 \le \theta \le \frac{1}{2}\pi$ se $\text{tg}\,x \ge 0$ e $-\frac{1}{2}\pi \le \theta < 0$ se $\text{tg}\,x < 0$. Então,

$\sec^2 x\,dx = 2\cos\theta\,d\theta$ e $(4 - \text{tg}^2 x)^{3/2} = (4 - 4\,\text{sen}^2\theta)^{3/2} = 8(\cos^2\theta)^{3/2} = 8\cos^3\theta$.

$$\int\frac{\sec^2 x\,dx}{(4-\text{tg}^2 x)^{3/2}} = \int\frac{2\cos\theta\,d\theta}{8\cos^3\theta} = \frac{1}{4}\int\sec^2\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\,\text{tg}\,\theta + C = \frac{\text{tg}\,x}{4\sqrt{4-\text{tg}^2 x}} + C$$

21. Seja $u = \ln w$, $du = \frac{dw}{w}$. Então, $I = \int\frac{\ln^3 w\,dw}{w\sqrt{\ln^2 w - 4}} = \int\frac{u^3\,du}{\sqrt{u^2-4}}$.

Seja $u = 2\sec\theta$ onde $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ se $u > 2$ e $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ se $u < -2$. Então,

$du = 2\sec\theta\,\text{tg}\,\theta\,d\theta$ e $\sqrt{u^2-4} = \sqrt{4\sec^2\theta - 4} = 2\sqrt{\text{tg}^2\theta} = 2\,\text{tg}\,\theta$.

$$I = \int\frac{8\sec^3\theta(2\sec\theta\,\text{tg}\,\theta\,d\theta)}{2\,\text{tg}\,\theta} = 8\int\sec^4\theta\,d\theta = 8\int(\text{tg}^2\theta + 1)\sec^2\theta\,d\theta = 8\int\text{tg}^2\theta(\sec^2\theta\,d\theta) + 8\int\sec^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{8}{3}\,\text{tg}^3\theta + 8\,\text{tg}\,\theta + C = \frac{8}{3}\cdot\frac{(u^2-4)^{3/2}}{8} + 8\cdot\frac{\sqrt{u^2-4}}{2} + C$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{u^2-4}(u^2 - 4 + 12) + C = \frac{1}{3}\sqrt{\ln^2 w - 4}(8 + \ln^2 w) + C.$$ Ou então,

Seja $u^2 - 4 = t^2$. Então, $u^2 = t^2 + 4$ e $u\,du = t\,dt$.

$$I = \int \frac{u^2(u\,du)}{\sqrt{u^2 - 4}} = \int \frac{(t^2 + 4)(t\,dt)}{t} = \int (t^2 + 4)\,dt = \frac{1}{3}t^3 + 4t + C = \frac{1}{3}t(t^2 + 12) + C = \frac{1}{3}\sqrt{u^2 - 4}(u^2 + 8) + C$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\ln^2 w - 4}(8 + \ln^2 w) + C$$

23. Seja $u = e^t$, $du = e^t dt$. $I = \int \frac{e^t dt}{(e^{2t} + 8e^t + 7)^{3/2}} = \int \frac{du}{(u^2 + 8u + 7)^{3/2}} = \int \frac{du}{[(u + 4)^2 - 9]^{3/2}}$

Seja $u + 4 = 3\sec\theta$ onde $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ pois $u > 0$. Então,

$du = 3\sec\theta\ \operatorname{tg}\theta\,d\theta$ e $[(u + 4)^2 - 9]^{3/2} = (9\sec^2\theta - 9)^{3/2} = 27(\operatorname{tg}^2\theta)^{3/2} = 27\operatorname{tg}^3\theta$.

$$I = \int \frac{3\sec\theta\ \operatorname{tg}\theta\,d\theta}{27\operatorname{tg}^3\theta} = \frac{1}{9}\int \frac{\sec\theta\,d\theta}{\operatorname{tg}^2\theta} = \frac{1}{9}\int \frac{\cos\theta\,d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = -\frac{1}{9}\operatorname{cosec}\theta + C = -\frac{1}{9}\cdot\frac{u + 4}{\sqrt{u^2 + 8u + 7}} + C = -\frac{e^t + 4}{9\sqrt{e^{2t} + 8e^t + 7}} + C$$

25. **Método 1.** Seja $x = 4\operatorname{sen}\theta$ onde $\theta \in [0, \frac{1}{6}\pi]$ pois $x \in [0, 2]$. Então,

$dx = 4\cos\theta\,d\theta$ e $\sqrt{16 - x^2} = \sqrt{16 - 16\operatorname{sen}^2\theta} = 4\sqrt{\cos^2\theta} = 4\cos\theta$.

$$\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{16 - x^2}} = \int_0^{\pi/6} \frac{64\operatorname{sen}^3\theta(4\cos\theta\,d\theta)}{4\cos\theta} = 64\int_0^{\pi/6}\operatorname{sen}^3\theta\,d\theta = -64\int_0^{\pi/6}(1 - \cos^2\theta)(-\operatorname{sen}\theta\,d\theta)$$

$$= -64\cos\theta + \frac{64}{3}\cos^3\theta\Big]_0^{\pi/6} = \left(-64\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{64}{3}\cdot\frac{3}{8}\sqrt{3}\right) - \left(-64 + \frac{64}{3}\right) = -32\sqrt{3} + 8\sqrt{3} + 64 - \frac{64}{3} = \frac{128}{3} - 24\sqrt{3}$$

Método 2. Seja $16 - x^2 = u^2$. Então, $x^2 = 16 - u^2$ e $x\,dx = -u\,du$.

$$\int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{16 - x^2}} = \int_0^2 \frac{x^2\cdot x\,dx}{\sqrt{16 - x^2}} = \int_4^{2\sqrt{3}} \frac{(16 - u^2)(-u\,du)}{u} = \int_{2\sqrt{3}}^4 (16 - u^2)\,du = 16u - \frac{1}{3}u^3\Big]_{2\sqrt{3}}^4$$

$$= \left(64 - \frac{64}{3}\right) - (32\sqrt{3} - 8\sqrt{3}) = \frac{128}{3} - 24\sqrt{3}$$

27. Seja $x = 3\operatorname{tg}\theta$ onde $\theta \in [\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi]$ pois $x \in [\sqrt{3}, 3\sqrt{3}]$. Então,

$dx = 3\sec^2\theta\,d\theta$ e $\sqrt{x^2 + 9} = \sqrt{9\operatorname{tg}^2\theta + 9} = 3\sqrt{\sec^2\theta} = 3\sec\theta$.

$$\int_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 9}} = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{3\sec^2\theta\,d\theta}{9\operatorname{tg}^2\theta(3\sec\theta)} = \frac{1}{9}\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sec\theta}{\operatorname{tg}^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{9}\int_{\pi/6}^{\pi/3}\operatorname{cosec}\theta\operatorname{cotg}\theta\,d\theta = -\frac{1}{9}\operatorname{cosec}\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/3}$$

$$= -\frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} - 2\right) = \frac{1}{27}(6 - 2\sqrt{3})$$

29. $\int_4^6 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{1}{2}\sec^{-1}\frac{x}{2}\Big]_4^6 = \frac{1}{2}\sec^{-1}3 - \frac{1}{2}\sec^{-1}2 = \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1}{3} - \frac{\pi}{6}$

31. Seja $x = 5\ \text{sen}\,\theta$ onde $\theta \in [0, \frac{1}{2}\pi]$ pois $x \in [0, 5]$. Então,

$dx = 5\cos\theta\, d\theta$ e $\sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - 25\ \text{sen}^2\theta} = 5\sqrt{\cos^2\theta} = 5\cos\theta.$

$$\int_0^5 x^2\sqrt{25 - x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} 25\ \text{sen}^2\theta(5\cos\theta)(5\cos\theta\, d\theta) = 625\int_0^{\pi/2}\text{sen}^2\theta\cos^2\theta\, d\theta = \frac{625}{4}\int_0^{\pi/2}\text{sen}^2 2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{625}{8}\int_0^{\pi/2}(1 - \cos 4\theta)\, d\theta = \frac{625}{8}\left[\theta - \frac{\text{sen}\,4\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{625}{8}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{625}{16}\pi$$

33. (a) $$\int\frac{3\, dx}{x\sqrt{4x^2 - 9}} = 3\int\frac{2\, dx}{(2x)\sqrt{(2x)^2 - 9}} = 3\cdot\frac{1}{3}\sec^{-1}\frac{2x}{3} + C = \sec^{-1}\frac{2}{3}x + C$$

(b) Seja $3 - 2x^2 = u^2$, $-4x\, dx = 2u\, du$. Então,

$$\int\frac{5x\, dx}{\sqrt{3 - 2x^2}} = -\frac{5}{4}\int\frac{-4x\, dx}{\sqrt{3 - 2x^2}} = -\frac{5}{4}\int\frac{2u\, du}{u} = -\frac{5}{2}\int du = -\frac{5}{2}u + C = -\frac{5}{2}\sqrt{3 - 2x^2} + C$$

Nota: Se o radical for multiplicado por uma potência impar de x, então uma substituição desse tipo será, freqüentemente, mais fácil do que uma substituição trigonométrica. Conforme os Exercícios 21 e 25.

35. $y = \ln x$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$. Se L unidades for o comprimento de arco de $x = 1$ a $x = 3$, então, $x > 0$ e

$$L = \int_1^3\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx = \int_1^3\sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}}\, dx = \int_1^3\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}\, dx$$

Seja $x = \text{tg}\,\theta$ onde $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$. Então, $dx = \sec^2\theta$ e $\sqrt{x^2 + 1}/x = \text{cosec}\,\theta$

$$L = \int_{x=1}^3\text{cosec}\,\theta(\sec^2 d\theta) = \int_{x=1}^3\text{cosec}\,\theta(\text{tg}^2\theta + 1)\, d\theta = \int_{x=1}^3\sec\theta\ \text{tg}\,\theta\, d\theta + \int_{x=1}^3\text{cosec}\,\theta\, d\theta$$

$$= \left[\sec\theta + \ln|\text{cosec}\,\theta - \text{cotg}\,\theta|\right]_{x=1}^3 = \left[\sqrt{x^2 + 1} + \ln\left|\frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}\right|\right]_1^3 = \sqrt{10} + \ln\frac{\sqrt{10} - 1}{3} - \sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} - 1)$$

$\approx 2,30199$

37. Um elemento do volume é um disco centrado no eixo x $x \in [0, 3]$, de raio $\xi_i\sqrt[4]{9 - \xi_i^2}$.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0}\sum_{i=1}^n \pi\left(\xi_i\sqrt[4]{9 - \xi_i^2}\right)^2\Delta_i x = \pi\int_0^3 x^2\sqrt{9 - x^2}\, dx$$

Seja $x = 3\ \text{sen}\,\theta$ onde $\theta \in [0, \frac{1}{2}\pi]$ pois $x \in [0, 3]$. Então, $dx = 3\cos\theta$ e

$\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - 9\ \text{sen}^2\theta} = 3\sqrt{\cos^2\theta} = 3\cos\theta.$

$$V = \pi\int_0^{\pi/2} 9\ \text{sen}^2\theta(3\cos\theta)(3\cos\theta\, d\theta) = 81\pi\int_0^{\pi/2}\text{sen}^2\theta\cos^2\theta\, d\theta = 81\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\text{sen}^2 2\theta}{4}\, d\theta$$

$$= \frac{81}{4}\pi\int_0^{\pi/2}\frac{1 - \cos 4\theta}{2}\, d\theta = \frac{81}{4}\pi\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\text{sen}\,4\theta}{8}\right]_0^{\pi/2} = \frac{81}{4}\pi\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{81}{16}\pi^2$$

39. $M_y = \int_0^8 x\sqrt{x^2+36} = \frac{1}{2}\int_0^8 (x^2+36)^{1/2}(2x\,dx) = \frac{1}{3}(x^2+36)^{3/2}\Big]_0^8 = \frac{1}{3}(1000-216) = \frac{784}{3}$

$M = \int_0^8 \sqrt{x^2+36}\,dx$. Seja $x = 6\ \text{tg}\ \theta$ onde $0 \leq \theta < \frac{1}{2}\pi$. Então, $dx = 6\sec^2\theta\,d\theta$

e $\sqrt{x^2+36} = \sqrt{36\ \text{tg}^2\theta + 36} = 6\sqrt{\sec^2\theta} = 6\sec\theta$. Portanto,

$$M = \int_{x=0}^{8} 36\sec^3\theta\,d\theta = 36\left[\frac{1}{2}\sec\theta\ \text{tg}\,\theta + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \text{tg}\,\theta|\right]_{x=0}^{8}$$

$$= 18\cdot\frac{\sqrt{x^2+36}}{6}\cdot\frac{x}{6} + 18\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+36}}{6} + \frac{x}{6}\right|\Big]_0^8 = 40 + 18\ln 3$$

$$\bar{x} = M_y\cdot\frac{1}{M} = \frac{784}{3}\cdot\frac{1}{40+18\ln 3} = \frac{392}{60+27\ln 3}.$$

Portanto, o centro de massa está a $\frac{392}{60+27\ln 3}$ cm do extremo esquerdo.

41. A região é limitada por $y = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}$, pelo eixo x e $x = 5$. $A = \int_3^5 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}\,dx$.

Seja $x = 3\sec\theta$ e $a = \sec^{-1}\frac{5}{3}$, onde $\theta \in [0, a]$ pois $x \in [3, 5]$. Então, $dx = 3\sec\theta\ \text{tg}\,\theta\,d\theta$

e $\sqrt{x^2-9} = \sqrt{9\sec^2\theta - 9} = 3\sqrt{\text{tg}^2\theta} = 3\ \text{tg}\,\theta$. Portanto,

$$A = \int_0^a \frac{3\ \text{tg}\,\theta}{9\sec^2\theta}\cdot 3\sec\theta\ \text{tg}\,\theta\,d\theta = \int_0^a \frac{\text{tg}^2\theta}{\sec\theta}\,d\theta = \int_0^a \frac{\sec^2\theta - 1}{\sec\theta}\,d\theta = \int_0^a(\sec\theta - \cos\theta)\,d\theta$$

$$= \Big[\ln|\sec\theta + \text{tg}\,\theta| - \text{sen}\,\theta\Big]_0^a = \left(\ln\left|\frac{5}{3}+\frac{4}{3}\right| - \frac{4}{5}\right) - 0 = \ln 3 - \frac{4}{5} = \frac{5\ln 3 - 4}{5}$$

Usando a mesma substituição,

$$M_y = \int_3^5 x\cdot\frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}\,dx = \int_3^5 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx = \int_0^a \frac{3\ \text{tg}\,\theta}{3\sec\theta}\cdot 3\sec\theta\ \text{tg}\,\theta\,d\theta = 3\int_0^a \text{tg}^2\theta\,d\theta = 3\int_0^a(\sec^2\theta - 1)\,d\theta$$

$$= 3\ \text{tg}\,\theta - 3\theta\Big]_0^a = 3\cdot\frac{4}{3} - 3\sec^{-1}\frac{5}{3} = 4 - \cos^{-1}\frac{3}{5}$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_3^5\left(\frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_3^5 \frac{x^2-9}{x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int_3^5\left(\frac{1}{x^2} - \frac{9}{x^4}\right)dx = \frac{1}{2}\left[-1/x + \frac{3}{x^3}\right]_3^5 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{125} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9}\right) = \frac{26}{1125}$$

O centróide da região dada está no ponto $(\bar{x}, \bar{y})$, onde

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\cdot M_y = \frac{5}{5\ln 3 - 4}\cdot\left(4 - 3\cos^{-1}\frac{3}{5}\right) = \frac{20 - 15\cos^{-1}\frac{3}{5}}{5\ln 3 - 4},\quad \bar{y} = \frac{1}{A}\cdot M_x = \frac{5}{5\ln 3 - 4}\cdot\frac{26}{1125} = \frac{26}{225(5\ln 3 - 4)}$$

43. Escolha o eixo x para baixo e tome o eixo y ao nível da água. A face do registro é a região limitada pela circunferência $(x-1)^2+y^2=4$. Um elemento de área é uma tubulação horizontal de $2\sqrt{4-(\xi_i-1)^2}$ de diâmetro e uma profundidade média de ξ_i. Se F N for a força no registro, devido à pressão da água, então

$$F=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}2\rho g\xi_i\sqrt{4-(\xi_i-1)^2}\,\Delta_i x=2\rho g\int_0^3 x\sqrt{4-(x-1)^2}\,dx$$

Seja $x-1=2\,\text{sen}\,\theta$ onde $\theta\in[-\frac{1}{6}\pi,\frac{1}{2}\pi]$ pois $x\in[0,3]$. Então, $dx=2\cos\theta\,d\theta$ e

$\sqrt{4-(x-1)^2}=\sqrt{4-4\,\text{sen}^2\theta}=2\sqrt{\cos^2\theta}=2\cos\theta$. Portanto,

$$F=2\rho g\int_{-\pi/6}^{\pi/2}(1+2\,\text{sen}\,\theta)(2\cos\theta)(2\cos\theta\,d\theta)=8\rho g\int_{-\pi/6}^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta+16\rho g\int_{-\pi/6}^{\pi/2}\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta\,d\theta$$

$$=4\rho g\int_{-\pi/6}^{\pi/2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta-\frac{16}{3}\rho g\cos^3\theta\Big]_{-\pi/6}^{\pi/2}=4\rho g\Big[\theta+\frac{1}{2}\,\text{sen}\,2\theta\Big]_{-\pi/6}^{\pi/2}+\frac{16}{3}\rho g\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^3$$

$$=4\rho g\left(\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{6}\pi+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)+2\sqrt{3}\rho g=\left(\frac{8}{3}\pi+3\sqrt{3}\right)\rho g$$

45. Escolha o eixo x para baixo e tome o eixo y ao nível do líquido. O limite do tanque é a região limitada pela circunferência $(x-4)^2+y^2=64$. Um elemento de área é uma faixa horizontal com $2\sqrt{64-(\xi_i-4)^2}$ cm de largura e uma profundidade média de ξ_i. Se F dinas for a força no extremo, devido à pressão liquida, então

$$F=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}2\rho\xi_i\sqrt{64-(\xi_i-4)^2}\,\Delta_i x=2\rho\int_0^{12}x\sqrt{64-(x-4)^2}\,dx$$

Seja $x-4=8\,\text{sen}\,\theta$ onde $\theta\in[-\frac{1}{6}\pi,\frac{1}{2}\pi]$ pois $x\in[0,12]$. Então, $dx=8\cos\theta\,d\theta$ e

$\sqrt{64-(x-4)^2}=\sqrt{64-64\,\text{sen}^2\theta}=8\sqrt{\cos^2\theta}=8\cos\theta$. Portanto,

$$F=2\rho\int_{-\pi/6}^{\pi/2}(4+8\,\text{sen}\,\theta)(8\cos\theta)(8\cos\theta\,d\theta)=512\rho\int_{-\pi/6}^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta+1024\rho\int_{-\pi/6}^{\pi/2}\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta\,d\theta$$

$$=256\rho\int_{-\pi/6}^{\pi/2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta-\frac{1024}{3}\rho\cos^3\theta\Big]_{-\pi/6}^{\pi/2}=256\rho\Big[\theta+\frac{1}{2}\,\text{sen}\,2\theta\Big]_{-\pi/6}^{\pi/2}+\frac{1024}{3}\rho\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^3$$

$$=256\rho\left(\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{6}\pi+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)+128\sqrt{3}\rho=\left(\frac{512}{3}\pi+192\sqrt{3}\right)\rho$$

EXERCÍCIOS 9.5 Frações Parciais Qdo o Denominador tem Somente Fatores Lineares

1. Do Exemplo 2 no texto, $\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C.$

3. $\frac{5x-2}{x^2-4} = \frac{5x-2}{(x-2)(x+2)} \equiv \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2};\quad 5x-2 \equiv A(x+2) + B(x-2)$

Seja $x = 2$: $8 = 4A \iff A = 2$. Seja $x = -2$: $-12 = -4B \iff B = 3$.

$$\int \frac{5x-2}{x^2-4}\,dx = 2\int\frac{dx}{x-2} + 3\int\frac{dx}{x+2} = 2\ln|x-2| + 3\ln|x+2| + \ln|C| = \ln|C(x-2)^2(x+2)^3|$$

5. $\frac{4w-11}{2w^2+7w-4} = \frac{4w-11}{(2w-1)(w+4)} \equiv \frac{A}{2w-1} + \frac{B}{w+4};\quad 4w-11 \equiv A(w+4) + B(2w-1)$

Seja $w = -4$: $-27 = -9B \iff B = 3$. Seja $w = \frac{1}{2}$: $-9 = \frac{9}{2}A \iff A = -2.$

$$\int \frac{4w-11}{(2w-1)(w+4)}\,dw = -\int\frac{2\,dw}{2w-1} + 3\int\frac{dw}{w+4} = -\ln|2w-1| + 3\ln|w+4| + \ln|C| = \ln\left|\frac{C(w+4)^3}{2w-1}\right|$$

7. $\frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x} = \frac{6x^2-2x-1}{x(2x-1)(2x+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{2x+1}$

$$6x^2-2x-1 \equiv A(2x-1)(2x+1) + Bx(2x+1) + Cx(2x-1)$$

Seja $x = \frac{1}{2}$: $-\frac{1}{2} = B$. Seja $x = -\frac{1}{2}$: $\frac{3}{2} = C$. Seja $x = 0$: $-1 = -A \iff A = 1$.

$$\int \frac{6x^2-2x-1}{x(2x-1)(2x+1)}\,dx = \int\frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{2x-1} + \frac{3}{4}\int\frac{dx}{2x+1} = \ln|x| - \frac{1}{4}\ln|2x-1| + \frac{1}{4}\ln|C| = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{Cx^4(2x+1)^3}{2x-1}\right|$$

9. $\frac{1}{x^3+3x^2} = \frac{1}{x^2(x+3)} \equiv \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+3};\quad 1 \equiv A(x+3) + Bx(x+3) + Cx^2$

Seja $x = -3$: $1 = 9C \iff C = \frac{1}{9}$. Seja $x = 0$: $1 = 3A \iff A = \frac{1}{3}$.

Seja $x = 1$: $1 = 4A + 4B + C = \frac{4}{3} + 4B - \frac{1}{9} \iff B = -\frac{1}{9}$.

De outro modo, $\frac{1}{x^2(x+3)} = \frac{x^{-2}}{3+x} = \frac{1}{3}x^{-2} - \frac{1}{9}x^{-1} - \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3+x}$ pela divisão longa.

$$\int\frac{dx}{x^2(x+3)} = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2} - \frac{1}{9}\int\frac{dx}{x} + \frac{1}{9}\int\frac{dx}{x+3} = -\frac{1}{3x} - \frac{1}{9}\ln|x| + \frac{1}{9}\ln|x+3| + C = \frac{1}{9}\ln\left|\frac{x+3}{x}\right| - \frac{1}{3x} + C$$

11. $\frac{1}{x^2(x+1)^2} \equiv \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{x+1}$

$1 \equiv A(x+1)^2 + Bx(x+1)^2 + Cx^2 + Dx^2(x+1) = A(x^2+2x+1) + B(x^3+2x^2+x) + Cx^2 + D(x^3+x^2)$

$1 \equiv (B+D)x^3 + (A+2B+C+D)x^2 + (2A+B) + A$

$B + D = 0$ (1); $A + 2B + C + D = 0$ (2); $2A + B = 0$ (3); $A = 1$ (4)

Resolva essas equações na ordem (4), (3), (1), (2) para obter $A = 1$, $B = -2$, $D = 2$, $C = 1$.

De outro modo, por divisões longas sucessivas,

$$\frac{1}{x^2(x+1)^2} = \frac{\frac{1}{x^2}}{(1+x)^2} = \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{1+x}}{1+x} = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{2}{1+x} + \frac{1}{(1+x^2)}$$

$$\int\frac{dx}{x^2(x+1)^2} = \int\frac{dx}{x^2} - 2\int\frac{dx}{x} + \int\frac{dx}{(x+1)^2} + 2\int\frac{dx}{x+1} = -\frac{1}{x} - 2\ln|x| - \frac{1}{x+1} + 2\ln|x+1| + C$$

$$= 2\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + C$$

13. $\frac{x^2-3x-7}{(2x+3)(x+1)^2} \equiv \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1}$; $x^2-3x-7 \equiv A(x+1)^2 + B(2x+3) + C(2x+3)(x+1)$

Seja $x=-1$: $-3 = B$. Seja $x = -\frac{3}{2}$: $-\frac{1}{4} = \frac{1}{4}A \iff A = -1$.

Seja $x = 0$: $-7 = A + 3B + 3C = -1 - 9 + 3C \iff C = 1$.

$$\int \frac{x^2-3x-7}{(2x+3)(x+1)^2}\,dx = -\int\frac{dx}{2x+3} - 3\int\frac{dx}{(x+1)^2} + \int\frac{dx}{x+1} = -\frac{1}{2}\ln|2x+3| + \frac{3}{x+1} + \ln|x+1| + C$$

15. $\frac{3z+1}{(z^2-4)^2} = \frac{3z+1}{(z-2)^2(z+2)^2} \equiv \frac{A}{(z-2)^2} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{(z+2)^2} + \frac{D}{z+2}$

$3z+1 \equiv A(z+2)^2 + B(z-2)(z+2)^2 + C(z-2)^2 + D(z+2)(z-2)^2$

Seja $z=2$: $7 = 16A \iff A = \frac{7}{16}$. Seja $z=-2$: $-5 = 16C \iff C = -\frac{5}{16}$

Seja $z=0$: $1 = 4A - 8B + 4C + 8D = \frac{7}{4} - 8B - \frac{5}{4} + 8D \iff \frac{1}{2} = -8B + 8D \iff \frac{1}{16} = -B + D$

Coeficiente de z^3: $0 = B + D$. Logo, $B = -\frac{1}{32}$, $D = \frac{1}{32}$.

$$\int\frac{3z+1}{(z-2)^2(z+2)^2}\,dz = \frac{7}{16}\int\frac{dz}{(z-2)^2} - \frac{1}{32}\int\frac{dz}{z-2} - \frac{5}{16}\int\frac{dz}{(z+2)^2} + \frac{1}{32}\int\frac{dz}{z+2}$$

$$= \frac{7}{16}\cdot\frac{-1}{z-2} - \frac{1}{32}\ln|z-2| - \frac{5}{16}\cdot\frac{-1}{z+2} + \frac{1}{32}\ln|z+2| + C = \frac{5}{16(z+2)} - \frac{7}{16(z-2)} + \frac{1}{32}\ln\left|\frac{z+2}{z-2}\right| + C$$

17. $I = \int\frac{x^4+3x^3-5x^2-4x+17}{x^3+x^2-5x+3}\,dx = \int(x+2)\,dx + \int\frac{-2x^2+3x+11}{x^3+x^2-5x+3}\,dx$

$\frac{-2x^2+3x+11}{x^3+x^2-5x+3} \equiv \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+3}$; $-2x^2+3x+11 \equiv A(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)^2$

Seja $x=-3$: $-16 = 16C \iff C = -1$. Seja $x = 1$: $12 = 4A \iff A = 3$.

Seja $x=0$: $11 = 3A - 3B + C = 9 - 3B - 1 \iff B = 1$.

$$I = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3\int\frac{dx}{(x-1)^2} - \int\frac{dx}{x-1} - \int\frac{dx}{x+3} = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{x-1} - \ln|x-1| - \ln|x+3| + C =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{x-1} - \ln|x^2+2x-3| + C$$

19. $\frac{-24x^3+30x^2+52x+17}{9x^4-6x^3-11x^2+4x+4} = \frac{-24x^3+30x^2+52x+17}{(3x+2)^2(x-1)^2} \equiv \frac{A}{(3x+2)^2} + \frac{B}{3x+2} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1}$

$-24x^3+30x^2+52x+17 \equiv A(x-1)^2 + B(3x+2)(x-1)^2 + C(3x+2)^2 + D(x-1)(3x+2)^2$

Seja $x=1$: $75 = 25C \iff C = 3$. Seja $x = -\frac{2}{3}$: $\frac{25}{9} = \frac{25}{9}A \iff A = 1$.

Seja $x=0$: $17 = A + 2B + 4C - 4D = 1 + 2B + 12 - 4D \iff 4 = 2B - 4D$

Coeficiente de x^3: $-24 = 3B + 9D \iff -8 = B + 3D$. Logo $B = -2$, $D = -2$.

$$\int\frac{-24x^3+30x^2+52x+17}{9x^4-6x^3-11x^2+4x+4}\,dx = \int\frac{dx}{(3x+2)^2} - 2\int\frac{dx}{3x+2} + 3\int\frac{dx}{(x-1)^2} - 2\int\frac{dx}{x-1}$$

$$= -\frac{1}{3(3x+2)} - \frac{2}{3}\ln|3x+2| - \frac{3}{x-1} - 2\ln|x-1| + C = -\ln[(3x+2)^{2/3}(x-1)^2] - \frac{1}{3(3x+2)} - \frac{3}{x-1} + C$$

21. $\dfrac{x-3}{x^3+x^2} = \dfrac{x-3}{x^2(x^2+1)} \equiv \dfrac{A}{x^2} + \dfrac{B}{x} + \dfrac{C}{x+1}$; $x - 3 \equiv A(x+1) + Bx(x+1) + Cx^2$; $x - 3 \equiv (B+C)x^2 + (A+B)x + A$

$B + C = 0 \ (1) \qquad A + B = 1 \ (2) \qquad A = -3 \ (3)$

Resolvendo na ordem (3), (2), (1) achamos $A = -3$, $B = 4$, $C = -4$.

Ou então, pela divisão longa, $\dfrac{x-3}{x^2(x+1)} = \dfrac{-\frac{3}{x^2} + \frac{1}{x}}{1+x} = -\dfrac{3}{x^2} + \dfrac{4}{x} - \dfrac{4}{1+x}$

$$\int_1^2 \frac{x-3}{x^3+x^2}\,dx = \int_1^2 \left(-\frac{3}{x^2} + \frac{4}{x} - \frac{4}{1+x}\right)dx = \frac{3}{x} + 4\ln|x| - 4\ln|x+1|\Big]_1^2$$

$$= \left(\frac{3}{2} + 4\ln 2 - 4\ln 3\right) - (3 - 4\ln 2) = 4\ln\frac{4}{3} - \frac{3}{2}$$

23. $\dfrac{x^2-4x+3}{x(x+1)^2} \equiv \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{(x+1)^2} + \dfrac{C}{x+1}$

$x^2 - 4x + 3 \equiv A(x+1)^2 + Bx + Cx(x+1) \equiv A(x^2+2x+1) + Bx + C(x^2+x)$

$x^2 - 4x + 3 \equiv (A+C)x^2 + (2A+B+C)x + A$. Assim, $A + C = 1$ (1) $\quad 2A + B + C = -4$ (2) $\quad A = 3$ (3).

Resolvendo na ordem (3), (1), (2) achamos $A = 3$, $C = -2$, $B = -8$.

pela divisão, $\dfrac{x^2-4x+3}{x(x+1)^2} = \dfrac{\frac{3}{x} - 4 + x}{(1+x)^2} = \dfrac{\frac{3}{x} + 1 - \frac{8}{1+x}}{1+x} = \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{1+x} - \dfrac{8}{(1+x)^2}$.

$$\int_1^3 \frac{x^2-4x+3}{x(x+1)^2}\,dx = \int_1^3 \left[\frac{3}{x} - \frac{8}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+1}\right]dx = 3\ln|x| + \frac{8}{x+1} - 2\ln|x+1|\Big]_1^3$$

$$= (3\ln 3 + 2 - 2\ln 4) - (4 - 2\ln 2) = \ln 27 - \ln 4 - 2 = \ln\frac{27}{4} - 2$$

25. $\dfrac{5x^2-3x+18}{9x-x^3} = \dfrac{5x^2-3x+18}{x(3-x)(3+x)} \equiv \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{3-x} + \dfrac{C}{3+x}$; $5x^2 - 3x + 18 \equiv A(3-x)(3+x) + Bx(3+x) + Cx(3-x)$

Seja $x = 0$: $18 = 9A \iff A = 2$. Seja $x = 3$: $54 = 18B \iff B = 3$. Seja $x = -3$: $72 = -18C \iff C = -4$.

$$\int_1^2 \frac{5x^2-3x+18}{9x-x^3}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{3-x} - \frac{4}{3+x}\right)dx = 2\ln|x| - 3\ln|3-x| - 4\ln|3+x|\Big]_1^2$$

$$= (2\ln 2 - 4\ln 5) - (-3\ln 2 - 4\ln 4) = 13\ln 2 - 4\ln 5$$

27. $\dfrac{x^2-3}{x^3+4x^2+5x+2} = \dfrac{x^2-3}{(x+1)^2(x+2)} \equiv \dfrac{A}{(x+1)^2} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{x+2}$

$$x^2 - 3 \equiv A(x+2) + B(x+1)(x+2) + C(x+1)^2$$

Seja $x = -1$: $-2 = A$. Seja $x = -2$: $1 = C$. Seja $x = 0$: $-3 = 2A + 2B + C = -4 + 2B + 1 \iff B = 0$.

$$\int_0^5 \frac{(x^2-3)\,dx}{x^3+4x^2+5x+2} = \int_0^5 \left(\frac{-2}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{2}{x+1} + \ln|x+2|\Big]_0^5 = \left(\frac{1}{3} + \ln 7\right) - (2 + \ln 2) = \ln\frac{7}{2} - \frac{5}{3}$$

29. Seja R unidades de área a área da região limitada por $y = \dfrac{x-1}{x^2-5x+6}$, $x = 4$ e $x = 6$.

$\dfrac{x-1}{x^2-5x+6} = \dfrac{x-1}{(x-3)(x-2)} \equiv \dfrac{B}{x-3} + \dfrac{C}{x-2}$; $x - 1 \equiv B(x-2) + C(x-3)$

Seja $x = 2$: $1 = -C \iff C = -1$. Seja $x = 3$: $2 = B$.

$$R = \int_4^6 \frac{x-1}{(x-3)(x-2)}\,dx = \int_4^6 \left(\frac{2}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right)dx = 2\ln|x-3| - \ln|x-2|\Big]_4^6 = (2\ln 3 - \ln 4) - (-\ln 2) = \ln\frac{9}{2}$$

31. Um elemento do volume é um invólucro cilíndrico centrado no eixo y, de raio médio γ_i e altura $\frac{\gamma_i - 1}{\gamma_i^2 - 5\gamma_i + 6}$, $\gamma_i \in [4, 6]$. Se V unidades cúbicas for o volume do sólido,

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi\gamma_i \frac{\gamma_i - 1}{\gamma_i^2 - 5\gamma_i + 6} \Delta_i x = 2\pi\int_4^6 \frac{x^2 - x}{x^2 - 5x + 6}\,dx = 2\pi\int_4^6 \left[1 + \frac{4x - 6}{(x-3)(x-2)}\right]dx$$

$$\frac{4x - 6}{(x-3)(x-2)} \equiv \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2};\quad 4x - 6 \equiv A(x-2) + B(x-3)$$

Seja $x = 2$: $2 = -B \iff B = -2$. Seja $x = 3$: $6 = A$.

$$V = 2\pi\int_4^6 \left(1 + \frac{6}{x-3} - \frac{2}{x-2}\right)dx = 2\pi\Big[x + 6\ln|x-3| - 2\ln|x-2|\Big]_4^6$$

$$= 2\pi[(6 + 6\ln 3 - 2\ln 4) - (4 - 2\ln 2) = 2\pi(2 + 6\ln 3 - 2\ln 2)$$

33. A região é limitada por $y = \frac{x-1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x-1}{(x-3)(x-2)}$, pelo eixo x, $x = 4$, e $x = 6$.

Usaremos as identidades $\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} \equiv \frac{1}{(x-3)(x-2)}$ e $\frac{3}{x-3} - \frac{2}{x-2} \equiv \frac{x}{(x-3)(x-2)}$.

$$A = \int_4^6 \frac{x-1}{x^2 - 5x + 6}\,dx = \int_4^6 \left[\frac{x}{(x-3)(x-2)} - \frac{1}{(x-3)(x-2)}\right]dx = \int_4^6 \left[\left(\frac{3}{x-3} - \frac{2}{x-2}\right) - \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right)\right]dx$$

$$= \int_4^6 \left(\frac{2}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right)dx = 2\ln|x-3| - \ln|x-2|\Big]_4^6 = (2\ln 3 - \ln 4) - (-\ln 2) = 2\ln 3 - \ln 2$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_4^6 \left(\frac{x-1}{x^2 - 5x + 6}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_4^6 \left(\frac{2}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right)^2 = \frac{1}{2}\int_4^6 \left[\frac{4}{(x-3)^2} - \frac{4}{(x-3)(x-2)} + \frac{1}{(x-2)^2}\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_4^6 \left[\frac{4}{(x-3)^2} - \frac{4}{x-3} + \frac{4}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}\right]dx = \left[\frac{-2}{x-3} - 2\ln|x-3| + 2\ln|x-2| - \frac{\frac{1}{2}}{x-2}\right]_4^6$$

$$= \left(-\frac{2}{3} - 2\ln 3 + 2\ln 4 - \frac{1}{8}\right) - \left(-2 + 2\ln 2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{35}{24} + 2\ln 2 - 2\ln 3$$

$$M_y = \int_4^6 \frac{x(x-1)}{x^2 - 5x + 6}\,dx = \int_4^6 \left[1 + \frac{4x - 6}{(x-3)(x-2)}\right]dx = \int_4^6 \left[1 + 4\left(\frac{3}{x-3} - \frac{2}{x-2}\right) - 6\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right)\right]dx$$

$$= \int_4^6 \left(1 + \frac{6}{x-3} - \frac{2}{x-2}\right)dx = x + 6\ln|x-3| - 2\ln|x-2|\Big]_4^6 = (6 + 6\ln 3 - 2\ln 4) - (4 - 2\ln 2)$$

$$= 2 - 2\ln 2 + 6\ln 3$$

O centróide está no ponto $(\bar{x}, \bar{y})$ onde

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{2 - 2\ln 2 + 6\ln 3}{2\ln 3 - \ln 2} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{\frac{35}{24} + 2\ln 2 - 2\ln 3}{2\ln 3 - \ln 2}$$

35. Após t min, y pessoas ouviram o rumor onde $y < 5.000$. Temos uma tabela de condições laterais.

t	0	10	15	20
y	1	144	y_{15}	y_{20}

$\frac{dy}{dt} = ky(5.000 - y)$; $\int k\,dt = \int \frac{dy}{y(5.000 - y)} = \frac{1}{5.000}\int\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{5.000 - y}\right)dy$; $kt = \frac{1}{5.000}\ln\frac{Cy}{5.000 - y}$

Com $t = 0$ e $y = 1$, obtemos $0 = \frac{1}{5.000}\ln\frac{C}{4.999}$; $C = 4.999$. Assim, $5.000kt = \ln\frac{4.999y}{5.000 - y}$.

Com $t = 10$ e $y = 144$, obtemos $(5.000k)10 = \ln\frac{4.999 \cdot 144}{5.000 - 144} = 5$; $5.000k = 0,5$.

(a) $0,5t = \ln\frac{4.999y}{5.000 - y}$; $e^{-0,5t} = \frac{5.000 - y}{4.999y}$; $4.999e^{-0,5t}y = 5.000 - y$. $y = \frac{5.000}{1 + 4.999e^{-0,5t}}$

(b) Qdo. $t = 15$, $y_{15} = \frac{5.000}{1 + 4.999e^{-7,5}} = 1.328$. (c) Qdo. $t = 20$, $y_{20} = \frac{5.000}{1 + 4.999e^{-10}} = 4.075$.

(d) Como $\lim_{t\to+\infty}\frac{5.000}{1 + 4.999e^{-0,5t}} = 5.000$, eventualmente todos terão ouvido o boato.

37. Após t semanas, y% dos suscetíveis foram infectados. Temos uma tabela de condições laterais.

t	0	3	6
y	10	25	y_6

$\frac{dy}{dt} = ky(100 - y)$; $\int k\,dt = \int\frac{dy}{y(100 - y)} = \frac{1}{100}\int\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{100 - y}\right)dy$; $100kt = \ln\frac{Cy}{100 - y}$

Com $t = 0$ e $y = 10$, obtemos $0 = \ln\frac{10C}{90}$; $C = 9$. Assim, $100kt = \ln\frac{9y}{100 - y}$.

Com $t = 3$ e $y = 25$, obtemos $(100k)3 = \ln\frac{225}{75} = \ln 3$; $100k = \frac{1}{3}\ln 3$.

Assim, $\frac{t}{3}\ln 3 = \ln\frac{9y}{100 - y}$; $3^{-t/3} = \frac{100 - y}{9y}$; $9y \cdot 3^{-t/3} = 100 - y$; $y = \frac{100}{1 + 9\cdot 3^{-t/3}} = \frac{100}{1 + 3^{2 - t/3}}$.

Qdo. $t = 6$, $y_6 = \frac{100}{1 + 1} = 50$. Após 6 semanas, 50 dos suscetíveis foram infectados.

39. Se y milhões for o rendimento anual da fábrica depois de t anos que ela começou a funcionar, então $\frac{dy}{dt} = \frac{t^3 + 3t^2 + 6t + 7}{t^2 + 3t + 2} = t + \frac{4t + 7}{(t + 2)(t + 1)}$.

$$\frac{4t + 7}{(t + 2)(t + 1)} \equiv \frac{A}{t + 2} + \frac{B}{t + 1};\quad 4t + 7 = A(t + 1) + B(t + 2)$$

Seja $t = -2$: $-1 = -A \iff A = 1$. Seja $t = -1$: $3 = B$. Portanto,

$$y = \int\left(t + \frac{1}{t + 2} + \frac{3}{t + 1}\right)dt = \frac{1}{2}t^2 + \ln(t + 2) + 3\ln(t + 1) + C$$

Como $y = 6$ qdo. $t = 4$, obtemos $6 = 8 + \ln 6 + 3\ln 5 + C$; $C = -2 - \ln 6 - 3\ln 5$.

Qdo $t = 5$, $y_5 = \frac{1}{2}\cdot 25 + \ln 7 + 3\ln 6 - 2 - \ln 6 - 3\ln 5 = 11,2011$.

O rendimento total esperado é \$11.201.100, com precisão de \$100.

41. Se x g da substância C estão presentes em t min, então,

$\frac{dx}{dt} = k(5 - x)(4 - x)$. Temos uma tabela de condições laterais.

t	0	5	10
x	0	1	x_{10}

$$\int \frac{dx}{(5 - x)(4 - x)} = k\int dt. \quad \frac{1}{(5 - x)(4 - x)} \equiv \frac{D}{5 - x} + \frac{E}{4 - x}; \quad 1 \equiv D(4 - x) + E(5 - x)$$

Seja $x = 5$: $1 = -D \iff D = -1$. Seja $x = 4$: $1 = E$. Portanto,

$$-\int \frac{dx}{5 - x} + \int \frac{dx}{4 - x} = kt; \quad \ln|5 - x| - \ln|4 - x| + \ln|F| = kt; \quad \ln\left|\frac{4 - x}{F(5 - x)}\right| = -kt; \quad \frac{4 - x}{5 - x} = Fe^{-kt}$$

Como $x = 0$ qdo $t = 0$, $\frac{4}{5} = F$. Assim, $\frac{4 - x}{5 - x} = \frac{4}{5}e^{-kt}$.

Como $x = 1$ qdo $t = 5$, $\frac{3}{4} = \frac{4}{5}e^{-5k}$; $\frac{15}{16} = e^{-5k}$. Logo, $\frac{4 - x}{5 - x} = \left(\frac{15}{16}\right)^{t/5}$. Qdo $t = 10$ temos

$$\frac{4 - x_{10}}{5 - x_{10}} = \frac{4}{5}\left(\frac{15}{16}\right)^2 = \frac{45}{64}; \quad 256 - 64x_{10} = 225 - 45x_{10}; \quad 31 = 19x_{10}; \quad x_{10} = \frac{31}{19}$$

Portanto, $\frac{31}{19}$ g da substância C serão formados em 10 min.

43. t min depois que o sal começa a dissolver x g é a quantidade de sal presente, $(10 - x)$ g dele estão dissolvidos e $(10 - x)/20$ é sua concentração. Temos uma tabela de condições laterais

t	0	10	20
x	10	5	x_{20}

$$\frac{dx}{dt} = kx\left(\frac{10 - x}{20} - 3\right); \quad 20dx = kx(-x - 50)dt; \quad \int \frac{20\,dx}{x(x + 50)} = -k\int dt$$

$$\frac{20}{x(x + 50)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 50}; \quad 20 \equiv A(x + 50) + Bx$$

Seja $x = -50$: $20 = -50B \iff B = -\frac{2}{5}$. Seja $x = 0$: $20 = 50A \iff A = \frac{2}{5}$. Portanto,

$$\frac{2}{5}\int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x + 50}\right)dx = -k\int dt; \quad \frac{2}{5}(\ln|x| - \ln|x + 50| + C) = -kt; \quad \ln\left|\frac{Cx}{x + 50}\right| = -2{,}5kt; \quad \frac{Cx}{x + 50} = e^{-2{,}5kt}$$

Como $x = 10$ qdo $t = 0$, $\frac{C}{6} = 1$; $C = 6$. Assim, $\frac{6x}{x + 50} = e^{-2{,}5kt}$.

Como $x = 5$ qdo $t = 10$, $\frac{30}{55} = \frac{6}{11} = e^{-25k}$. Assim, $\frac{6x}{x + 50} = (e^{-25k})^{t/10} = \left(\frac{6}{11}\right)^{t/10}$.

Qdo $t = 20$, $\frac{6x_{20}}{x_{20} + 50} = \left(\frac{6}{11}\right)^2 = \frac{36}{121}$; $121x_{20} = 6x_{20} + 300$; $115x_{20} = 300$; $x_{20} = \frac{300}{115} = \frac{60}{23}$.

Portanto, restarão $10 - \frac{60}{23} = \frac{170}{23} \approx 7{,}4$ g de sal.

EXERCÍCIOS 9.6 Frações Parciais Qdo o Denominador Contém Fatores Quadráticos

1. $\dfrac{1}{2x^3+x} = \dfrac{1}{x(2x^2+1)} \equiv \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{2x^2+1}$; $1 \equiv A(2x^2+1) + (Bx+C)$; $1 \equiv (2A+B)x^2 + Cx + A$

Portanto, $2A + B = 0$; $C = 0$; $A = 1$. Logo $B = -2$.

$$\int\frac{dx}{2x^3+x} = \int\frac{dx}{x} - 2\int\frac{x\,dx}{2x^2+1} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|2x^2+1| + \frac{1}{2}\ln|C| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{Cx^2}{2x^2+1}\right|$$

Ou então $\displaystyle\int\frac{dx}{2x^3+x} = \int\frac{x^{-3}dx}{2+x^{-2}} = -\frac{1}{2}\ln|2+x^{-2}| + \frac{1}{2}\ln|C| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{Cx^2}{2x^2+1}\right|$

3. $\dfrac{1}{16x^4-1} = \dfrac{1}{(4x^2-1)(4x^2+1)} \equiv \dfrac{A}{2x-1} + \dfrac{B}{2x+1} + \dfrac{Cx+d}{4x^2+1}$

$1 \equiv A(2x+1)(4x^2+1) + B(2x-1)(4x^2+1) + (Cx+D)(4x^2-1)$. Seja $x = \frac{1}{2}$: $1 = 4A$; $A = \frac{1}{4}$.

Seja $x = -\frac{1}{2}$: $1 = -4B$; $B = -\frac{1}{4}$. Seja $x = 0$: $1 = A - B - D = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - D$; $D = -\frac{1}{2}$.

Compare coeficientes de x^3: $0 = 8A + 8B + 4C = 2 - 2 + 4C$; $C = 0$.

$$\int\frac{dx}{16x^4-1} = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{2x-1} - \frac{1}{4}\int\frac{dx}{2x+1} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{4x^2+1} = \frac{1}{8}\ln|2x-1| - \frac{1}{8}\ln|2x+1| - \frac{1}{4}\ \mathrm{tg}^{-1}2x + C$$

$$= \frac{1}{8}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right| - \frac{1}{4}\ \mathrm{tg}^{-1}2x + C$$

5. $\dfrac{t^2+t+1}{(2t+1)(t^2+1)} \equiv \dfrac{A}{2t+1} + \dfrac{Bt+C}{t^2+1}$

$t^2+t+1 \equiv A(t^2+1) + (Bt+C)(2t+1)$. Seja $t = -\frac{1}{2}$: $\frac{3}{4} = \frac{5}{4}A \iff A = \frac{3}{5}$.

$t^2+t+1 \equiv (A+2B)t^2 + (B+2C)t + (A+C)$. Assim, $A + 2B = 1$ (1); $B + 2C = 1$ (2); $A + C = 1$ (3).

De (1) obtemos $B = \frac{1}{2}(1 - A) = \frac{1}{5}$. De (3) obtemos $C = 1 - A = \frac{2}{5}$. Portanto,

$$\int\frac{t^2+t+1}{(2t+1)(t^2+1)}\,dt = \frac{3}{5}\int\frac{dt}{2t+1} + \frac{1}{5}\int\frac{t\,dt}{t^2+1} + \frac{2}{5}\int\frac{dt}{t^2+1} = \frac{3}{10}\ln|2t+1| + \frac{1}{10}\ln|t^2+1| + 125\ \mathrm{tg}^{-1}t + C$$

$$= \frac{1}{10}\ln|(2t+1)^3(t^2+1)| + \frac{2}{5}\ \mathrm{tg}^{-1} + C$$

7. $\dfrac{x^2+x}{x^3-x^2+x-1} = \dfrac{x^2+x}{(x-1)(x^2+1)} \equiv \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$

$x^2 + x \equiv A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$. Seja $x = 1$: $2 = 2A \iff A = 1$.

$x^2 + x \equiv (A+B)x^2 + (C-B)x + (A-C)$. $A + B = 1$ (1); $C - B = 1$ (2); $A - C = 0$ (3)

De (1) obtemos $B = 1 - A = 0$. De (3) obtemos $C = A = 1$. Portanto,

$$\int\frac{(x^2+x)\,dx}{x^3-x^2+x-1} = \int\frac{dx}{x-1} + \int\frac{dx}{x^2+1} = \ln|x-1| + \mathrm{tg}^{-1}x + C$$

9. $\dfrac{1}{x^3+x^2+x} = \dfrac{1}{x(x^2+x+1)} \equiv \dfrac{A}{x} + \dfrac{B(2x+1)+C}{x^2+x+1}$

$1 \equiv A(x^2+\ \ +1) + Bx(2x+1) + Cx$; $1 \equiv (A+2B)x^2 + (A+B+C)x + A$

$A + 2B = 0$ (1); $A + B + C = 0$ (2); $A = 1$ (3)

Resolvendo (3), (1) e (2) obtemos $A = 1$, $B = -\frac{1}{2}$, e $C = -\frac{1}{2}$. Portanto,

$$\int\frac{dx}{x^3+x^2+x} = \int\frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int\frac{(2x+1)\,dx}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x^2+x+\frac{1}{4})+\frac{3}{4}} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2}\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2| - \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\ \mathrm{tg}^{-1}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\ln C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{Cx^2}{x^2+x+1}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\ \mathrm{tg}^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

11. $\dfrac{2x^2 - x + 2}{x^5 + 2x^3 + x} = \dfrac{2x^2 - x + 2}{x(x^2+1)^2} \equiv \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx + C}{(x^2+1)^2} + \dfrac{Dx + E}{x^2+1}$

$2x^2 - x + 2 \equiv A(x^2+1)^2 + Bx^2 + Cx + (Dx^2 + Ex)(x^2+1) \equiv A(x^4 + 2x^2 + 1) + Bx^2 + Cx + Dx^4 + Ex^3 + Dx^2 + Ex$

$2x^2 - x + 2 \equiv (A + D)x^4 + Ex^3 + (2A + B + D)x^2 + (C + E)x + A$

$$A + D = 0; \quad E = 0; \quad 2A + B + D = 2; \quad C + E = -1; \quad A = 2$$

Portanto, $A = 2$, $B = 0$, $C = -1$, $D = -2$, e $E = 0$. Assim,

$$\int \frac{(2x^2 - x + 2)\,dx}{x^5 + 2x^3 + x} = 2\int\frac{dx}{x} - \int\frac{dx}{(x^2+1)^2} - \int\frac{2x\,dx}{x^2+1} = 2\ln|x| - \ln|x^2+1| - \int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

Para calcular $\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$, seja $x = \operatorname{tg}\theta$ onde $0 \le \theta < \frac{1}{2}\pi$ se $x \ge 0$ e $-\frac{1}{2}\pi < \theta < 0$ se $x < 0$.

Então, $dx = \sec^2\theta\, d\theta$ e $x^2 + 1 = \operatorname{tg}^2\theta + 1 = \sec^2\theta$. Portanto,

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int\frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^4\theta} = \int\cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int(1 + \cos 2\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta + C_1 = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C_1$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + C_1. \quad \text{Ou então,}$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int\left[\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2} - \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}\right]dx = \frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{x^2+1} - \frac{1 - x^{-2}}{(x + x^{-1})^2}\right]dx = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}^{-1}x + \frac{1}{x + x^{-1}}\right) + C_1$$

Assim, $\displaystyle\int\frac{(2x^2 - x + 2)\,dx}{x^5 + 2x^3 + x} = \ln\left|\frac{x^2}{x^2+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}x - \frac{x}{2(x^2+1)} + \ln C = \ln\left(\frac{Cx^2}{x^2+1}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}x - \frac{x}{2(x^2+1)}$

13. $\dfrac{5z^3 - z^2 + 15z - 10}{(z^2 - 2z + 5)^2} \equiv \dfrac{A(2z-2) + B}{z^2 - 2z + 5} + \dfrac{C(2z-2) + D}{(z^2 - 2z + 5)^2}$

$5z^3 - z^2 + 15z - 10 \equiv (2Az - 2A + B)(z^2 - 2z + 5) + 2Cz - 2C + D$

$5z^3 - z^2 + 15z - 10 \equiv 2Az^3 + (-6A + B)z^2 + (14A - 2B + 2C)z + (-10A + 5B - 2C + D)$

$$2A = 5 \qquad -6A + B = 1 \qquad 14A - 2B + 2C = 15 \qquad -10A + 5B - 2C + D = -10$$

Resolvemos essas equações na ordem e obtemos $A = \frac{5}{2}$, $B = 14$, $C = 4$, e $D = -47$.

Ou então, pela divisão, $\dfrac{5z^3 - z^2 + 15z - 10}{z^2 - 2z + 5} = 5z + 9 + \dfrac{8z - 55}{z^2 - 2z + 5} = \dfrac{5}{2}(2z - 2) + \dfrac{4(2z-2) + 47}{z^2 - 2z + 5}$

Por qualquer um dos métodos,

$$\int\frac{(5z^3 - z^2 + 15z - 10)\,dz}{(z^2 - 2z + 5)^2} = \frac{5}{2}\int\frac{(2z-2)\,dz}{z^2 - 2z + 5} + 14\int\frac{dz}{(z-1)^2 + 4} + 4\int\frac{(2z-2)\,dz}{(z^2 - 2z + 5)^2} - 47\int\frac{dz}{(z^2 - 2z + 5)^2}$$

$$= \frac{5}{2}\ln|z^2 - 2z + 5| + 7\operatorname{tg}^{-1}\frac{z-1}{2} - \frac{4}{z^2 - 2z + 5} - 47I$$

Para avaliar $I = \int\frac{dz}{[(z-1)^2 + 4]^2}$, seja $z - 1 = 2\operatorname{tg}\theta$, onde $0 \le \theta < \frac{1}{2}\pi$ se $z \ge 1$ e $-\frac{1}{2}\pi < \theta < 0$ se $z < 1$. Então, $dz = 2\sec^2\theta\, d\theta$ e $(z-1)^2 + 4 = 4\operatorname{tg}^2\theta + 4 = 4\sec^2\theta$. Portanto,

$$I = \int\frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{16\sec^4\theta} = \frac{1}{8}\int\cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{16}\int(1 + \cos 2\theta)\, d\theta = \frac{1}{16}\theta + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 2\theta + C_1 = \frac{1}{16}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C_1$$

$$= \frac{1}{16}\operatorname{tg}^{-1}\frac{z-1}{2} + \frac{1}{16}\cdot\frac{z-1}{\sqrt{z^2 - 2z + 5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{z^2 - 2z + 5}} + C_1 = \frac{1}{16}\operatorname{tg}^{-1}\frac{z-1}{2} + \frac{z-1}{8(z^2 - 2z + 5)} + C_1. \text{ Logo,}$$

$$\int\frac{(5z^3 - z^2 + 15z - 10)\,dz}{(z^2 - 2z + 5)} = \frac{5}{2}\ln(z^2 - 2z + 5) + \left(7 - \frac{47}{16}\right)\operatorname{tg}^{-1}\frac{z-1}{2} - \left[4 + \frac{47}{8}(z-1)\right]\frac{1}{(z-1)^2 + 4} + C$$

$$= \frac{5}{2}\ln(z^2 - 2z + 5) + \frac{65}{16}\operatorname{tg}^{-1}\frac{z-1}{2} - \frac{47z - 15}{8(z^2 - 2z + 5)} + C$$

15. $\dfrac{x^2+2x-1}{27x^3-1} = \dfrac{x^2+2x-1}{(3x-1)(9x^2+3x+1)} \equiv \dfrac{A}{3x-1} + \dfrac{B(18x+3)+C}{9x^2+3x+1}$

$x^2+2x-1 \equiv A(9x^2+3x+1) + (18Bx+3B+C)(3x-1)$. Seja $x = \frac{1}{3}$: $-\frac{2}{9} = 3A \iff A = -\frac{2}{27}$.

$x^2+2x-1 \equiv (9A+54B)x^2 + (3A-9B+3C)x + (A-3B-C)$

$$9A+54B = 1 \qquad 3A-9B+3C = 2 \qquad A-3B-C = -1$$

Resolvendo as duas primeiras dessas equações obtemos $B = \frac{5}{162}$ e $C = \frac{5}{6}$. Completando o quadro,

$9x^2+3x+1 = 9\left(x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}\right) = 9\left(x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{36}+\frac{3}{36}\right) = 9\left[\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{3}{36}\right]$. Portanto,

$$\int\frac{(x^2+2x-1)\,dx}{27x^3-1} = -\frac{2}{27}\int\frac{dx}{3x-1} + \frac{5}{162}\int\frac{(18x+3)\,dx}{9x^2+3x+1} + \frac{5}{6}\int\frac{dx}{9x^2+3x+1}$$

$$= -\frac{2}{81}\ln|3x-1| + \frac{5}{162}\ln|9x^2+3x+1| + \frac{5}{54}\int\frac{dx}{[(x+\frac{1}{6})^2+\frac{3}{36}]}$$

$$= \frac{5}{162}\ln|9x^2+3x+1| - \frac{2}{81}\ln|3x-1| + \frac{5}{54}\cdot\frac{6}{\sqrt{3}}\ \operatorname{tg}^{-1}\frac{x+\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{5}{162}\ln|9x^2+3x+1| - \frac{2}{81}\ln|3x-1| + \frac{5}{9\sqrt{3}}\ \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{6x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

17. **Método 1.** Seja $2x = 3\ \operatorname{tg}\theta$, onde $0 \le \theta < \frac{1}{2}\pi$ se $x \ge 0$, e $-\frac{1}{2}\pi < \theta < 0$ se $x < 0$. Então,

$2\,dx = 3\sec^2\theta\,d\theta$ e $4x^2+9 = 9\ \operatorname{tg}^2\theta + 9 = 9\sec^2\theta$. Portanto,

$$\int\frac{18\,dx}{(4x^2+9)^2} = \int\frac{9(3\sec^2\theta\,d\theta)}{81\sec^4\theta} = \frac{1}{3}\int\cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{6}\int(1+\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{1}{6}\theta + \frac{1}{12}\operatorname{sen}2\theta + C$$

$$= \frac{1}{6}\theta + \frac{1}{6}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C = \frac{1}{6}\ \operatorname{tg}^{-1}\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\cdot\frac{2x}{\sqrt{4x^2+9}}\cdot\frac{3}{\sqrt{4x^2+9}} + C = \frac{1}{6}\ \operatorname{tg}^{-1}\frac{2}{3}x + \frac{x}{4x^2+9} + C$$

Método 2.

$$\int\frac{18\,dx}{(4x^2+9)^2} = \int\frac{(4x^2+9)\,dx}{(4x^2+9)^2} - \int\frac{(4x^2-9)\,dx}{(4x^2+9)^2} = \int\frac{dx}{4x^2+9} - \int\frac{(4-9x^{-2})\,dx}{(4x+9x^{-1})^2} = \frac{1}{6}\ \operatorname{tg}^{-1}\frac{2x}{3} + \frac{1}{4x+9x^{-1}} + C$$

$$= \frac{1}{6}\ \operatorname{tg}^{-1}\frac{2}{3}x + \frac{x}{4x^2+9} + C$$

19. Seja $u = \operatorname{tg}x$, $du = \sec^2x\,dx$. Então,

$$I = \int\frac{(\sec^2x+1)\sec^2x\,dx}{1+\operatorname{tg}^3x} = \int\frac{(u^2+2)\,du}{1+u^3} = \int\frac{(u^2+2)\,du}{(u+1)(u^2-u+1)}$$

$$\frac{u^2+2}{(u+1)(u^2-u+1)} \equiv \frac{A}{u+1} + \frac{Bu+C}{u^2-u+1}$$

$u^2+2 \equiv A(u^2-u+1) + (Bu+C)(u+1)$. Seja $u = -1$: $3 = 3A \iff A = 1$.

$u^2+2 \equiv (A+B)u^2 + (-A+B+C)u + (A+C)$

$$A+B = 1 \quad (1); \qquad -A+B+C = 0 \quad (2); \qquad A+C = 2 \quad (3)$$

Resolvendo (1) e (3) obtemos $B = 0$ e $C = 1$. Portanto,

$$I = \int\frac{du}{u+1} + \int\frac{du}{(u-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \ln|u+1| + \frac{2}{\sqrt{3}}\ \operatorname{tg}^{-1}\frac{u-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} + C = \ln|\operatorname{tg}x+1| + \frac{2}{\sqrt{3}}\ \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2\operatorname{tg}x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

21. $\dfrac{4+5x^2}{x^3+4x} = \dfrac{4+5x^2}{x(x^2+4)} \equiv \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+4}$; $4+5x^2 \equiv A(x^2+4) + (Bx+C)x$; $4+5x^2 \equiv (A+B)x^2 + Cx + 4A$

Portanto, $A+B=5$; $C=0$; $4A=4$. Logo $A=1$, $B=4$, e $C=0$. Assim,

$$\int_1^4 \frac{(4+5x^2)\,dx}{x^3+4x} = \int_1^4 \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{x^2+4}\right)dx = \ln|x| + 2\ln|x^2+4|\Big]_1^4 = (\ln 4 + 2\ln 20) - 2\ln 5 = 6\ln 2$$

23. Método 1. $\dfrac{5x^3-4x}{x^4-16} = \dfrac{5x^3-4x}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} \equiv \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+4}$

$5x^3 - 4x \equiv A(x+2)(x^2+4) + B(x-2)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2-4)$

Seja $A = 2$: $32 = 32A \iff A = 1$. Seja $x = -2$: $-32 = -32B \iff B = 1$.

$5x^3 - 4x \equiv A(x^3+2x^2+4x+8) + B(x^3-2x^2+4x-8) + Cx^3 + Dx^2 - 4Cx - 4D$

$5x^3 - 4x \equiv (A+B+C)x^3 + (2A-2B+D)x^2 + (4A+4B-4C)x + (8A-8B-4D)$

Portanto, $A+B+C=5$; $2A-2B+D=0$; $4A+4B-4C=-4$; $8A-8B-4D=0$.

Resolvendo duas primeiras delas obtemos $C=3$ e $D=0$. Logo,

$$\int_3^4 \frac{(5x^3-4x)\,dx}{x^4-16} = \int_3^4 \frac{dx}{x-2} + \int_3^4 \frac{dx}{x+2} + 3\int_3^4 \frac{x\,dx}{x^2+4} = \ln|x-2| + \ln|x+2| + \frac{3}{2}\ln|x^4+4|\Big]^4$$

$$= \left(\ln 2 + \ln 6 + \frac{3}{2}\ln 20\right) - \left(\ln 5 + \frac{3}{2}\ln 13\right) = \ln\frac{2\cdot 6}{5} + \frac{3}{2}\ln\frac{20}{13} = \ln\frac{12}{5} + \frac{3}{2}\ln\frac{20}{13}$$

Método 2. $$\int_3^4 \frac{(5x^3-4x)\,dx}{x^4-16} = \frac{5}{4}\int_3^4 \frac{4x^3\,dx}{x^4-16} - 2\int \frac{2x\,dx}{(x^2)^2-16} = \frac{5}{4}\ln|x^4-16| - \frac{1}{4}\ln\frac{x^2-4}{x^2+4}\Big]_3^4$$

$$= \left(\frac{5}{4}\ln 48 - \frac{1}{4}\ln\frac{3}{4}\right) - \left(\frac{5}{4}\ln 65 - \frac{1}{4}\ln\frac{5}{13}\right) = \ln\frac{12}{5} + \frac{3}{2}\ln\frac{20}{13}$$

25. $\dfrac{x^2}{(2x^2+2x+1)^2} \equiv \dfrac{A(4x+2)+B}{2x^2+2x+1} + \dfrac{C(4x+2)+D}{(2x^2+2x+1)^2}$

$x^2 \equiv (4Ax+2A+B)(2x^2+2x+1) + 4Cx + 2C + D$

$x^2 \equiv 8Ax^3 + (12A+2B)x^2 + (8A+2B+4C)x + (2A+B+2C+2D)$

Assim, $8A=0$; $12A+2B=1$; $8A+2B+4C=0$; $2A+B+2C+2D=0$.

Resolvendo essas equações na ordem, obtemos $A=0$, $B=\frac{1}{2}$, $C=-\frac{1}{4}$, e $D=0$. Portanto,

$$\int_{-1}^0 \frac{x^2\,dx}{(2x^2+2x+1)^2} = \frac{1}{2}\int_{-1}^0 \frac{dx}{2x^2+2x+1} - \frac{1}{4}\int_{-1}^0 \frac{(4x+2)\,dx}{(2x^2+2x+1)^2} = \frac{1}{4}\int_{-1}^0 \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}} - \frac{1}{4}\int_{-1}^0 \frac{(4x+2)\,dx}{(2x^2+2x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}^{-1}(2x+1) + \frac{1}{4(2x^2+2x+1)}\Big]_{-1}^0 = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}^{-1}1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}^{-1}(-1) - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

27. $\dfrac{x^2+3x+3}{x^3+x^2+x+1} = \dfrac{x^2+3x+3}{(x+1)(x^2+1)} \equiv \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$

$x^2+3x+3 \equiv A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1)$. Logo, $x = -1$: $1 = 2A \iff A = \frac{1}{2}$.

$x^2+3x+3 \equiv (A+B)x^2 + (B+C)x + (A+C)$

Seja $A+B = 1$ (1); $B+C = 3$ (2); $A+C = 3$ (3).

Resolvendo (1) e (3) obtemos $B = \frac{1}{2}$ e $C = \frac{5}{2}$. Portanto,

$$\int_0^1 \frac{(x^2+3x+3)\,dx}{x^3+x^2+x+1} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+1} + \frac{5}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln|x^2+1| + \frac{5}{2}\,\text{tg}^{-1}x\Big]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{5}{2}\,\text{tg}^{-1}1\right) - 0 = \frac{3}{4}\ln 2 + \frac{5}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\ln 2 + \frac{5}{8}\pi$$

29. $$\int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{12\,dt}{e^{2t}+16} = \frac{12}{32}\int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{32e^{-2t}\,dt}{1+16e^{-2t}} = -\frac{3}{8}\ln(1+16e^{-2t})\Big]_{\ln 2}^{\ln 5} = -\frac{3}{8}\left[\ln\left(1+\frac{16}{25}\right) - \ln(1+4)\right] = \frac{3}{8}\ln\frac{125}{41}$$

31. A região é limitada por $y = \dfrac{x^2}{(x^2+1)^3}$, pelo eixo x, pelo eixo y e $x = 1$.

Seja $x^2+1 = u$. Então, $x^2 = u-1$ e $2x\,dx = du$. Se A unidades de área for a área da região,

$$A = \int_0^1 \frac{x^3\,dx}{(x^2+1)^3} = \int_0^1 \frac{x^2(x\,dx)}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(u-1)\,du}{u^3} = \frac{1}{2}\int_1^2\left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^3}\right)du = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{u} + \frac{1}{2u^2}\right]_1^2 .$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right) - \left(-1+\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{16}$$

33. A região é limitada por $y = \dfrac{4}{x^3+8}$, pelo eixo x, pelo eixo y e $x = 1$. Um elemento do volume é um cilindro circular centrado no eixo y, $x \in [0, 1]$, de raio médio γ_i e altura $\dfrac{4}{\gamma_i^3+8}$.

Se V unidades cúbicas for o volume do sólido de revolução,

$$V = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi\gamma_i \cdot \frac{4}{\gamma_i^3+8}\Delta_i x = 8\pi\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^3+8}$$

$$\frac{x}{x^3+8} = \frac{x}{(x+2)(x^2-2x+4)} \equiv \frac{A}{x+2} + \frac{B(2x-2)+C}{x^2-2x+4}$$

$x \equiv A(x^2-2x+4) + (2Bx-2B+C)(x+2)$. Seja $x = -2$: $-2 = 12A \iff A = -\frac{1}{6}$.

$x \equiv (A+2B)x^2 + (-2A+2B+C)x + (4A-4B+2C)$. $A+2B = 0$; $-2A+B+C = 1$; $4A-4B+2C = 0$

Resolvendo as duas primeiras equações, obtemos $B = \frac{1}{12}$ e $C = \frac{1}{2}$. Portanto,

$$V = 8\pi\left[-\frac{1}{6}\int_0^1 \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{12}\int_0^1 \frac{(2x-2)\,dx}{x^2-2x+4} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)+3}\right]$$

$$= 8\pi\left[-\frac{1}{6}\ln|x+2| + \frac{1}{12}\ln|x^2-2x+4| + \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\text{tg}^{-1}\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right]_0^1$$

$$= 8\pi\left[\left(-\frac{1}{6}\ln 3 + \frac{1}{12}\ln 3\right) - \left(-\frac{1}{6}\ln 2 + \frac{1}{12}\ln 4 - \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}\right]\right.$$

$$= 8\pi\left(-\frac{1}{12}\ln 3 + \frac{\pi}{36}\sqrt{3}\right) = \frac{2}{9}\sqrt{3}\,\pi^2 - \frac{2}{3}\pi\ln 3$$

35. Se v cm/s for a velocidade da partícula em t s, então $v = \frac{t^2 - t + 1}{(t + 2)^2(t^2 + 1)}$.

Como $v = \frac{ds}{dt}$, temos $s = \int \frac{t^2 - t + 1}{(t + 2)^2(t^2 + 1)}\, dt$.

$$\frac{t^2 - t + 1}{(t + 2)^2(t^2 + 1)} \equiv \frac{A}{(t + 2)^2} + \frac{B}{t + 2} + \frac{Ct + D}{t^2 + 1}$$

$$t^2 - t + 1 \equiv A(t^2 + 1) + B(t + 2)(t^2 + 1) + (Ct + D)(t + 2)^2 \qquad (1)$$

Seja $t = 2$: $7 = 5A \iff A = \frac{7}{5}$. Diferenciando ambos os membros da identidade (1), obtemos

$$2t - 1 \equiv 2At + B[t^2 + 1 + (t + 2)2t] + C(t + 2)^2 + 2(Ct + D)(t + 2)$$

Seja $t = -2$: $-5 = -4A + 5B = -\frac{28}{5} + 5B \iff B = \frac{3}{25}$. Agrupando os termos em (1), obtemos

$$t^2 - t + 1 \equiv (B + C)t^3 + (A + 2B + 4C + D)t^2 + (B + 4C + 4D)t + (A + 2B + 4D)$$

Assim, $B + C = 0$; $A + 2B + 4C + D = 1$; $B + 4C + 4D = -1$; $A + 2B + 4D = 1$.

Resolvendo a primeira e a última dessas equações, obtemos $C = -\frac{3}{25}$ e $D = -\frac{4}{25}$. Portanto,

$$s = \frac{7}{5}\int \frac{dt}{(t + 2)^2} + \frac{3}{25}\int \frac{dt}{t + 2} - \frac{3}{25}\int \frac{t\, dt}{t^2 + 1} - \frac{4}{25}\int \frac{dt}{t^2 + 1}$$

$$s = -\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{t + 2} + \frac{3}{25}\ln|t + 2| - \frac{3}{50}\ln|t^2 + 1| - \frac{4}{25}\, tg^{-1} t + C$$

Qdo $t = 0$, $s = 0$; logo, $C = \frac{7}{10} - \frac{3}{25}\ln 2$. Qdo $t = t_1$, $s = s_1$. Portanto,

$$s_1 = -\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{t_1 + 2} + \frac{3}{25}\ln|t_1 + 2| - \frac{3}{50}\ln|t_1^2 + 1| - \frac{4}{25}\, tg^{-1} + \frac{7}{10} - \frac{3}{25}\ln 2$$

$$= \frac{3}{50}\ln\frac{(t_1 + 2)^2}{4(t_1^2 + 1)} - \frac{7}{5}\cdot\frac{1}{t_1 + 2} - \frac{4}{25}\, tg^{-1} t_1 + \frac{7}{10}$$

EXERCÍCIOS 9.7 Outras Substituições

1. Seja $z = \sqrt{x}$. Então, $z^2 = x$ e $2z\,dz = dx$.

$$\int \frac{x\,dx}{3+\sqrt{x}} = \int \frac{z^2(2z\,dz)}{3+z} = 2\int \left(z^2 - 3z + 9 - \frac{27}{3+z}\right)dz = \frac{2}{3}z^3 - 3z^2 + 18z - 54\ln|3+z| + C$$

$$= \tfrac{2}{3}x^{3/2} - 3x + 18\sqrt{x} - 54\ln|3+\sqrt{x}| + C$$

3. Seja $z = \sqrt{1+4x}$. Então, $x = \frac{1}{4}(z^2 - 1)$ e $dx = \frac{1}{2}z\,dz$.

$$\int \frac{dz}{x\sqrt{1+4x}} = \int \frac{\frac{1}{2}z\,dz}{\frac{1}{4}(z^2-1)z} = 2\int \frac{dz}{z^2-1} = \ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{1+4x}-1}{\sqrt{1+4x}+1}\right| + C$$

5. Seja $z = \sqrt{1+x}$. Então, $x = z^2 - 1$ e $dx = 2z\,dz$.

$$\int \frac{\sqrt{1+x}}{1-x}\,dx = \int \frac{z(2z\,dz)}{1-(z^2-1)} = -2\int \frac{z^2}{z^2-2}\,dz = -2\int\left(1 + \frac{2}{z^2-2}\right)dz$$

$$= -2z - 4\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}\right| + C = -2\sqrt{1+x} - \sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{2}}\right| + C$$

7. Seja $z = \sqrt[3]{x-2}$. Então, $x = z^3 + 2$ e $dx = 3z^2\,dz$.

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x-2}} = \int \frac{3z^2\,dz}{1+z} = 3\int\left(z - 1 + \frac{1}{1+z}\right)dz = \tfrac{3}{2}z^2 - 3z + 3\ln|1+z| + C$$

$$= \tfrac{3}{2}(x-2)^{2/3} - 3(x-2)^{1/3} + 3\ln|1+(x-2)^{1/3}| + C$$

9. $$\int \frac{dx}{\sqrt{2x}-\sqrt{x+4}} = \int \frac{(\sqrt{2x}+\sqrt{x+4})\,dx}{(\sqrt{2x}-\sqrt{x+4})(\sqrt{2x}+\sqrt{x+4})} = \int \frac{\sqrt{2x}}{x-4}\,dx + \int \frac{\sqrt{x+4}}{x-4}\,dx$$

Seja $u = \sqrt{2x}$. Então, $x = \frac{1}{2}u^2$ e $dx = u\,du$

$$\int \frac{\sqrt{2x}\,dx}{x-4} = \int \frac{u(u\,du)}{\frac{1}{2}u^2 - 4} = 2\int \frac{u^2\,du}{u^2-8}$$

$$= 2\int\left(1 + \frac{8}{u^2-8}\right)du = 2u + \frac{16}{2\sqrt{8}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{8}}{u+\sqrt{8}}\right| + C_1$$

$$= 2\sqrt{2x} + 2\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2x}-2\sqrt{2}}{\sqrt{2x}+2\sqrt{2}}\right| + C_1$$

Seja $v = \sqrt{x+4}$. Então, $x = v^2 - 4$ e $dx = 2v\,dv$.

$$\int \frac{\sqrt{x+4}\,dx}{x-4} = \int \frac{v(2v\,dv)}{(v^2-4)-4} = 2\int \frac{v^2\,dv}{v^2-8}$$

$$= 2\int\left(1 + \frac{8}{v^2-8}\right)dv = 2v + \frac{16}{2\sqrt{8}}\ln\left|\frac{v-\sqrt{8}}{v+\sqrt{8}}\right| + C_2$$

$$= 2\sqrt{x+4} + 2\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2\sqrt{2}}{\sqrt{x+4}+2\sqrt{2}}\right| + C_2$$

Portanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x}-\sqrt{x+4}} = 2\sqrt{2x} + 2\sqrt{x+4} + 2\sqrt{2}\ln\left|\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x+4}-2\sqrt{2})}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x+4}+2\sqrt{2})}\right| + C$$

$$= 2\sqrt{2x} + 2\sqrt{x+4} + 2\sqrt{2}\ln\left|\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x+4}-2\sqrt{2})(\sqrt{x+4}-2\sqrt{2})}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x+4}+2\sqrt{2})(\sqrt{x+4}-2\sqrt{2})}\right| + C$$

$$= 2\sqrt{2x} + 2\sqrt{x+4} + 2\sqrt{2}\ln\left|\frac{(\sqrt{x+4}-2\sqrt{2})^2}{(\sqrt{x}+2)^2}\right| + C$$

$$= 2\sqrt{2x} + 2\sqrt{x+4} + 4\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2\sqrt{2}}{\sqrt{x}+2}\right| + C$$

11. Seja $z = \sqrt{1+2x^3}$. Então, $x^3 = \frac{1}{2}(z^2-1)$ e $3x^2dx = z\,dz$.

$$\int \frac{(2x^5+3x^2)\,dx}{\sqrt{1+2x^3}} = \frac{1}{3}\int \frac{(2x^3+3)(3x^2dx)}{\sqrt{1+2x^3}} = \frac{1}{3}\int \frac{[(z^2-1)+3]z\,dz}{z} = \frac{1}{3}\int (z^2+2)\,dz = \frac{1}{9}z^3 + \frac{2}{3}z + C$$

$$= \frac{1}{9}z(z^2+6) + C = \frac{1}{9}\sqrt{1+2x^3}[(1+2x^3)+6] + C = \frac{1}{9}\sqrt{1+2x^3}(2x^3+7) + C$$

A menos que seja estabelecido de outro modo, usamos as fórmulas do Teorema 9.7.1:

$$z = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x, \quad \operatorname{sen} x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2z}{1-z^2}, \quad dx = \frac{2\,dz}{1+z^2}$$

13. $$\int \frac{3\,dx}{8+7\cos x} = 3\int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{8+7\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)} = 6\int \frac{dz}{8(1+z^2)+7(1-z^2)} = 6\int \frac{dz}{z^2+15}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{15}}\operatorname{tg}^{-1}\frac{z}{\sqrt{15}} + C = \frac{6}{\sqrt{15}}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C$$

15. $$\int \frac{3\,dx}{7+8\cos x} = 3\int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{7+8\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)} = 6\int \frac{dz}{7(1+z^2)+8(1-z^2)} = 6\int \frac{dz}{15-z^2}$$

$$= \frac{6}{2\sqrt{15}}\ln\left|\frac{z+\sqrt{15}}{z-\sqrt{15}}\right| + C = \frac{\sqrt{15}}{5}\ln\left|\frac{\sqrt{15}+\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{\sqrt{15}-\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}\right| + C$$

17. $$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}x+\operatorname{tg}x} = \int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2}+\frac{2z}{1-z^2}} = \int \frac{(1-z^2)}{2z}\,dz = \frac{1}{2}\int\frac{dz}{z} - \frac{1}{2}\int z\,dz$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln|z| - \tfrac{1}{4}z^2 + C = \tfrac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x| - \tfrac{1}{4}\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}x + C$$

19. $$\int \frac{dx}{3-5\operatorname{sen}x} = \int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{3-5\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)} = 2\int \frac{dz}{3(1+z^2)-10z} = 2\int \frac{dz}{3z^2-10z+3} = \frac{2}{3}\int \frac{dz}{z^2-\frac{10}{3}z+1}$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{dz}{\left(z^2-\frac{10}{3}z+\frac{25}{9}\right)-\frac{16}{9}} = \frac{2}{3}\int \frac{dz}{\left(z-\frac{5}{3}\right)^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\frac{8}{3}}\ln\left|\frac{\left(z-\frac{5}{3}\right)-\frac{4}{3}}{\left(z-\frac{5}{3}\right)+\frac{4}{3}}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{z-3}{z-\frac{1}{3}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x-3}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}}\right| + C$$

21. $$\int \frac{dx}{4\ \text{sen}\,x - 3\cos x} = \int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{4\left(\frac{2z}{1+z^2}\right) - 3\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)} = 2\int \frac{dz}{8z - 3 + 3z^2} = \frac{2}{3}\int \frac{dz}{z^2 + \frac{8}{3}z - 1} = \frac{2}{3}\int \frac{dz}{\left(z^2 + \frac{8}{3}z + \frac{16}{9}\right) - \frac{25}{9}}$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{dz}{\left(z + \frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\frac{10}{3}}\ln\left|\frac{\left(z + \frac{4}{3}\right) - \frac{5}{3}}{\left(z + \frac{4}{3}\right) + \frac{5}{3}}\right| + C = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{z - \frac{1}{3}}{z + 3}\right| + C = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{\text{tg}\,\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}}{\text{tg}\,\frac{1}{2}x + 3}\right| + C$$

23. Seja $z = \text{tg}\,x$. Então, $\cos 2x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}$ e $2\,dx = \frac{2\,dz}{1 + z^2}$ logo $dx = \frac{dz}{1 + z^2}$.

$$\int \frac{8\,dx}{3\cos 2x + 1} = 8\int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{3\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right) + 1} = 8\int \frac{dz}{3 - 3z^2 + 1 + z^2} = 4\int \frac{dz}{2 - z^2} = \frac{4}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{z + \sqrt{2}}{z - \sqrt{2}}\right| + C = \sqrt{2}\ln\left|\frac{\text{tg}\,x + \sqrt{2}}{\text{tg}\,x - \sqrt{2}}\right| + C$$

25. $$\int \frac{\cos x\,dx}{1 + 2\cos x} = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{1 + 2\cos x}\right)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1 + 2\cos x} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{1 + 2\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}x - \int \frac{dz}{1 + z^2 + 2 - 2z^2} = \frac{1}{2}x - \int \frac{dz}{3 - z^2} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{z + \sqrt{3}}{z - \sqrt{3}}\right| + C = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{6}\ln\left|\frac{\text{tg}\,\frac{1}{2}x + \sqrt{3}}{\text{tg}\,\frac{1}{2}x - \sqrt{3}}\right| + C$$

27. Seja $z = \text{tg}\,x$; $\cos 2x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}$, $2\,dx = \frac{2\,dz}{1 + z^2}$; logo, $dx = \frac{dz}{1 + z^2}$.

$$\int \frac{dx}{\text{cotg}\,x(6 + 7\cos 2x)} = \int \frac{\text{tg}\,x\,dx}{6 + 7\cos 2x} = \int \frac{z\cdot\frac{dz}{1+z^2}}{6 + 7\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)} = \int \frac{z\,dz}{6 + 6z^2 + 7 - 7z^2} = \int \frac{z\,dz}{13 - z^2}$$

$$= \int \frac{z\,dz}{13 - z^2} = -\frac{1}{2}\ln|13 - z^2| + C = -\frac{1}{2}\ln|13 - \text{tg}^2 x| + C$$

29. $$\int \frac{dx}{2\,\text{sen}\,x + 2\cos x + 3} = \int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{2\left(\frac{2z}{1+z^2}\right) + 2\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right) + 3} = \int \frac{2\,dz}{4z + 2 - 2z^2 + 3 + 3z^2} = 2\int \frac{dz}{z^2 + 4z + 5}$$

$$= 2\int \frac{dz}{(z + 2)^2 + 1} = 2\ \text{tg}^{-1}(z + 2) + C = 2\ \text{tg}^{-1}(2 + \text{tg}\,\tfrac{1}{2}x) + C$$

31. Seja $x = u^6$. Então, $dx = 6u^5\,du$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x}(1 + \sqrt[3]{x})^2} = \int \frac{6u^5\,du}{u^3(u^2)(1 + u^2)^2} = 6\int \frac{du}{(u^2 + 1)^2} = 3\int \left(\frac{u^2 + 1}{(u^2 + 1)^2} - \frac{u^2 - 1}{(u^2 + 1)^2}\right)du$$

$$= 3\int \frac{du}{u^2 + 1} - 3\int \frac{(1 - u^{-2})\,du}{(u + u^{-1})^2} = 3\ \text{tg}^{-1}u + 3\frac{1}{u + u^{-1}} + C = 3\ \text{tg}^{-1}u + \frac{3u}{u^2 + 1} + C = 3\ \text{tg}^{-1}\sqrt[6]{x} + \frac{3\sqrt[6]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} + C$$

33. Seja $z = \sqrt{x}$. Então, $x = z^2$ e $dx = 2z\,dz$. Qdo $x = 0$, $z = 0$; qdo $x = 4$, $z = 2$. Portanto,

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{2z\,dz}{1+z} = 2\int_0^2\left(1 - \frac{1}{1+z}\right)dz = 2\left[z - \ln|z+1|\right]_0^2 = 2[(2-\ln 3) - 0] = 4 - 2\ln 3$$

35. Seja $z = \sqrt{2x}$. Então, $x = \frac{1}{2}z^2$ e $dx = z\,dz$. Qdo $x = \frac{1}{2}$, $z = 1$; qdo $x = 2$, $z = 2$. Portanto,

$$\int_{1/2}^2 \frac{dx}{\sqrt{2x}(\sqrt{2x}+9)} = \int_1^2 \frac{z\,dz}{z(z+9)} = \int_1^2 \frac{dz}{z+9} = \ln|z+9|\Big]_1^2 = \ln 11 - \ln 10 = \ln\frac{11}{10}$$

37. Seja $z = \operatorname{tg}\frac{1}{2}x$. Então, $\operatorname{sen} x = \frac{2z}{1+z^2}$ e $dx = \frac{2\,dz}{1+z^2}$.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5\operatorname{sen} x + 3} = \int_0^1 \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{5\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)+3} = \int_0^1 \frac{2\,dz}{10z + 3 + 3z^2} = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dz}{z^2 + \frac{10}{3}z + 1} = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dz}{\left(z+\frac{5}{3}\right)^2 - \frac{16}{9}}$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\frac{8}{3}}\ln\left|\frac{\left(z+\frac{5}{3}\right)-\frac{4}{3}}{\left(z+\frac{5}{3}\right)+\frac{4}{3}}\right|\Bigg]_0^1 = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{4}{4} - \ln\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}\ln 3$$

39. Seja $z = \operatorname{tg} x$. Então, $\operatorname{sen} 2x = \frac{2z}{1+z^2}$ e $2\,dx = \frac{2\,dz}{1+z^2}$; logo, $dx = \frac{dz}{1+z^2}$.

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{3\,dx}{2\operatorname{sen} 2x + 1} = \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\frac{3\,dz}{1+z^2}}{\frac{4z}{1+z^2}+1} = \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dz}{z^2+4z+1} = 3\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dz}{(z+2)^2-3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{z+2-\sqrt{3}}{z+2+\sqrt{3}}\right|_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\ln\frac{1}{\sqrt{3}+1} - \ln\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+2}\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}+1}\cdot\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-1}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\frac{\sqrt{3}+2}{2}$$

41. Seja $z = \operatorname{tg}\frac{1}{2}x$. Então, $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$ e $dx = \frac{2\,dz}{1+z^2}$.

$$\int_{-\pi/3}^{\pi/2} \frac{3\,dx}{2\cos x + 1} = \int_{-1/\sqrt{3}}^1 \frac{\frac{6\,dz}{1+z^2}}{2\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)+1} = \int_{-1/\sqrt{3}}^1 \frac{dz}{2-2z^2+1+z^2} = 6\int_{-1/\sqrt{3}}^1 \frac{dz}{3-z^2}$$

$$= 6\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{z+\sqrt{3}}{z-\sqrt{3}}\right|\Bigg]_{-1/\sqrt{3}}^1 = \sqrt{3}\left(\ln\left|\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right| - \ln\left|\frac{-1/\sqrt{3}+\sqrt{3}}{-1/\sqrt{3}-\sqrt{3}}\right|\right)$$

$$= \sqrt{3}\left(\ln\left|\frac{(1+\sqrt{3})^2}{-2}\right| - \ln\left|\frac{-1+3}{-1-3}\right|\right) = 2\sqrt{3}\ln(1+\sqrt{3})$$

43. Seja $x = z^6$. Então, $dx = 6z^5dz$. Qdo $x = 0$, $z = 0$; qdo $x = 1$, $z = 1$. Portanto,

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt[3]{x}} = \int_0^1 \frac{z^3(6z^5dz)}{1+z^2} = 6\int_0^1 \frac{z^8}{z^2+1}dz = 6\int_0^1\left(z^6 - z^4 + z^2 - 1 + \frac{1}{z^2+1}\right)dz$$

$$= 6\left[\frac{1}{7}z^7 - \frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{3}z^3 - z + \operatorname{tg}^{-1}z\right]_0^1 = 6\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4}\right) - 0 = \frac{3}{2}\pi - \frac{152}{35}$$

45. (a) Seja $x = z^2$. Então, $dx = 2z\,dz$. Portanto,

$$\int \frac{dx}{x - \sqrt{x}} = \int \frac{2z\,dz}{z^2 - z} = 2\int \frac{dz}{z-1} = 2\ln|z-1| + C = 2\ln|\sqrt{x} - 1| + C$$

(b) Seja $u = \sqrt{x} - 1$. Então, $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$. Portanto,

$$\int \frac{dx}{x - \sqrt{x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} = \int \frac{2\,du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln|\sqrt{x} - 1| + C$$

47. Da fórmula (2) temos

$$\int \sec x\,dx = \ln\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}} + C = \ln\sqrt{\frac{(1+\operatorname{sen} x)^2}{(1-\operatorname{sen} x)(1+\operatorname{sen} x)}} + C = \ln\sqrt{\frac{(1+\operatorname{sen} x)^2}{\cos^2 x}} + C$$

$$= \ln\left|\frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}\right| + C = \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right| + C = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

49. Do resultado do Exercício 48, temos

$$\int \operatorname{cosec} x\,dx = \ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} + C = \ln\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{(1+\cos x)(1-\cos x)}} + C = \ln\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{\operatorname{sen}^2 x}} + C$$

$$= \ln\left|\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}\right| + C = \ln\left|\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right| + C = \ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x| + C$$

EXERCÍCIOS 9.8 Integrais que Resultam em Funções Hiperbólicas Inversas (Suplementar)

1. $$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{2} + C = \ln(x + \sqrt{x^2+4}) + C$$

3. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{(x^2)^2-1}} = \frac{1}{2}\cosh^{-1}x^2 + C = \frac{1}{2}\ln(x^2 + \sqrt{x^4-1}) + C$$

5. $$\int \frac{dx}{9x^2-16} = -\frac{1}{3}\int \frac{3\,dx}{16-(3x)^2} = \begin{cases} -\frac{1}{12}\operatorname{tgh}^{-1}\frac{3}{4}x + C & \text{se } |x| < \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{12}\operatorname{cotgh}^{-1}\frac{3}{4}x + C & \text{se } |x| > \frac{4}{3} \end{cases} = -\frac{1}{24}\ln\left|\frac{4+3x}{4-3x}\right| + C = \frac{1}{24}\ln\left|\frac{4-3x}{4+3x}\right| + C$$

7. Seja $u = \operatorname{sen} x$, $du = \cos x\,dx$. Portanto,

$$\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{4-\cos^2 x}} = \int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{4-(1-\operatorname{sen}^2 x)}} = \int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{3+\operatorname{sen}^2 x}} = \int \frac{du}{\sqrt{3+u^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} + C = \ln(u + \sqrt{u^2+3}) + C$$

$$= \operatorname{senh}^{-1}\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{3}} + C = \ln(\operatorname{sen} x + \sqrt{4-\cos^2 x}) + C$$

9. Seja $u = e^t$, $du = e^t dt$. Então,

$$\int \frac{dt}{\sqrt{5-e^{-2t}}} = \int \frac{e^t dt}{\sqrt{5e^{2t}-1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{\sqrt{5}\,du}{\sqrt{5u^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cosh^{-1}\sqrt{5}u + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln(\sqrt{5}u + \sqrt{5u^2-1}) + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\cosh^{-1}(\sqrt{5}\,e^t) + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln(\sqrt{5}\,e^t + \sqrt{5e^{2t}-1}) + C$$

11. $\displaystyle\int\frac{dx}{2-4x-x^2}=\int\frac{dx}{6-(x+2)^2}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{6}}\ \text{tgh}^{-1}\frac{x+2}{\sqrt{6}}+C & \text{se } |x+2|<\sqrt{6}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\ \text{cotgh}^{-1}\frac{x+2}{\sqrt{6}}+C & \text{se } |x+2|>\sqrt{6}\end{cases}=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}+2+x}{\sqrt{6}-2-x}\right|+C$

13. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+10x+24}=\int\frac{dx}{(x+5)^2-1}=\begin{cases}-\text{tgh}^{-1}(x+5)+C & \text{se } |x+5|<1\\ -\text{cotgh}^{-1}(x+5)+C & \text{se } |x+5|>1\end{cases}=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+6}{x+4}\right|+C$

15. Seja $u=\ln w$, $du=\frac{dw}{w}$. Então,

$$\int\frac{3\,dw}{w\sqrt{4\ln^2 w+9}}=\frac{3}{2}\int\frac{2\,du}{\sqrt{(2u)^2+9}}=\frac{3}{2}\,\text{senh}^{-1}\frac{2u}{3}+C=\frac{3}{2}\,\text{senh}^{-1}\left(\frac{2\ln w}{3}\right)+C=\frac{3}{2}\ln(2\ln w+\sqrt{4\ln^2 w+9})+C$$

17. $\displaystyle\int_3^5\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}=\ln(x+\sqrt{x^2-4})\Big]_3^5=\ln\frac{5+\sqrt{21}}{3+\sqrt{5}}$

19. $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2}\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Big]_{-1/2}^{1/2}=\frac{1}{2}\ln\frac{3/2}{1/2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1/2}{3/2}=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\ln 3^2=\ln 3$

21. $\displaystyle\int_2^3\frac{dx}{\sqrt{9x^2-12x-5}}=\frac{1}{3}\int_2^3\frac{3\,dx}{\sqrt{(3x-2)^2-9}}=\frac{1}{3}\ln(3x-2+\sqrt{(3x-2)^2-9})\Big]_2^3=\frac{1}{3}\ln\frac{7+\sqrt{40}}{4+\sqrt{7}}$

23. Se $|u|<a$, seja $u=a\ \text{tgh}\,x$. Então, $x=\text{tgh}^{-1}\frac{u}{a}$ e $du=a\,\text{sech}^2x\,dx$. Logo,

$$\int\frac{du}{a^2-u^2}=\int\frac{a\,\text{sech}^2x\,dx}{a^2-a^2\,\text{tgh}^2x}=\frac{1}{a}\int\frac{\text{sech}^2x\,dx}{1-\text{tgh}^2x}=\frac{1}{a}\int\frac{\text{sech}^2x\,dx}{\text{sech}^2x}=\frac{1}{a}x+C=\frac{1}{a}\ \text{tgh}^{-1}\frac{u}{a}+C$$

Se $|u|>a$, seja $u=a\,\text{cotgh}\,x$. Então, $x=\text{cotgh}^{-1}\frac{u}{a}$ e $du=-a\,\text{cosech}^2x\,dx$. Logo,

$$\int\frac{du}{a^2-u^2}=\int\frac{-a\,\text{cosech}^2x\,dx}{a^2-a^2\,\text{cotgh}^2x}=\frac{1}{a}\int\frac{-\text{cosech}^2x\,dx}{1-\text{cotgh}^2x}=\frac{1}{a}\int\frac{-\text{cosech}^2x\,dx}{-\text{cosech}^2x}=\frac{1}{a}x+C=\frac{1}{a}\,\text{cotgh}^{-1}\frac{u}{a}+C$$

25. Se v m/s for a velocidade do homem em t s depois que o pára-quedas abre, então

$$\frac{324}{g}\frac{dv}{dt}=324-v^2;\quad dt=\frac{324}{g}\cdot\frac{dv}{324-v^2};\quad t=\frac{324}{g}\int\frac{dv}{18^2-v^2}=\frac{324}{g}\cdot\frac{1}{18}\,\text{cotgh}^{-1}\frac{v}{18}+C$$

Qdo $t=0$, $v=60$; portanto, $C=-\frac{18}{g}\text{cotgh}^{-1}\ \frac{10}{3}$. Logo, $t=\frac{18}{g}\left(\text{cotgh}^{-1}\frac{v}{18}-\text{cotgh}^{-1}\frac{10}{3}\right)$.

27. Um elemento do volume é um disco circular centrado no eixo x, $x\in[-2,3]$, de raio $(16-\xi_i^2)^{-1/2}$. Se V unidades cúbicas for o volume do sólido de revolução, então

$$V=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\pi\left(\frac{1}{\sqrt{16-\xi_i^2}}\right)^2\Delta_i x=\pi\int_{-2}^{3}\frac{dx}{16-x^2}=\pi\left[\frac{1}{4}\ \text{tgh}^{-1}\frac{x}{4}\right]_{-2}^{3}=\frac{\pi}{4}\left[\text{tgh}^{-1}\frac{3}{4}-\ \text{tgh}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 9 E REVISÃO DE INTEGRAÇÃO

1. $\int \operatorname{tg}^2 4x \cos^4 4x\, dx = \int \operatorname{sen}^2 4x \cos^2 4x\, dx = \frac{1}{4}\int \operatorname{sen}^2 8x\, dx = \frac{1}{8}\int (1 - \cos 16x)\, dx = \frac{x}{8} - \frac{1}{128} \operatorname{sen} 16x + C$

3. Seja $u = 4 - e^x$, $du = -e^x dx$. Então, $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{4 - e^x}} = \int \frac{-du}{\sqrt{u}} = -2\sqrt{u} + C = -2\sqrt{4 - e^x} + C.$

5. Seja $x = t^2$, $dx = 2t\, dt$. Então, $I = \int \operatorname{tg}^{-1}\sqrt{x}\, dx = \int 2t \operatorname{tg}^{-1} t\, dt.$

Agora seja $u = \operatorname{tg}^{-1} t$ e $dv = 2t$. Então, $du = \frac{dt}{1 + t^2}$ e $v = t^2 + 1$ de modo que $v\, du = dt$. Logo,

$$I = (t^2 + 1) \operatorname{tg}^{-1} - \int dt = (t^2 + 1) \operatorname{tg}^{-1} - t + C = (x + 1) \operatorname{tg}^{-1}\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$$

7. $\int \cos^2 \frac{1}{3} x\, dx = \frac{1}{2}\int \left(1 + \cos \frac{2}{3} x\right) dx = \frac{1}{2} x + \frac{3}{4} \operatorname{sen} \frac{2}{3} x + C$

9. Seja $u = -1$, $du = dx$. Então,

$$\int \frac{x^2 + 1}{(x - 1)^3}\, dx = \int \frac{u^2 + 2u + 2}{u^3}\, du = \int \left(\frac{1}{u} + 2u^{-2} + 2u^{-3}\right) du = \ln|u| - 2u^{-1} - u^{-2} + C$$

$$= \ln|x - 1| - 2(x - 1)^{-1} - (x - 1)^{-2} + C$$

11. $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x\, dx = \int \frac{1}{2}(-\cos 4x + \cos 2x)\, dx = -\frac{1}{8} \operatorname{sen} 4x + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + C.$

13. Seja $u = x^{1/3}$; então, $x = u^3$ e $dx = 3u^2 du$. Logo,

$$\int \frac{dx}{x + x^{4/3}} = \int \frac{3u^2 du}{u^3 + u^4} = 3\int \frac{du}{u(1 + u)} = 3\int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1 + u}\right) du = 3(\ln|u| - \ln|1 + u|) + C = 3 \ln\left|\frac{x^{1/3}}{1 + x^{1/3}}\right| + C$$

Ou então, $\int \frac{dx}{x + x^{4/3}} = \int \frac{x^{-4/3} dx}{x^{-1/3} + 1} = -3 \ln|x^{-1/3} + 1| + C = 3 \ln\left|\frac{x^{1/3}}{1 + x^{1/3}}\right| + C$

15. $\int (\sec 3x + \operatorname{cosec} 3x)^2 dx = \int (\sec^2 3x + 2 \sec 3x \operatorname{cosec} 3x + \operatorname{cosec}^2 3x)\, dx = \int (\sec^2 3x + 4 \operatorname{cosec} 6x + \operatorname{cosec}^2 3x)\, dx$

$$= \tfrac{1}{3} \operatorname{tg} 3x + \tfrac{2}{3} \ln|\operatorname{tg} 3x| - \tfrac{1}{3} \operatorname{cotg} 3x + C$$

17. $\frac{2t^3 + 11t + 8}{t^3 + 4t^2 + 4t} = 2 + \frac{-8t^2 + 3t + 8}{t(t + 2)^2}$

$\frac{-8t^2 + 3t + 8}{t(t + 2)^2} \equiv \frac{A}{t} + \frac{B}{t + 2} + \frac{C}{(t + 2)^2}$; $-8t^2 + 3t + 8 \equiv A(t + 2)^2 + Bt(t + 2) + Ct$

Seja $t = 0$: $8 = 4A \iff A = 2$. Seja $t = -2$: $-30 = -2C \iff C = 15$.

Seja $t = 1$: $3 = 9A + 3B + C$; $3 = 18 + 3B + 15 \iff B = -10$. Logo,

$$\int \frac{2t^3 + 11t + 8}{t^3 + 4t^2 + 4t}\, dt = \int \left[2 + \frac{2}{t} - \frac{10}{t + 2} + \frac{15}{(t + 2)^2}\right] dt = 2t + 2\ln|t| - 10\ln|t + 2| - \frac{15}{t + 2} + C$$

$$= 2t + \ln \frac{t^2}{(t + 2)^{10}} - \frac{15}{t + 2} + C$$

19. $\int \frac{x^4+1}{x^4-1}\,dx = \int\left[1 + \frac{2}{(x^2-1)(x^2+1)}\right]dx = \int\left[1 + \frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+1}\right]dx = x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - tg^{-1}x + C$

21. $\int sen^4 3x\cos^2 3x\,dx = \int (sen\,3x\cos 3x)^2 sen^2 3x\,dx = \int \frac{sen^2 6x}{4}\cdot\frac{1-\cos 6x}{2}\,dx$

$$= \frac{1}{8}\int\frac{1-\cos 12x}{2}\,dx - \frac{1}{8}\int sen^2 6x\cos 6x\,dx = \frac{1}{16}x - \frac{1}{192}\,sen\,12x - \frac{1}{144}sen^3 6x + C$$

23. $\int\frac{dr}{\sqrt{3-4r-r^2}} = \int\frac{dr}{\sqrt{7-(r+2)^2}} = sen^{-1}\left(\frac{r+2}{\sqrt{7}}\right) + C$

25. Seja $t = x^2$, $dt = 2x\,dx$. Então, $I = \int x^3\cos x^2 dx = \int x^2\cos x^2(x\,dx) = \int\frac{1}{2}t\cos t\,dt$.

Agora seja $u = \frac{1}{2}t$ e $dv = \cos dt$. Então, $du = \frac{1}{2}dt$ e $v = sen\,t$. Assim,

$$I = \frac{1}{2}t\,sen\,t - \int\frac{1}{2}\,sen\,t\,dt = \frac{1}{2}t\,sen\,t + \frac{1}{2}\cos t + C = \frac{1}{2}x^2 sen\,x^2 + \frac{1}{2}\cos x^2 + C$$

27. Seja $u = e^{t/2}$ e $dv = \cos 2t\,dt$. Então, $du = \frac{1}{2}e^{t/2}dt$ e $v = \frac{1}{2}\,sen 2t$. Portanto,

$$\int e^{t/2}\cos 2t\,dt = \frac{1}{2}e^{t/2}sen\,2t - \frac{1}{4}\int e^{t/2}\,sen 2t\,dt$$

Seja $\bar{u} = e^{t/2}$ e $d\bar{v} = sen\,2t\,dt$. Então, $d\bar{u} = \frac{1}{2}e^{t/2}$ e $\bar{v} = -\frac{1}{2}\cos 2t$. Logo,

$$\int e^{t/2}\cos 2t\,dt = \frac{1}{2}e^{t/2}sen\,2t - \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{4}\int e^{t/2}\cos 2t\,dt\right]$$

Adicionando $\frac{1}{16}\int e^{t/2}\cos 2t\,dt$ a ambos os membros, obtemos

$$\frac{17}{16}\int e^{t/2}\cos 2t\,dt = \frac{1}{2}e^{t/2}sen\,2t + \frac{1}{8}e^{t/2}\cos 2t + \frac{17}{16}C$$

$$\int e^{t/2}\cos 2t\,dt = \frac{2}{17}e^{t/2}(4\,sen\,2t + \cos 2t) + C$$

29. Seja $u = sen^2 x$, $du = 2\,sen x\cos x\,dx$. Portanto,

$$\int\frac{sen x\cos x}{4 + sen^4 x}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{du}{4+u^2} = \frac{1}{4}\,tg^{-1}\frac{u}{2} + C = \frac{1}{4}\,tg^{-1}\left(\frac{1}{2}sen^2 x\right) + C$$

31. Se $n = 0$, $\int sen^5 nx\,dx = \int 0\,dx = C$.

Se $n \neq 0$, $\int sen^5 nx\,dx = \int(1-\cos^2 nx)^2\,sen\,nx\,dx = \int(1 - 2\cos^2 nx + \cos^4 nx)\,sen\,nx\,dx$

$$= \frac{1}{n}\left(-\cos nx + \frac{2}{3}\cos^3 nx - \frac{1}{5}\cos^5 nx\right) + C$$

33. Seja $u = \text{cosec}^3 x$ e $dv = \text{cosec}^2 x\, dx$. Então $du = -3\,\text{cosec}^3 x \cot g\, x\, dx$ e $v = -\cot g\, x$. Logo,

$$\int \text{cosec}^5 x\, dx = -\text{cosec}^3 x \cot g\, x - 3\int \text{cosec}^3 x \cot g^2 x\, dx = -\text{cosec}^3 x \cot g\, x - 3\int \text{cosec}^3 x(\text{cosec}^2 x - 1)\, dx$$

$$\int \text{cosec}^5 x\, dx = -\text{cosec}^3 x \cot g\, x - 3\int \text{cosec}^5 x\, dx + 3\int \text{cosec}^3 x\, dx \qquad (1)$$

Do Exercício 9.3.11 temos $\int \text{cosec}^3 x\, dx = \frac{1}{2}(-\text{cosec}\, x \cot g\, x + \ln|\text{cosec}\, x - \cot g\, x|) + \tilde{C}$. De (1),

$$4\int \text{cosec}^5 x\, dx = -\text{cosec}^3 x \cot g\, x - \frac{3}{2}\text{cosec}\, x \cot g\, x + \frac{3}{2}\ln|\text{cosec}\, x - \cot g\, x| + 4C$$

$$\int \text{cosec}^5 x\, dx = -\frac{1}{4}\text{cosec}^3 x \cot g\, x - \frac{3}{8}\text{cosec}\, x \cot g\, x + \frac{3}{8}\ln|\text{cosec}\, x - \cot g\, x| + C$$

35. Seja $u = y - 2$; então, $y = u + 2$ e $dy = du$. Portanto,

$$\int \frac{2y^2+1}{y^3 - 6y^2 + 12y - 8}\, dy = \int \frac{2y^2+1}{(y-2)^3}\, dy = \int \frac{2(u+2)^2+1}{u^3}\, du = \int \frac{2u^2+8u+9}{u^3}\, du = \int\left(\frac{2}{u} + 8u^{-1} + 9u^{-2}\right) du$$

$$= 2\ln|u| - 8u^{-1} - \frac{9}{2}u^{-2} + C = 2\ln|y-2| - 8(y-2)^{-1} - \frac{9}{2}(y-2)^{-2} + C$$

37. Seja $u = \cos x$, $du = -\text{sen}\, x\, dx$. Então $\int \frac{\text{sen}\, x\, dx}{1+\cos^2 x} = -\int \frac{du}{1+u^2} = -\text{tg}^{-1} u + C = -\text{tg}^{-1}(\cos x) + C$.

39. $I = \int \sqrt{4t - t^2}\, dt = \int \sqrt{4 - (t-2)^2}\, dt$

Seja $t - 2 = 2\,\text{sen}\,\theta$ onde $0 \le \theta \le \frac{1}{2}\pi$ se $t \ge 2$ e $-\frac{1}{2}\pi \le \theta < 0$ se $t < 2$. Então, $dt = 2\cos\theta\, d\theta$ e $\sqrt{4-(t-2)^2} = \sqrt{4 - 4\,\text{sen}^2\theta} = 2\sqrt{\cos^2\theta} = 2\cos\theta$. Portanto,

$$I = \int 2\cos\theta(2\cos\theta\, d\theta) = 2\int(1 + \cos 2\theta)\, d\theta = 2\theta + \text{sen}\, 2\theta + C = 2\theta + 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + C$$

$$= 2\,\text{sen}^{-1}\left(\frac{t-2}{2}\right) + \frac{1}{2}(t-2)\sqrt{4t-t^2} + C$$

41. **Método 1.** $\frac{1}{x^4 - x} = \frac{1}{x(x^3-1)} = \frac{1}{x(x-1)(x^2+x+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C(2x+1)+D}{x^2+x+1}$

$1 \equiv A(x-1)(x^2+x+1) + Bx(x^2+x+1) + [C(2x+1)+D]x(x-1)$. Seja $x = 1$: $1 = 3B \iff B = \frac{1}{3}$.

$1 \equiv A(x^3-1) + B(x^3+x^2+x) + C(2x^3 - x^2 - x) + D(x^2 - x)$

$1 \equiv (A + B + 2C)x^3 + (B - C + D)x^2 + (B - C - D)x - A$

$$A + B + 2C = 0 \ (1);\quad B - C + D = 0 \ (2);\quad B - C + D = 1 \ (3);\quad -A = 1 \ (4)$$

Resolvendo (4), (1) e (2) obtemos $A = -1$, $C = \frac{1}{3}$, e $D = 0$. Portanto,

$$\int \frac{dx}{x^4 - x} = \int\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right) dx = -\ln|x| + \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{3}|x^2+x+1| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3}\right| + C$$

Método 2 $\int \frac{dx}{x^4 - x} = \frac{1}{3}\int \frac{3x^{-4}\, dx}{1 - x^{-3}} = \frac{1}{3}\ln|1 - x^{-3}| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3}\right| + C$

43. Seja $u = 3e^x$, $du = 3e^x dx$. Então, $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{4 - 9e^{2x}}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}} = \frac{1}{3}\text{sen}^{-1}\frac{u}{2} + C = \frac{1}{3}\text{sen}^{-1}\left(\frac{3}{2}e^x\right) + C$.

45. $\int \cot g^2 3x \operatorname{cosec}^4 3x\,dx = \int \operatorname{cosec}^2 3x(\cot g^2 3x + 1)\operatorname{cosec}^2 3x\,dx = -\frac{1}{3}\int(\cot g^4 3x + \cot g^2 3x)(-3\operatorname{cosec}^2 3x\,dx)$

$$= -\frac{1}{15}\cot g^5 3x - \frac{1}{9}\cot g^3 3x + C$$

47. Seja $u = \operatorname{sen}^{-1}x$ e $dv = x^2dx$. Então, $du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ e $v = \frac{1}{3}x^3$. Portanto,

$$I = \int x^2 \operatorname{sen}^{-1} dx = \frac{1}{3}x^3 \operatorname{sen}^{-1}x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Para essa integral, seja $t^2 = 1 - x^2$; então, $x^2 = 1 - t^2$ e $x\,dx = -t\,dt$. Assim,

$$\int \frac{x^2(x\,dx)}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{(1-t^2)(-t\,dt)}{t} = \int (t^2-1)\,dt = \frac{1}{3}t^3 - t + \bar{C} = \frac{1}{3}t(t^2-3) = -\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}(x^2+2) + \bar{C}$$

Portanto, $I = \frac{1}{3}x^3 \operatorname{sen}^{-1}x + \frac{1}{9}\sqrt{1-x^2}(x^2+2) + C$.

49. Seja $u = \cos x$; então $du = -\operatorname{sen} x\,dx$. Portanto,

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x - 2\operatorname{cosec} x} = \int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x - 2} = \int \frac{-\operatorname{sen} x\,dx}{1+\cos^2 x} = \int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{tg}^{-1}u + C = \operatorname{tg}^{-1}(\cos x) + C$$

51. Seja $u = \operatorname{sen} 3t$; então, $du = 3\cos 3t\,dt$. Assim,

$$\int \frac{\cos 3t\,dt}{\operatorname{sen} 3t\sqrt{\operatorname{sen}^2 3t - \frac{1}{4}}} = \frac{2}{3}\int \frac{2\,du}{2u\sqrt{(2u)^2-1}} = \frac{2}{3}\sec^{-1}2u + C = \frac{2}{3}\sec^{-1}(2\operatorname{sen} 3t) + C$$

53. Suponha $a > 0$. Seja $x = a\operatorname{tg}\theta$ onde $0 \le \theta < \frac{1}{2}\pi$ se $x \ge 0$ e $-\frac{1}{2}\pi < \theta < 0$ se $x < 0$. Então,

$dx = a\sec^2\theta\,d\theta$ e $\sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2\operatorname{tg}^2\theta + a^2} = a\sec\theta$. Portanto,

$$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^4}\,dx = \int \frac{a\sec\theta(a\sec^2\theta\,d\theta)}{a^4\operatorname{tg}^4\theta} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^4\theta}\,d\theta = -\frac{1}{3a^2}\operatorname{cosec}^3\theta + C = -\frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{3a^2x^3} + C$$

55. Seja $x = \sqrt{2t}$. Então, $2t = x^2$ e $dt = x\,dx$. Logo $I = \int \dfrac{\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{2t}}{\sqrt{1-2t}}\,dt = \int \dfrac{\operatorname{sen}^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}(x\,dx)$.

Agora seja $z = \operatorname{sen}^{-1}x$. Então, $dz = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ e $x = \operatorname{sen} z$. Assim, $I = \int z\operatorname{sen} z\,dz$.

Finalmente, seja $u = z$, $dv = \operatorname{sen} z$; logo, $du = dz$ e $v = -\cos z$. Portanto,

$$I = -z\cos z + \int \cos z\,dz = -z\cos z + \operatorname{sen} z + C = -\operatorname{sen}^{-1}x\sqrt{1-x^2} + x + C = -\sqrt{1-2t}\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{2t} + \sqrt{2t} + C$$

57. Seja $u = \sqrt{x-1}$. Então, $x - 1 = u^2$ e $dx = 2u\,du$. Então, $I = \int \dfrac{dx}{\sqrt{2+\sqrt{x-1}}} = \int \dfrac{2u\,du}{\sqrt{2+u}}$.

Agora seja $t = \sqrt{2+u}$; logo $u = t^2 - 2$ e $du = 2t\,dt$. Então,

$$I = \int \frac{2(t^2-2)(2t\,dt)}{t} = 4\int (t^2-2)\,dt = 4(\tfrac{1}{3}t^3 - 2t) + C = \tfrac{4}{3}t(t^2-6) + C = \tfrac{4}{3}\sqrt{2+u}(u-4) + C$$

$$= \tfrac{4}{3}\sqrt{2+\sqrt{x-1}}(\sqrt{x-1} - 4) + C$$

59. Seja $u = \sqrt{\operatorname{tg} x}$. Então, $u^2 = \operatorname{tg} x$ e $2u\,du = \sec^2 x\,dx$; de modo que $dx = \dfrac{2u\,du}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{2u\,du}{1 + u^4}$.

Método 1. $I = \int \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx = 2\int \dfrac{u^2}{1 + u^4}\,du = 2\int \dfrac{u^2 du}{(u^4 + 2u^2 + 1) - 2u^2} = \int \dfrac{2u^2 du}{(u^2+1)^2 - 2u^2}$

$$\frac{2u^2}{(u^2+1)^2 - 2u^2} \equiv \frac{A(2u+\sqrt{2}) + B}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} + \frac{C(2u - \sqrt{2}) + D}{u^2 - \sqrt{2}u + 1}$$

$$2u^2 \equiv [A(2u + \sqrt{2}) + B(u^2 - \sqrt{2} + 1) + [C(2u - \sqrt{2}) + D](u^2 + \sqrt{2}u + 1)$$

$$2u^2 \equiv (2A + 2C)u^3 + (-\sqrt{2}A + B + \sqrt{2}C + D)u^2 + (-\sqrt{2}B + \sqrt{2}D)u + (\sqrt{2}A + B - \sqrt{2}C + D)$$

Assim, $2A + 2C = 0$ (1); $-\sqrt{2}A + B + \sqrt{2}C + D = 2$ (2); $-\sqrt{2}B + \sqrt{2}D = 0$ (3); $\sqrt{2}A + B - \sqrt{2}C + D = 0$ (4)

(2) + (4) resulta $2B + 2D = 2$ e de (3) obtemos $B = D = \frac{1}{2}$. Então, (2) resulta $-\sqrt{2}A + \sqrt{2}C = 1$

e de (1) obtemos $A = -\frac{1}{4}\sqrt{2}$, $C = \frac{1}{4}\sqrt{2}$. Portanto,

$$I = -\frac{1}{4}\sqrt{2}\int \frac{(2u+\sqrt{2})\,du}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} + \frac{1}{4}\sqrt{2}\int \frac{(2u - \sqrt{2})\,du}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2 - \sqrt{2}u + 1},$$

$$= -\frac{1}{4}\sqrt{2}\ln(u^2 + \sqrt{2}u + 1) + \frac{1}{2}\int \frac{du}{(u + \frac{1}{2}\sqrt{2})^2 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\sqrt{2}\ln(u^2 - \sqrt{2}u + 1) + \frac{1}{2}\int \frac{du}{(u - \frac{1}{2}\sqrt{2})^2 + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{2}\ln\left(\frac{u^2 - \sqrt{2}u + 1}{u^2 + \sqrt{2}u + 1}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{2}\ \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{u + \frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{2}\ \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{u - \frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{2}\ln\left(\frac{\operatorname{tg} x - \sqrt{2\operatorname{tg} x} + 1}{\operatorname{tg} x + \sqrt{2\operatorname{tg} x} + 1}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{2}\ \operatorname{tg}^{-1}(\sqrt{2\operatorname{tg} x} + 1) + \frac{1}{2}\sqrt{2}\ \operatorname{tg}^{-1}(\sqrt{2\operatorname{tg} x} - 1) + C$$

Método 2. $\int \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx = \int \dfrac{2u^2}{u^4+1}\,du = \int \dfrac{u^2 - 1}{u^4 + 1}\,du + \int \dfrac{u^2+1}{u^4+1}\,du = \int \dfrac{1 - u^{-2}}{u^2 + u^{-2}}\,du + \int \dfrac{1 + u^{-2}}{u^2 + u^{-2}}\,du$

$$= \int \frac{d(u + u^{-1})}{(u + u^{-1})^2 - 2} + \int \frac{d(u - u^{-1})}{(u - u^{-1})^2 + 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u + u^{-1} - \sqrt{2}}{u + u^{-1} + \sqrt{2}}\right| + \frac{1}{\sqrt{2}}\ \operatorname{tg}^{-1}\frac{u - u^{-1}}{\sqrt{2}} + C$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{2}\ln\left|\frac{u^2 - \sqrt{2}u + 1}{u^2 + \sqrt{2}u + 1}\right| + \frac{1}{2}\sqrt{2}\ \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{u^2 - 1}{\sqrt{2}u}\right) + C = \frac{1}{4}\sqrt{2}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x - \sqrt{2\cdot\operatorname{tg} x} + 1}{\operatorname{tg} x + \sqrt{2\operatorname{tg} x} + 1}\right| + \frac{1}{2}\sqrt{2}\ \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sqrt{2\operatorname{tg} x}}\right) + C$$

61. Se $n = -1$: $\int x^n \ln x\,dx = \int \ln x\,\dfrac{dx}{x} = \dfrac{1}{2}\ln^2 x + C$.

Se $n \neq -1$, seja $u = \ln x$ e $dv = x^n dx$. Então, $du = \dfrac{dx}{x}$ e $v = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

$$\int x^n \ln x\,dx = \frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int x^n dx = \frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$$

63. $\int_0^\pi \sqrt{2 + 2\cos x}\,dx = 2\int_0^\pi \sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{2}}\,dx = 2\int_0^\pi \cos\dfrac{x}{2}\,dx = 4\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\Big]_0^\pi = 4$

65. $\int_1^2 \dfrac{2x^2 + x + 4}{x^3 + 4x^2}\,dx = \int_1^2 \left(\dfrac{2x^2}{x^2(x+4)} + \dfrac{x+4}{x^2(x+4)}\right)dx = \int_1^2 \left(\dfrac{2}{x+4} + \dfrac{1}{x^2}\right)dx = 2\ln|x+4| - \dfrac{1}{x}\Big]_1^2 = \dfrac{1}{2} + 2\ln\dfrac{6}{5}$

67. Método 1. Seja $t = 2\ \mathrm{tg}\,\theta$ onde $0 \le \theta \le \frac{1}{4}\pi$. Então, $dt = 2\sec^2\theta\, d\theta$ e

$$\sqrt{4+t^2} = \sqrt{4+4\ \mathrm{tg}^2\theta} = 2\sqrt{\sec^2\theta} = 2\sec\theta$$

$$\int_0^2 \frac{t^3dt}{\sqrt{4+t^2}} = \int_0^{\pi/4} \frac{8\ \mathrm{tg}^3\theta(2\sec^2\theta\, d\theta)}{2\sec\theta} = 8\int_0^{\pi/4}(\sec^2\theta - 1)(\ \mathrm{tg}\,\theta\sec\theta\, d\theta) = \frac{8}{3}\sec^3\theta - 8\sec\theta\Big]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{16}{3} - \frac{8}{3}\sqrt{2}$$

Método 2. Seja $u = \sqrt{4+t^2}$. Então, $u^2 = 4 + t^2$ e $u\,du = t\,dt$. Assim,

$$\int_0^2 \frac{t^3dt}{\sqrt{4+t^2}} = \int_0^2 \frac{t^2(t\,dt)}{\sqrt{4+t^2}} = \int_2^{2\sqrt{2}} \frac{(u^2-4)(u\,du)}{u} = \int_2^{2\sqrt{2}}(u^2-4)\,du = \frac{u^3}{3} - 4u\Big]_2^{2\sqrt{2}} = \frac{16}{3} - \frac{8}{3}\sqrt{2}$$

Método 3. Seja $u = t^2$ e $dv = \dfrac{t\,dt}{\sqrt{4+t^2}}$. Então, $du = 2t\,dt$ e $v = \sqrt{4+t^2}$. Assim,

$$\int_0^2 \frac{t^3dt}{\sqrt{4+t^2}} = \int_0^2 t^2\cdot\frac{t\,dt}{\sqrt{4+t^2}} = t^2\sqrt{4+t^2}\Big]_0^2 - \int_0^2 2t\sqrt{4+t^2}\,dt = 8\sqrt{2} - \frac{2}{3}(4+t^2)^{3/2}\Big]_0^2 = \frac{16}{3} - \frac{8}{3}\sqrt{2}$$

69. Seja $u = x$ e $dv = \dfrac{x\,dx}{(16-x^2)^{3/2}}$. Então, $du = dx$ e $v = \dfrac{1}{(16-x^2)^{1/2}}$. Portanto,

$$\int_{-2}^{2\sqrt{3}} \frac{x^2dx}{(16-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}\Big]_{-2}^{2\sqrt{3}} - \int_{-2}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \sqrt{3} + \frac{1}{3}\sqrt{3} - \left[\mathrm{sen}^{-1}\frac{x}{4}\right]_{-2}^{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{3} - \left[\mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \mathrm{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{4}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi$$

71. $$\int_0^{\pi/4}\sec^4 x\,dx = \int_0^{\pi/4}(\ \mathrm{tg}^2x + 1)\sec^2x\,dx = \frac{1}{3}\ \mathrm{tg}^3x + \ \mathrm{tg}\,x\Big]_0^{\pi/4} = \frac{4}{3}$$

73. $$\int_{\pi/12}^{\pi/8}\mathrm{cotg}^3 2y\,dy = \int_{\pi/12}^{\pi/8}\mathrm{cotg}\,2y(\mathrm{cosec}^2 2y - 1)\,dy = -\frac{1}{4}\mathrm{cotg}^2 2y - \frac{1}{2}\ln|\mathrm{sen}\,2y|\Big]_{\pi/12}^{\pi/8}$$

$$= \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\ln 2$$

75. Suponha que $a > 0$. Seja $x = a\,\mathrm{sen}\,\theta$ onde $\theta \in [\pi/6, \pi/6]$. Então, $dx = a\cos\theta\,d\theta$ e

$$\sqrt{(a^2-x^2)^3} = \sqrt{(a^3 - a^2\mathrm{sen}^2\theta)^3} = a^3\sqrt{\cos^6\theta} = a^3\cos^3\theta;\quad \cos^4\theta = (1-\mathrm{sen}^2\theta)^2 = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2\theta + \mathrm{sen}^4\theta$$

$$\int_a^{a/2}\frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{x^2}\,dx = \int_{\pi/2}^{\pi/6}\frac{a^3\cos^3\theta(a\cos\theta\,d\theta)}{a^2\mathrm{sen}^2\theta} = a^2\int_{\pi/2}^{\pi/6}\frac{\cos^4\theta}{\mathrm{sen}^2\theta}\,d\theta = a^2\int_{\pi/2}^{\pi/6}\frac{1 - 2\,\mathrm{sen}^2\theta + \mathrm{sen}^4\theta}{\mathrm{sen}^2\theta}\,d\theta$$

$$= a^2\int_{\pi/2}^{\pi/6}(\mathrm{cosec}^2\theta - 2 + \mathrm{sen}^2\theta)\,d\theta = a^2\left[-\mathrm{cotg}\,\theta - 2\theta + \frac{\theta}{2} - \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{4}\right]_{\pi/2}^{\pi/6} = -a^2\left(\frac{9}{8}\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$$

77. $$\frac{2x^2-2x+1}{x^3+x} \equiv \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1};\quad 2x^2 - 2x + 1 = A(x^2+1) + (Bx+C)x = (A+B)x^2 + Cx + A$$

Portanto, $A + B = 2$, $C = -2$, $A = 1$ de modo que $B = 1$. Assim,,

$$\int_{\sqrt{3}/3}^{1}\frac{2x^2-2x+1}{x^3+x}\,dx = \int_{\sqrt{3}/3}^{1}\left(\frac{1}{x} + \frac{x-2}{x^2+1}\right)dx = \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 2\ \mathrm{tg}^{-1}x\Big]_{\sqrt{3}/3}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\pi\right) - \left(\ln\frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{9}{2} - \frac{1}{6}\pi$$

79. $\int_1^{10} \log_{10}\sqrt{ex}\, dx = \frac{1}{2 \ln 10}\int_1^{10} \ln ex\, dx = \frac{1}{2\ln 10}\int_1^{10}(1 + \ln x)\, dx$

$$= \frac{1}{\ln 10}\Big[x + x\ln x - x\Big]_1^{10} = \frac{1}{2\ln 10}\Big[x\ln x\Big]_1^{10} = 5$$

81. Seja $u = x + 1$; então, $x = u - 1$ e $dx = du$. Portanto,

$$\int_1^2 \frac{x+2}{(x+1)^2}\,dx = \int_2^3 \frac{u+1}{u^2}\,du = \int_2^3\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2}\right)du = \ln|u| - \frac{1}{u}\Big]_2^3 = \left(\ln 3 - \frac{1}{3}\right) - \left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right) = \ln\frac{3}{2} + \frac{1}{6}$$

83. Pela simetria, $\int_0^{\pi}|\cos^3 x|\,dx = 2\int_0^{\pi/2}\cos^3 x\,dx = 2\int_0^{\pi/2}(1 - \text{sen}^2 x)\cos x\,dx = 2\left[\text{sen}\,x - \frac{1}{3}\text{sen}^3 x\right]_0^{\pi/2} = \frac{4}{3}$

85. $\frac{2x}{x^3 - x^2 - x + 1} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$; $2x \equiv A(x-1)^2 + B(x^2-1) + C(x+1)$

Seja $x = 1$: $2 = 2C \iff C = 1$. Seja $x = -1$: $-2 = 4A \iff A = -\frac{1}{2}$.

Seja $x = 0$: $0 = A - B + C$; $0 = -\frac{1}{2} - B + 1 \iff B = \frac{1}{2}$. Portanto,

$$\int_0^{1/2}\frac{2x\,dx}{x^3 - x^2 - x + 1} = \int_0^{1/2}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right)dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{x-1}\Big]_0^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}\ln 3$$

87. $\int_0^{1/2}\frac{x\,dx}{\sqrt{1-4x^4}} = \frac{1}{4}\int_0^{1/2}\frac{4x\,dx}{\sqrt{1-(2x^2)^2}} = \frac{1}{4}\,\text{sen}^{-1}(2x^2)\Big]_0^{1/2} = \frac{1}{4}\,\text{sen}^{-1}\frac{1}{2} = \frac{1}{24}\pi$

89. Seja $y + 1 = \sec\theta$ onde $\theta \in [0, \pi/3]$. Então, $dy = \sec\theta\ \text{tg}\,\theta\, d\theta$ e

$$\sqrt{2y + y^2} = \sqrt{(y+1)^2 - 1} = \sqrt{\sec^2\theta - 1} = \sqrt{\text{tg}^2\theta} = \text{tg}\,\theta$$

$$\int_0^1\sqrt{2y+y^2}\,dy = \int_0^{\pi/3}\text{tg}\,\theta(\sec\theta\ \text{tg}\,\theta\,d\theta) = \int_0^{\pi/3}\sec\theta(\sec^2\theta - 1)\,d\theta = \int_0^{\pi/3}(\sec^3\theta - \sec\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\sec\theta\ \text{tg}\,\theta - \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \text{tg}\,\theta|\Big]_0^{\pi/3} = \sqrt{3} - \frac{1}{2}\ln(2 + \sqrt{3})$$

91. Seja $z = \text{tg}\,\frac{1}{2}t$. Então, $\cos t = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}$ e $dt = \frac{2\,dz}{1+z^2}$. Portanto,

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{12 + 13\cos t} = \int_0^1\frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{12 + 13\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)} = \int_0^1\frac{2\,dz}{25 - z^2} = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{z+5}{z-5}\right|\Big]_0^1 = \frac{1}{5}\ln\frac{3}{2}$$

93. Seja $u = \sqrt{x}$. Então, $x = u^2$ e $dx = 2u\,du$. Assim, $I = \int_0^{16}\sqrt{4 - \sqrt{x}}\,dx = 2\int_0^4\sqrt{4-u}\,u\,du$.

Agora seja $v = \sqrt{4-u}$. Então, $u = 4 - v^2$ e $du = -2v\,dv$. Portanto,

$$I = 2\int_2^0 v(4 - v^2)(-2v\,dv) = 4\int_2^0(v^4 - 4v^2)\,dv = 4\left[\frac{1}{5}v^5 - \frac{4}{3}v^3\right]_2^0 = \frac{256}{15}$$

95. $M = \int_0^3 ke^{-3x}dx = -\frac{k}{3}\int_0^3 e^{-3x}(-3\,dx) = -\frac{k}{3}\left[e^{-3x}\right]_0^3 = \frac{k}{3}(1 - e^{-9})$

Seja $u = kx$ e $dv = e^{-3x}\,dx$. Então, $du = k\,dx$ e $v = -\frac{1}{3}e^{-3x}$. Portanto,

$$M_y = \int_0^3 kxe^{-3x}dx = -\frac{k}{3}xe^{-3x}\Big]_0^3 + \int_0^3 e^{-3x}dx = -ke^{-9} - \frac{k}{9}\left[e^{-3x}\right]_0^3 = -ke^{-9} + \frac{k}{9}(1 - e^{-9}) = \frac{k}{9}(1 - 10e^{-9})$$

$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{k(1 - 10e^{-9})/9}{k(1 - e^{-9})/3} = \frac{e^9 - 10}{3(e^9 - 1)}$. O centróide está a $\frac{e^9 - 10}{3(e^9 - 1)} \approx 0,3330$ m do extremo.

97. $x = \frac{1}{6}y^2$. Logo, $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3}y$. Seja L unidades o comprimento de arco de $(6, 6)$ a $(12, 6\sqrt{2})$.

Seja $y = 3\,\text{tg}\,\theta$ onde $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ e seja $a = \text{tg}^{-1}2$ e $b = \text{tg}^{-1}2\sqrt{2}$ de modo $\sec a = \sqrt{5}$ e $\sec b = 3$. Então, $dy = 3\sec^2\theta\,d\theta$ e $\sqrt{1 + \frac{1}{9}y^2} = \sqrt{1 + \text{tg}^2\theta} = \sqrt{\sec^2\theta} = \sec\theta$. Portanto

$$L = \int_6^{6\sqrt{2}} \sqrt{1 + \tfrac{1}{9}y^2}\,dy = \int_a^b \sec\theta(3\sec^2\theta\,d\theta) = 3\int_a^b \sec^3\theta\,d\theta = \frac{3}{2}\sec\theta\;\text{tg}\,\theta + \frac{3}{2}\ln|\sec\theta + \text{tg}\,\theta|\Big]_a^b$$

$$= \frac{3}{2}\cdot 3\cdot 2\sqrt{2} + \frac{3}{2}\ln(3 + 2\sqrt{2}) - \frac{3}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot 2 - \frac{3}{2}\ln(\sqrt{5} + 2) = 9\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{3 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{5} + 2}\right)$$

99. A FIGURA 9.99 mostra o gráfico de $x^2 = y^4(1 - y^2)$, $y \in [0, 1]$.

A área limitada pelo laço é duas vezes a área da região no primeiro quadrante. Se A unidades de área for a área limitada pelo laço,

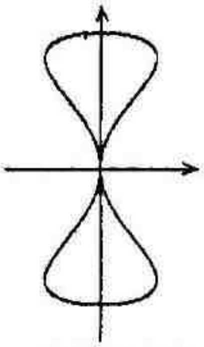


FIGURA 9.99

$$A = 2\lim_{\|\Delta\| \to 0}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\sqrt{1 - X_i^2}\,\Delta_i y = 2\int_0^1 y^2\sqrt{1 - y^2}$$

Seja $y = \text{sen}\,\theta$ onde $0 \le \theta \le \frac{1}{2}\pi$. Então, $dy = \cos\theta\,d\theta$ e

$$\sqrt{1 - y^2} = \sqrt{1 - \text{sen}^2\theta} = \sqrt{\cos^2\theta} = \cos\theta$$

$$A = 2\int_0^{\pi/2}\text{sen}^2\theta\cos\theta(\cos\theta\,d\theta) = 2\int_0^{\pi/2}\frac{\text{sen}^2 2\theta}{4}\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1 - \cos 4\theta}{2}\,d\theta = \frac{1}{4}\theta - \frac{1}{16}\,\text{sen}\,4\theta\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}\pi$$

101. A região é limitada por $y = \ln 2x$, pelo eixo x, e $x = e$. Um elemento do volume é um invólucro cilíndrico no eixo y, de raio médio γ_i e altura $\ln 2\gamma_i$, $\gamma_i \in [\frac{1}{2}, e]$.

Se V unidades cúbicas for o volume do sólido de revolução, então

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0}\sum_{i=1}^{n} 2\pi\gamma_i(\ln 2\gamma_i)\,\Delta_i x = 2\pi\int_{1/2}^{e} x(\ln 2x)\,dx$$

Seja $u = \ln 2x$ e $dv = x\,dx$. Então, $du = \frac{1}{x}$ e $v = \frac{1}{2}x^2$. Então,

$$V = 2\pi\int_{1/2}^{e} x(\ln 2x)\,dx = 2\pi\left[\frac{1}{2}x^2\ln 2x - \frac{1}{2}\int x\,dx\right]_{1/2}^{e} = \pi\left[x^2\ln 2x - \frac{1}{2}x^2\right]_{1/2}^{e} = \pi\left(e^2\ln 2e - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{8}\right)$$

$$= \pi\left(e^2\ln 2 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{8}\right)$$

103. Seja x g da substância **C** presente em t h.

Temos uma tabela de condições laterais.

t	0	1	3
x	0	15	x_3

$$\frac{dx}{dt} = k(60 - \tfrac{3}{5}x)(60 - \tfrac{2}{5}x);\quad \int \frac{dx}{(60 - \frac{3}{5}x)(60 - \frac{2}{5}x)} = \int k\,dt;\quad \frac{1}{12}\int \left(\frac{\frac{3}{5}}{60 - \frac{3}{5}x} - \frac{\frac{2}{5}}{60 - \frac{2}{5}x}\right)dx = k\int dt$$

$$\frac{1}{12}\ln\left|\frac{60 - \frac{2}{5}x}{60 - \frac{3}{5}x}\right| = kt + C_1;\quad \frac{300 - 2x}{300 - 3x} = Ce^{12kt}$$

Qdo $t = 0$, $x = 0$. Portanto, $C = \frac{300}{300} = 1$. Assim, $\frac{300 - 2x}{300 - 3x} = e^{12kt}$.

Qdo $t = 1$, $x = 15$. Logo, $e^{12k} = \frac{270}{255} = \frac{18}{17}$; de modo que $\frac{300 - 2x}{300 - 3x} = \left(\frac{18}{17}\right)^t$.

(a) $300(17)^t - 2(17)^t x = 300(18)^t - 3(18)^t x$; $(3 \cdot 18^t - 2 \cdot 17^t)x = 300(18^t - 17^t)$

$$x = 300\left(\frac{18^t - 17^t}{3 \cdot 18^t - 2 \cdot 17^t}\right)$$

(b) Qdo $t = 3$ temos $x_3 = 300\left(\frac{18^3 - 17^3}{3 \cdot 18^3 - 2 \cdot 17^3}\right) = 35{,}94$.

105. Do Exercício **99**, $A = \pi/8$. $M_x = 2\int_0^1 y\sqrt{y^4(1 - y^2)}\,dy = 2\int_0^1 y^2\sqrt{1 - y^2}\,y\,dy$

Seja $u = \sqrt{1 - y^2}$. Então, $u^2 = 1 - y^2$, $u\,du = -y\,dy$ e $y^2 = 1 - u^2$. Então,

$$M_x = 2\int_1^0 (1 - u^2)u(-u\,d) = 2\int_0^1 (u^2 - u^4)\,du = 2\left[\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5\right]_0^1 = \frac{4}{15}$$

O centróide está em $(0, \bar{y})$ onde $\bar{y} = \frac{1}{A}M_x = \frac{8}{\pi}\cdot\frac{4}{15} = \frac{32}{15\pi}$.

107. A região é limitada pelo eixo $y = \operatorname{sen} x - \cos x$ e $y = \operatorname{sen} x + \cos x$.

$$A = \int_0^{\pi/2} [(\operatorname{sen} x + \cos x) - (\operatorname{sen} x - \cos x)]\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = 2\operatorname{sen} x\Big]_0^{\pi/2} = 2$$

$$M_y = \int_0^{\pi/2} x[(\operatorname{sen} x + \cos x) - (\operatorname{sen} x - \cos x)]\,dx = 2\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx = 2\Big[x\operatorname{sen} x + \cos x\Big]_0^{\pi/2}$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \pi - 2$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} [(\operatorname{sen} x + \cos x) + (\operatorname{sen} x - \cos x)][(\operatorname{sen} x + \cos x) - (\operatorname{sen} x - \cos x)]\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (2\operatorname{sen} x)(2\cos x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{2}(-1 - 1) = 1.$$

$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\pi - 2}{2} = \frac{1}{2}\pi - 1$ e $\bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{1}{2}$. O centróide está no ponto $\left(\frac{1}{2}\pi - 1, \frac{1}{2}\right)$.

109. Se o lago contiver y peixes após t semanas, então

$$\frac{dy}{dt} = ky(10.000 - y)$$

onde k é uma constante positiva e $0 < y < 10.000$.

Temos uma tabela de condições laterais.

t	0	6	8	t_{5000}
y	400	3000	y_8	5000

$$\int k\,dt = \int \frac{dy}{y(10.000 - y)} = \frac{1}{10.000}\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{10.000 - y}\right) dy; \quad kt = \frac{1}{10.000} \ln \frac{Cy}{10.000 - y}$$

Com $t = 0$ e $y = 400$ obtemos $0 = \frac{1}{10.000} \ln \frac{400C}{9600}$; $C = 24$. Assim, $10.000kt = \ln \frac{24y}{10.000 - y}$.

Com $t = 6$ e $y = 3000$ obtemos $(10.000k)6 = \ln \frac{24 \cdot 3000}{7000}$; $10.000k = \frac{\ln(72/7)}{6} = 0,3885$.

(b) Logo $0,3885t = \ln \frac{24y}{10.000 - y}$. Qdo $y = 5000$, $0,3885t_{5000} = \ln 24$; $t_{5000} = \frac{\ln 24}{0,3885} = 8,18$.

Assim, a taxa de crescimento será máxima depois de 8,18 semanas.

(e) $e^{-0,3885t} = \frac{10.000 - y}{24y}$; $24ye^{-0,3885t} = 10.000 - y$; $y = \frac{10.000}{1 + 24e^{-0,3885t}}$

Qdo $t = 8$, $y_8 = \frac{10.000}{1 + 24e^{(-0,3885)8}} = 4824$. Após 8 semanas o lago terá **4824** peixes.

111. Seja x o eixo na borda do tanque e tomemos o eixo positivo y para baixo. Então, a região é limitada por $y = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}x$, $x \in [0, 3]$ e pelo eixo x. Um elemento de área é uma faixa vertical com $2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\xi_i$ de comprimento e profundidade média de $\frac{\pi}{3}\xi_i$. F N é a força na extremidade,

$$F = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(\rho g \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\xi_i\right)\left(2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\xi_i\right)\Delta_i x = \rho g \int_0^3 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{3}x\,dx = \rho g \int_0^3 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{3}x\right) dx = \rho g \left[x - \frac{3}{2\pi} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}\right]_0^3$$

$$= 3\rho g$$

CAPÍTULO 10

SECÇÕES CÔNICAS E COORDENADAS POLARES

EXERCÍCIOS 10.1 A Parábola e Translação de Eixos

1. A equação $x^2 = 4y$ é da forma $x^2 = 4py$ onde $p = 1$. Assim, a parábola tem seu foco em em $(0, 1)$ e uma equação da diretriz é $y = -1$. O comprimento do *latus rectum* é $4|p| = 4$.

3. A equação $y^2 = -8x$ é da forma $y^2 = 4px$ onde $p = -2$. Assim, a parábola tem seu foco em $(-2, 0)$ e uma equação da diretriz é $x = 2$. O comprimento do *latus rectum* é $4|p| = 8$.

5. A equação $x^2 + y = 0$ ou, equivalentemente $x^2 = 4(-\frac{1}{4})y$ é da forma $x^2 = 4py$ onde $p = -\frac{1}{4}$. Portanto, a parábola tem seu foco em $(0, -\frac{1}{4})$ e uma equação da diretriz é $y = \frac{1}{4}$. O comprimento do *latus rectum* é $4|p| = 1$.

7. A equação $2y^2 - 9x = 0$ ou, equivalentemente $y^2 = 4(\frac{9}{8})x$ é da forma $y^2 = 4px$ onde $p = \frac{9}{8}$. Portanto, a parábola tem seu foco em $(\frac{9}{8}, 0)$ e uma equação da diretriz é $x = -\frac{9}{8}$. O comprimento do *latus rectum* é $4|p| = \frac{9}{2}$.

9. O foco está em $(5, 0)$ e a diretriz tem a equação $x = -5$. Logo, a distância orientada da diretriz do foco é $10 = 2p$; $p = 5$. O vértice, que está entre o foco e a diretriz, está em $(0, 0)$. Uma equação da parábola é da forma $y^2 = 4px$. Assim, a parábola tem a equação $y^2 = 20x$.

11. O foco está em $(0, -2)$ e a diretriz tem a equação $y - 2 = 0$. A distância orientada da diretriz até o foco é $2p$. A distância orientada de $y - 2 = 0$ a $(0, -2)$ é -4. Logo, $2p = -4$; $p = -2$. O vértice está no ponto médio entre o foco e a diretriz. Logo, o vértice é $(0, 0)$. Então, $x^2 = -8y$ é uma equação da parábola.

13. O foco está em $(\frac{1}{2}, 0)$ e a diretriz tem a equação $2x + 1 = 0$. A distância orientada da diretriz até o foco é 1. Portanto, $2p = 1$; $p = \frac{1}{2}$. O vértice está em $(0, 0)$, e portanto, uma equação da parábola é $y^2 = 2x$.

15. Como o vértice está em $(0, 0)$ e a parábola abre-se para a esquerda, sua equação é da forma $y^2 = -4px$, onde $p > 0$. O comprimento do *latus rectum* é $6 = 4p$. Então, a equação é $y^2 = -6x$.

17. Como o vértice está em $(0, 0)$ e uma equação da diretriz é $x = -\frac{5}{2}$, uma equação da parábola é da forma $y^2 = 4px$, e $p > 0$. Como a distância orientada da diretriz ao vértice é $\frac{5}{2}$, então, $p = \frac{5}{2}$. Assim, uma equação da parábola é $y^2 = 10x$.

19. Como o eixo y é o eixo da parábola, ele se abre para cima ou para baixo. Portanto, como o vértice está em $(0, 0)$, sua equação é da forma $x^2 = 4py$. Como $(-2, -4)$ está sobre a parábola $(-2)^2 = 4p(-4)$; $4p = -1$. Assim, uma equação da parábola é $x^2 = -y$.

21. $x^2 + y^2 + 6x + 4y = 0$; $(-3, -2)$. Seja $x = x' - 3$ e $y = y' - 2$. Então,

$(x' - 3)^2 + (y' - 2)^2 + 6(x' - 3) + 4(y' - 2) = 0$; $x'^2 - 6x' + 9 + y'^2 - 4y' + 4 + 6x' - 18 + 4y' - 8 = 0$

$$x'^2 + y'^2 = 13$$

23. $y^2 - 6x + 9 = 0$; $(\frac{3}{2}, 0)$. Seja $x = x' + \frac{3}{2}$ e $y = y'$. Então,

$$y'^2 - 6(x' + \tfrac{3}{2}) + 9 = 0; \quad y'^2 - 6x' - 9 + 9 = 0; \quad y'^2 = 6x'$$

25. $y - 4 = 2(x - 1)^3$; $(1, 4)$. Seja $x = x' + 1$ e $y = y' + 4$. Então,

$$(y' + 4) - 4 = 2[(x' + 1) - 1)]^3; \quad y' = 2x'^3$$

27. $x^2 + 6x + 4y + 8 = 0$; $x^2 + 6x + 9 = -4y - 8 + 9$; $(x + 3)^2 = -4(y - \frac{1}{4})$

A equação é da forma $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, onde $h = -3$, $k = \frac{1}{4}$, e $4p = -4$. Portanto, o vértice está em $(-3, \frac{1}{4})$, o foco está em $(-3, -\frac{3}{4})$, uma equação do eixo é $x = -3$, e uma equação da diretriz é $y = \frac{5}{4}$.

29. $y^2 + 6x + 10y + 19 = 0$; $y^2 + 10y + 25 = -6x - 19 + 25$; $(y + 5)^2 = -6(x - 1)$

A equação é da forma $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, onde $h = 1$, $k = -5$, e $4p = -6$. Portanto, o vértice está em $(1, -5)$, o foco está em $(-\frac{1}{2}, -5)$, uma equação do eixo é $y = -5$ e uma equação da diretriz é $x = \frac{5}{2}$.

31. $2y^2 = 4y - 3x$; $2(y^2 - 2y + 1) = -3x + 2 \cdot 1$; $2(y - 1)^2 = -3\left(x - \frac{2}{3}\right)$; $(y - 1)^2 = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{2}{3}\right)$

A equação é da forma $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, onde $h = \frac{2}{3}$, $k = 1$, e $4p = -\frac{3}{2}$; $p = -\frac{3}{8}$.
O vértice está em $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ e o foco está em $\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{8}, 1\right) = \left(\frac{7}{24}, 1\right)$. Uma equação do eixo é $y = 1$, e uma equação da diretriz é $x = \frac{25}{24}$.

33. Uma parábola tem seu vértice em $(2, 4)$ e seu foco em $(-3, 4)$. Como o foco está à esquerda do vértice, a parábola se abre para a esquerda. Portanto, uma equação da parábola é da forma $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ onde $p < 0$. A distância orientada do vértice ao foco é p; assim, $p = -5$. Além disso, $(h, k) = (2, 4)$. Portanto, temos

$$(y - 4)^2 = -20(x - 2); \quad y^2 + 20x - 8y - 24 = 0$$

35. Uma parábola tem seu foco em $(-1, 7)$, e uma equação de sua diretriz é $y = 3$. Como a diretriz está abaixo do foco, a parábola se abre para cima. Portanto, uma equação da parábola é da forma $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ onde $p > 0$. Como o vértice está no ponto médio entre o foco e a diretriz, está no ponto $(-1, 5)$. Além disso, $2p = 4$. Portanto, temos $(x + 1)^2 = 8(y - 5)$; $x^2 + 2x - 8y + 41 = 0$

37. Uma parábola tem seu vértice em $(3, -2)$, uma equação de seu eixo é $x = 3$, e o comprimento de seu *latus rectum* é 6. Como o eixo é vertical, uma equação da parábola é da forma $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ onde $|4p| = 6$; $4p = \pm 6$. Além disso, $(h, k) = (3, -2)$. Há duas parábolas possíveis:

$$(x - 3)^2 = 6(y + 2); \quad x^2 - 6x - 6y - 3 = 0 \quad \text{e} \quad (x - 3)^2 = -6(y + 2); \quad x^2 - 6x + 6y + 21 = 0$$

39. Uma parábola tem seu vértice em $(-4, 2)$, uma equação de seu eixo é $y = 2$, e ela passa pelo ponto $(0, 6)$. Como o eixo é horizontal, uma equação da parábola é da forma $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ onde $(h, k) = (-4, 2)$. Assim, temos $(y - 2)^2 = 4p(x + 4)$. As coordenadas do ponto $(0, 6)$ devem satisfazer essa equação. Então,

$$(6 - 2)^2 = 4p(0 + 4); \quad 16 = 4p(4); \quad 4 = 4p$$

Portanto, uma equação da parábola é $(y - 2)^2 = 4(x + 4)$; $y^2 - 4x - 4y - 12 = 0$.

41. O comprimento do *latus rectum* de uma parábola é $4|p|$. Como a parábola se abre para baixo, $p < 0$. Como $(-5, k)$ e e $(5, k)$ são pontos extremos do *latus rectum* $4p = -10$. Como o vértice está na origem, sua equação é da forma $x^2 = 4py$.

(b) Assim, uma equação da parábola é $x^2 = -10y$.

(a) Como o ponto $(5, k)$ está sobre a parábola $(5)^2 = -10k$; $k = -\frac{5}{2}$.

43. Temos uma parábola que se abre para cima com seu vértice em $(0, 7)$. Portanto, uma equação é da forma $x^2 = 4p(y - 7)$. A parábola passa pelo ponto $(75, 22)$. Assim,

$$(75)^2 = 4p(22 - 7); \quad 4p = 75^2/15 = 375$$

Então, uma equação da parábola é $x^2 = 375(y - 7)$. Quando $x = 60$ então, $y = \frac{(60)^2}{375} + 7 = 16{,}6$. Portanto, a distância vertical ao cabo, de um ponto na rodovia, 15 m distante do pé de uma coluna é 16,6m.

45. Escolha os eixos coordenados de modo que uma equação da parábola seja $x^2 = 4py$, $p > 0$. Seja $\left(t, \frac{t^2}{4p}\right)$ qualquer ponto sobre a parábola. O foco da parábola está em $(0, p)$. Se s for a distância de $\left(t, \frac{t^2}{4p}\right)$ até o foco , então

$$s = \sqrt{t^2 + \left(\frac{t^2}{4p} - p\right)^2} = \sqrt{t^2 + \frac{t^4}{16p^2} - \frac{t^2}{2} + p^2} = \sqrt{\frac{t^4}{16p^2} + \frac{t^2}{2} + p^2} = \frac{t^2}{4p} + p$$

Como s é mínima qdo $t = 0$, o ponto sobre a parábola mais próximo do foco é $(0, 0)$ o qual é o vértice.

47. Escolha os eixos coordenados de tal forma que a parábola tenha seu vértice na origem e se abra para cima. Portanto, uma equação da parábola é $x^2 = 4py$. Como a distância do vértice até o foco é 3 m ou 300cm, ou então, $p = 300$. Portanto, uma equação da parábola é $x^2 = 1.200y$. Qdo $x = \frac{64}{2} = 32$, então, $y = \frac{32^2}{1.200} = \frac{64}{75}$. Logo, o espelho está a $\frac{64}{75}$ de profundidade do centro.

49. A diretriz de uma parábola é $x + y = 0$ e seu foco está em $(1, 1)$.

(a) Como o eixo é a reta que passa pelo foco, sendo perpendicular à diretriz, uma equação do eixo é $y = x$.

(b) O vértice é o ponto sobre o eixo, no ponto médio do segmento que une o foco e a diretriz. Assim, o vértice está em $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(c) Como $|p|$ é a distância do vértice em $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ até o foco em $(1, 1)$, então

$$|p| = \sqrt{(1 - \tfrac{1}{2})^2 + (1 - \tfrac{1}{2})^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

O comprimento do *latus rectum* é $4|p| = 2\sqrt{2}$.

51. Na equação $y = \operatorname{sen} x$, seja $x = x' + h$ e $y = y' + k$. Temos

$$y' + k = \operatorname{sen}(x' + h) = \operatorname{sen}(x')\cos(h) + \cos(x')\operatorname{sen}(h); \quad y' = A \operatorname{sen} x' + B \cos x' + C$$

onde $A = \cos(h)$, $B = \operatorname{sen}(h)$, e $C = -k$. Logo, $A^2 + B^2 = \cos^2 h + \operatorname{sen}^2 h = 1$.

53. $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x - 3$; $y = \cos(-\frac{1}{4}\pi)\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(-\frac{1}{4}\pi)\cos x - 3$; $y + 3 = \operatorname{sen}(x - \frac{1}{4}\pi)$

Seja $x' = -\frac{1}{4}\pi$ e $y' = y + 3$. Isso leva a origem ao ponto $(\frac{1}{4}\pi, -3)$, e a equação torna-se $y' = \operatorname{sen} x'$.

EXERCÍCIOS 10.2 A Elipse

1. $4x^2 + 9y^2 = 36$; $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$. $c = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$.

Centro: $(0, 0)$; vértices: $(3, 0)$, $(-3, 0)$; focos: $(\sqrt{5}, 0)$, $(-\sqrt{5}, 0)$; extremidades do eixo menor: $(0, 2)$, $(0, -2)$.

3. $25x^2 + 4y^2 = 100$; $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$; $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$. $c = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$.

Centro: $(0, 0)$; vértices: $(0, 5)$, $(0, -5)$; focos: $(0, \sqrt{21})$, $(0, -\sqrt{21})$;
extremidades do eixo menor: $(2, 0)$, $(-2, 0)$

5. $2x^2 + 3y^2 = 18$; $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$; $\frac{x^3}{3^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{6})^2} = 1$. $c = \sqrt{9 - 6} = \sqrt{3}$.

Centro: $(0, 0)$; vértices: $(3, 0)$, $(-3, 0)$; focos: $(\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$;
extremidades do eixo menor: $(0, \sqrt{6})$ e $(0, -\sqrt{6})$.

7. $16x^2 + 4y^2 = 1$; $\frac{x^2}{1/16} + \frac{y^2}{1/4} = 1$; $\frac{x^2}{(\frac{1}{4})^2} + \frac{y^2}{(\frac{1}{2})^2} = 1$. $c = \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{3}$.

Centro: $(0, 0)$; vértices: $(0, \frac{1}{2})$, $(0, -\frac{1}{2})$; focos: $(0, \frac{1}{4}\sqrt{3})$, $(0, -\frac{1}{4}\sqrt{3})$;
extremidades do eixo menor: $(\frac{1}{4}, 0)$, $(-\frac{1}{4}, 0)$.

9. $6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y + 51 = 0$; $6(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 - 6y + 9) = -51 + 6 \cdot 4 + 9 \cdot 9$

$$6(x - 2)^2 + 9(y - 3)^2 = 54;\quad \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{6} = 1;\quad \frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y-3)^2}{(\sqrt{6})^2} = 1.\quad c = \sqrt{9 - 6} = \sqrt{3}.$$

Centro: $(2, 3)$; vértices: $(2 \pm 3, 3)$, isto é, $(5, 3)$, $(-1, 3)$; focos: $(2 \pm \sqrt{3}, 3)$;
extremidades do eixo menor: $(2, 3 \pm \sqrt{6})$.

11. $5x^2 + 3y^2 - 3y - 2 = 0$; $5x^2 + 3\left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right) = 12 + 3\left(\frac{1}{4}\right)$; $5x^2 + 3\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{51}{4}$

$$\frac{x^2}{\frac{51}{20}} + \frac{(y - \frac{1}{2})^2}{\frac{17}{4}} = 1.\quad c = \sqrt{\frac{17}{4} - \frac{51}{20}} = \sqrt{\frac{34}{20}} = \frac{1}{10}\sqrt{170}.$$

Centro: $\left(0, \frac{1}{2}\right)$; vértices: $\left(0, \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{17}\right)$; focos: $\left(0, \frac{1}{2} \pm \frac{1}{10}\sqrt{170}\right)$;

extremidades do eixo menor: $\left(\pm\sqrt{\frac{51}{20}}, \frac{1}{2}\right) = \left(\pm\frac{1}{10}\sqrt{255}, \frac{1}{2}\right)$.

13. $4x^2 + 4y^2 + 20x - 32y + 89 = 0$; $4\left(x^2 + 5x + \frac{25}{4}\right) + 4(y^2 - 8y + 16) = -89 + 4\left(\frac{25}{4}\right) + 4(16)$

$4\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + 4(y - 4)^2 = 0$. O gráfico dessa equação é um ponto em $\left(-\frac{5}{2}, 4\right)$.

15. $3x^2 + 5y^2 - 6x - 12 = 0$; $3(x^2 - 2x + 1) + 5y^2 = 12 + 3 \cdot 1$; $3(x - 1)^2 + 5y^2 = 15$

$$\frac{(x-1)^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1;\quad \frac{(x-1)^2}{(\sqrt{5})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1.\quad c = \sqrt{5 - 3} = \sqrt{2}.$$

Centro: $(1, 0)$; vértices: $(1 \pm \sqrt{5}, 0)$; focos: $(1 \pm \sqrt{2}, 0)$;
extremidades do eixo menor: $(1, \pm\sqrt{3})$.

17. $4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 5 = 0$; $4(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) = -5 + 4 \cdot 1 + 1$; $4(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 0$.
O gráfico é o ponto em $(1, -1)$.

19. Uma elipse tem vértices em $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ e $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$; seu centro está em seu ponto médio, que é a origem e $a = 0$. Como um foco está em $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ então, $c = \frac{3}{2}$ e $b = \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{9}{4}} = \sqrt{4} = 2$. Assim, uma equação é $\frac{x^2}{\frac{25}{4}} + \frac{y^2}{4} = 1$; $16x^2 + 25y^2 = 100$.

21. A elipse tem focos em $(0, 3)$ e $(0, -3)$. O centro está em seu ponto médio, que é a origem e $c = 3$. A constante referida na Definição 10.5.1 é $6\sqrt{3} = 2a$ logo, $a = 3\sqrt{3}$. Assim, os vértices estão em $(0, \pm 3\sqrt{3})$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{27 - 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Então, uma equação da elipse é $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{27} = 1$; $3x^2 + 2y^2 = 54$.

23. Os vértices da elipse estão em $(2, 0)$ e $(-2, 0)$. O centro está em seu ponto médio, que é a origem e $a = 2$. Assim, uma equação da elipse é da forma $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Como a elipse contém o ponto $(-1, \frac{1}{2}\sqrt{3})$, então, $\frac{1}{4} + \frac{\frac{3}{4}}{b^2} = 1$; $b^2 = 1$. Portanto, uma equação da elipse é $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$; $x^2 + 4y^2 = 4$.

25. Como o centro da elipse está em $(4, -2)$ e um vértice está em $(9, -2)$ então, $a = 5$ e o eixo principal está na reta $y = -2$. Assim, uma equação da elipse é da forma $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{b^2} = 1$. Como o centro está em $(4, -2)$ e um foco está em $(0, -2)$, então, $c = 4$ e $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9$. Portanto, uma equação é $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$.

27. Como os focos da elipse estão em $(-1, -1)$ e $(-1, 7)$, o centro está em seu ponto médio, que é $(-1, 3)$. Assim, $c = 4$ e o eixo principal está na reta $x = -1$. Logo, uma equação da elipse é da forma $\frac{(y-3)^2}{a^2} + \frac{(x+1)^2}{b^2} = 1$. Como o semi-eixo maior tem 8 unidades de comprimento, então $a = 8$ e $b^2 = a^2 - c^2 = 64 - 16 = 48$. Portanto, uma equação é

$$\frac{(y-3)^2}{64} + \frac{(x+1)^2}{48} = 1$$

29. Derivando implicitamente com relação a x em ambos os lados de $4x^2 + 9y^2 = 72$, obtemos

$$8x + 18yy' = 0; \quad y' = -\frac{4x}{9y}; \quad \text{qdo} \quad x = 3 \quad \text{e} \quad y = 2, \quad y' = -\frac{2}{3}.$$

Portanto, uma equação da reta tangente é $y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 3)$; $2x + 3y - 12 = 0$.

31. Seja a elipse com a equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ com focos em $F'(-c, 0)$ e $F(c, 0)$. Pelo Exercício 30, uma equação da reta tangente no ponto $P(x_0, y_0)$ da elipse é $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$; logo, sua inclinação é $m = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$. A inclinação da reta PF é $m_1 = \frac{y_0}{x_0 - c}$ e a inclinação da reta PF' é $m_2 = \frac{y_0}{x_0 + c}$. Pelo Teorema 1.6.8, como $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ e $c^2 = a^2 - b^2$,

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{m - m_1}{1 + mm_1} = \frac{-\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} - \frac{y_0}{x_0 - c}}{1 - \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} \cdot \frac{y_0}{x_0 - c}} = \frac{b^2 x_0^2 + b^2 c x_0 - a^2 y_0^2}{a^2 x_0 y_0 - a^2 c y_0 - b^2 x_0 y_0} = \frac{b^2 c x_0 - a^2 b^2 \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right)}{(a^2 - b^2) x_0 y_0 - a^2 c y_0}$$

$$= \frac{b^2 c x_0 - a^2 b^2}{c^2 x_0 y_0 - a^2 c y_0} = \frac{b^2 (c x_0 - a^2)}{c y_0 (c x_0 - a^2)} = \frac{b^2}{c y_0}$$

mudando o sinal de c, achamos $\text{tg}\ (-\beta) = -\frac{b^2}{c y_0}$. Logo, $\alpha = \beta$.

33. Escolha o eixo x horizontalmente, 6 m acima do ponto médio. Escolha a origem no ponto médio que une as paredes. Portanto, uma equação da elipse é $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Seja $(3, Y)$ um ponto na elipse, a 2 m da parede. Então,

$$\frac{9}{25} + \frac{Y^2}{9} = 1; \quad \frac{Y^2}{9} = \frac{16}{25}; \quad \frac{Y}{3} = \frac{4}{5}; \quad Y = \frac{12}{5}$$

Assim, a altura do teto a 2 m da parede é $\left(\frac{12}{5} + 6\right)$ m $= \frac{42}{5}$ m.

35. Tomando a origem no centro da órbita, e o eixo maior da elipse ao longo do eixo x, e seja a unidade de distância um milhão de quilômetros. Então, $2a = 500$; $a = 250$ e $2c = 400$; $c = 200$, logo, $b^2 = a^2 - c^2 = 62.500 - 40.000 = 22.500$. Uma equação da órbita é

$$\frac{x^2}{62.500} + \frac{y^2}{22.500} = 1; \quad 9x^2 + 25y^2 = 56.250.000$$

37. Uma equação da secção plana contendo a costura é $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{169/4} = 1$. Resolvendo para y, obtemos $y^2 = \frac{169}{900}(225 - x^2)$, $x \in [-15, 15]$. Uma secção transversal ξ_i cm do centro da elipse é uma circunferência centrada no eixo x, de raio $\frac{13}{30}\sqrt{225 - \xi_i{}^2}$. Se V cm^3 for o volume, então

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot \frac{169}{900}(225 - \xi_i{}^2)\,\Delta_i x = 2 \cdot \frac{169\pi}{900}\int_0^{15}(225 - x^2)\,dx = \frac{169\pi}{450}\left[225x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^{15} = \frac{169\pi}{450}(3.375 - 1.125) = 845\pi$$

39. Para a elipse cuja equação é $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, o centro está em (h, k). Como $a > b$, então, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Portanto, os focos estão nos pontos $(h \pm c, k) = (h \pm \sqrt{a^2 - b^2}, k)$.

41. Tome o eixo x positivo para baixo, com a origem no centro da placa. Uma equação da elipse é $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Um elemento do volume de área é uma faixa horizontal com profundidade média de $\xi_i + 3$, $\xi_i \in [-3, 3]$, e comprimento $2 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{9 - \xi_i{}^2}$. Se F dinas for a força em um lado da placa, em decorrência da pressão da água, então

$$F = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho g(\xi_i + 3)\frac{4}{3}\sqrt{9 - \xi_i{}^2}\,\Delta_i x = \frac{4}{3}\rho g\int_{-3}^{3}(x + 3)\sqrt{9 - x^2}\,dx = \frac{4}{3}\rho g\left[\int_{-3}^{3} x\sqrt{9 - x^2}\,dx + 3\int_{-3}^{3}\sqrt{9 - x^2}\,dx\right]$$

$$= \frac{4}{3}\rho g[0 + 3(\tfrac{1}{2}\pi \cdot 3^2)] = 18\pi\rho g$$

pois o integrando na primeira integral é uma função ímpar e a segunda integral é a medida do semicírculo com raio 3.

43. Como $a > c > 0$; $0 < \frac{c}{a} < 1$; $\left|\frac{c}{a}x\right| \le |x| \le a$. Assim, $\left|a - \frac{c}{a}x\right| = a - \frac{c}{a}x$ e $\left|a + \frac{c}{a}x\right| = a + \frac{c}{a}x$.

Logo, $|\overline{FP}| + |\overline{F'P}| = \left|a - \frac{c}{a}x\right| + \left|a + \frac{c}{a}x\right| = \left(a - \frac{c}{a}x\right) + \left(a + \frac{c}{a}x\right) = 2a$.

EXERCÍCIOS 10.3 A Hipérbole

1. $9x^2 - 4y^2 = 36$; $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$; $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$. $c = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$.

   Centro: $(0, 0)$; vértices: $(2, 0)$, $(-2, 0)$; focos: $(\sqrt{13}, 0)$, $(-\sqrt{13}, 0)$.

   Assíntotas: $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 0$, $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 0$; isto é, $y = \frac{3}{2}x$, $y = -\frac{3}{2}x$.

3. $4x^2 - 25y^2 = 100$; $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$; $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$. $c = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$.

   Centro: $(0, 0)$; vértices: $(5, 0)$, $(-5, 0)$; focos: $(\sqrt{29}, 0)$, $(-\sqrt{29}, 0)$.

   Assíntotas: $\frac{x}{5} - \frac{y}{2} = 0$, $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 0$; isto é, $y = \frac{2}{5}x$, $y = -\frac{2}{5}x$.

5. $4y^2 - x^2 = 16$; $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1$; $\frac{y^2}{2^2} - \frac{x^2}{4^2} = 1$. $c = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

   Centro: $(0, 0)$; vértices: $(0, 2)$, $(0, -2)$; focos: $(0, 2\sqrt{5})$, $(0, -2\sqrt{5})$.

   Assíntotas: $\frac{y}{2} - \frac{x}{4} = 0$, $\frac{y}{2} + \frac{x}{4} = 0$; isto é, $y = \frac{1}{2}x$, $y = -\frac{1}{2}x$.

7. $9y^2 - 16x^2 = 1$; $\frac{y^2}{\frac{1}{9}} - \frac{x^2}{\frac{1}{16}} = 1$; $\frac{y^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 1$. $c = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{25}{144}} = \frac{5}{12}$.

   Centro: $(0, 0)$; vértices: $\left(0, \frac{1}{3}\right)$, $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$; focos: $\left(0, \frac{5}{12}\right)$, $\left(0, -\frac{5}{12}\right)$.

   Assíntotas: $\frac{y}{\frac{1}{3}} - \frac{x}{\frac{1}{4}} = 0$, $\frac{y}{\frac{1}{3}} + \frac{x}{\frac{1}{4}} = 0$; isto é, $y = \frac{4}{3}x$, $y = -\frac{4}{3}x$.

9. $x^2 - y^2 + 8x - 2y - 21 = 0$; $(x^2 + 8x + 16) - (y^2 + 2y + 1) = 21 + 16 - 1$; $(x + 4)^2 - (y + 1)^2 = 36$

   $$\frac{(x+4)^2}{36} - \frac{(y+1)^2}{36} = 1; \quad \frac{(x+4)^2}{6^2} - \frac{(y+1)^2}{6^2} = 1. \quad c = \sqrt{36 + 36} = 6\sqrt{2}.$$

   Centro: $(-4, 1)$; vértices: $(-4 \pm 6, -1)$, isto é, $(2, -1)$, $(-10, -1)$; focos: $(-4 \pm 6\sqrt{2}, -1)$.

   Assíntotas: $\frac{x+4}{6} - \frac{y+1}{6} = 0$; $x + 4 = y + 1$; $x - y + 3 = 0$ e

   $$\frac{x+4}{6} + \frac{y+1}{6} = 0; \quad x + 4 = -y - 1; \quad x + y + 5 = 0$$

11. $9x^2 - 8y^2 + 54x - 36y + 79 = 0$; $9(x^2 + 6x + 9) - 18(y^2 + 2y + 1) = -79 + 9 \cdot 9 - 18 \cdot 1$

    $9(x + 3)^2 - 18(y + 1)^2 = -16$; $\frac{(y+1)^2}{\frac{8}{9}} - \frac{(x+3)^2}{\frac{16}{9}} = 1$; $\frac{(y+1)^2}{\left(\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)^2} - \frac{(x+3)^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} = 1$. $c = \sqrt{\frac{8}{9} + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$.

    Centro: $(-3, -1)$; vértices: $\left(-3, -1 \pm \frac{2}{3}\sqrt{2}\right)$; focos: $\left(-3, -1 \pm \frac{2}{3}\sqrt{6}\right)$.

    Assíntotas: $\frac{y+1}{\frac{2}{3}\sqrt{2}} - \frac{x+3}{\frac{4}{3}} = 0$; $\sqrt{2}(y + 1) - x - 3 = 0$; $-x + \sqrt{2}y + \sqrt{2} - 3 = 0$ e

    $$\frac{y+1}{\frac{2}{3}\sqrt{2}} + \frac{x+3}{\frac{4}{3}} = 0; \quad \sqrt{2}(y + 1) + x + 3 = 0; \quad x + \sqrt{2}y + \sqrt{2} + 3 = 0$$

13. $3y^2 - 4x^2 - 8x - 24y - 40 = 0$; $3(y^2 - 8y + 16) - 4(x^2 + 2x + 1) = 40 + 3\cdot 16 - 4\cdot 1$

$3(y-4)^2 - 4(x+1)^2 = 84$; $\frac{(y-4)^2}{28} - \frac{(x+1)^2}{21} = 1$; $\frac{(y-4)^2}{2\sqrt{7}} - \frac{(x+1)^2}{\sqrt{21}} = 1$. $c = \sqrt{28+21} = 7$.

Centro: $(-1, 4)$; vértices: $(-1, 4 \pm 2\sqrt{7})$; focos: $(-1, 4 \pm 7)$, isto é, $(-1, 11)$, $(-1, -3)$.

Assintotas: $\frac{y-4}{2\sqrt{7}} - \frac{x+1}{\sqrt{21}} = 0$; $\sqrt{3}(y-4) - 2(x+1) = 0$; $-2x + \sqrt{3}y - 2 - 4\sqrt{3}$ e

$\frac{y-4}{2\sqrt{7}} + \frac{x+1}{\sqrt{21}} = 0$; $\sqrt{3}(y-4) + 2(x+1) = 0$; $2x + \sqrt{3}y + 2 - 4\sqrt{3} = 0$

15. $4y^2 - 9x^2 + 16y + 18x = 29$; $4(y^2 + 4y + 4) - 9(x^2 - 2x + 1) = 29 + 4\cdot 4 - 9\cdot 1$

$4(y+2)^2 - 9(x-1)^2 = 36$; $\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$; $\frac{(y+2)^2}{3^2} - \frac{(x-1)^2}{2^2} = 1$. $c = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.

Centro: $(1, -2)$; vértices: $(1, -2 \pm 3)$, isto é, $(1, 1)$, $(1, -5)$; focos: $(1, -2 \pm \sqrt{13})$.

Assintotas: $\frac{y+2}{3} - \frac{x-1}{2} = 0$; $2(y+2) - 3(x-1) = 0$; $3x - 2y - 7 = 0$ e

$\frac{y+2}{3} + \frac{x-1}{2} = 0$; $2(y+2) + 3(x-1) = 0$; $3x + 2y + 1 = 0$.

17. Uma hipérbole tem vértices em $(-2, 0)$ e $(2, 0)$. Seu centro está no ponto médio, que é a origem e $a = 2$. Como seu eixo conjugado tem 6 de comprimento , $2b = 6$; $b = 3$. Uma equação da hipérbole é $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$; $9x^2 - 4y^2 = 36$.

19. Os focos estão no eixo y, logo uma equação da hipérbole é da forma $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$. $(-2, 4)$ e $(-6, 7)$ devem satisfazer essa equação; logo, $16\cdot\frac{1}{a^2} - 4\cdot\frac{1}{b^2} = 1$ e $49\cdot\frac{1}{a^2} - 36\cdot\frac{1}{b^2} = 1$. Resolvendo essas equações simultaneamente, temos $\frac{1}{a^2} = \frac{32}{380}$ e $\frac{1}{b^2} = \frac{33}{380}$. Assim, uma equação da hipérbole é $\frac{y^2}{\frac{380}{32}} - \frac{x^2}{\frac{380}{33}} = 1$; $32y^2 - 33x^2 = 380$.

21. Como as assintotas são as retas $12y = \pm 5x$; $\frac{x}{12k} = \pm\frac{y}{5k}$; então, o centro é o seu ponto de intersecção que está na origem. Como um foco está em $(26, 0)$, então, $c = 26$, o eixo principal é o eixo x e uma equação da hipérbole é da forma

$\frac{x^2}{144k^2} - \frac{y^2}{25k^2} = 1$. Assim, $c^2 = 26^2 = 144k^2 + 25k^2$; $576 = 169k^2$; $k^2 = 4$. Logo, uma equação da hipérbole é $\frac{x^2}{576} - \frac{y^2}{100} = 1$; $25x^2 - 144y^2 = 14.400$.

23. Como o centro está em $(-2, -1)$ e um vértice está em $(-2, 11)$, o eixo principal é a reta $x = -2$ e $a = 11 - (-1) = 12$. Como um foco está em $(-2, 14)$, então $c = 14 - (-1) = 15$. Assim, $b^2 = c^2 - a^2 = 15^2 - 12^2 = 81$; logo, uma equação da hipérbole é $\frac{(y+1)^2}{144} - \frac{(x+2)^2}{81} = 1$.

25. Como os focos estão em $(-1, 4)$ e $(7, 4)$, o centro da hipérbole está em seu ponto médio que é $(3, 4)$, e $c = 4$. O eixo transversal e paralelo ao eixo y e seu comprimento é $2a = \frac{8}{3}$; $a = \frac{4}{3}$. Assim, $b^2 = c^2 - a^2 = 4^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{128}{9}$. Uma equação da hipérbole é

$$\frac{(x-3)^2}{\frac{16}{9}} - \frac{(y-4)^2}{\frac{128}{9}} = 1; \quad 72(x-3)^2 - 9(y-4)^2 = 128$$

27. (a) Como os vértices da hipérbole estão em $(-3, -1)$ e $(-1, -1)$, o centro está em seu ponto médio, que é $(-2, -1)$, e $a = -1 - (-3) = 2$. O eixo principal é paralelo ao eixo x. A distância entre os focos é $2c = 2\sqrt{5}$; $c = \sqrt{5}$. Logo, uma equação da hipérbole é $\frac{(x+2)^2}{1} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$.

(b) Assíntotas: $\frac{x+2}{1} - \frac{y+1}{2} = 0$; $2(x+2) - y - 1 = 0$; $2x - y + 3 = 0$ e

$$\frac{x+2}{1} + \frac{y+1}{2} = 0; \quad 2(x+2) + y + 1 = 0; \quad 2x + y + 5 = 0$$

29. Derivando implicitamente com relação a x em ambos os membros de $4x^2 - y^2 = -1$, obtemos

$$8x - 2yy' = 0; \quad y' = \frac{4x}{y}; \quad \text{qdo. } x = \frac{1}{2} \text{ e } y = \sqrt{2}, \text{ então, } y' = \sqrt{2}.$$

Portanto, uma equação da reta tangente é $y - \sqrt{2} = \sqrt{2}(x - \frac{1}{2})$; $2x - \sqrt{2}y + 1 = 0$.

31. Para a elipse $\frac{x^2}{11} + \frac{y^2}{7} = 1$, temos $a^2 = 11$, $b^2 = 7$; logo, $c^2 = 11 - 7 = 4$. Para a hipérbole $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$, como os vértices da elipse são os focos da hipérbole, temos $C^2 = a^2 = 1$, e como os focos da elipse são os vértices da hipérbole, temos $A^2 = c^2 = 4$. Logo, $B^2 = C^2 - A^2 = 1 - 4 = 7$ e uma equação da hipérbole é

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{7} = 1; \quad 7x^2 - 4y^2 = 28$$

33. Escolha os pontos A em $(-50, 0)$ e B em $(50, 0)$. A quantia que representa o custo de entrega de uma unidade do ponto A até o ponto P (x, y) é $\frac{1}{5}\sqrt{(x+50)^2 + y^2}$ e do ponto B até o ponto P (x, y) é $\frac{1}{5}\sqrt{(x-50)^2 + y^2}$. Logo, temos a equação

$$\frac{1}{5}\sqrt{(x+50)^2 + y^2} = \frac{1}{5}\sqrt{(x-50)^2 + y^2} + 12; \quad \sqrt{x^2 + 100x + 2500 + y^2} = \sqrt{x^2 - 100x + 2500 + y^2} + 60$$

$$x^2 + 100x + 2500 + y^2 = x^2 - 100x + 2500 + y^2 + 120\sqrt{x^2 - 100x + 2500 + y^2} + 3600$$

$$3\sqrt{x^2 - 100x + 2500 + y^2} = 5x - 90; \quad 9(x^2 - 100x + 2500 + y^2) = 25x^2 - 900x + 8100; \quad 16x^2 - 9y^2 = 14400$$

Como os pontos da curva devem estar mais perto de B do que de A, a curva pedida consiste apenas no ramo direito da hipérbole.

35. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Um elemento do volume é um disco circular centrado no eixo x, $x \in [a, 2a]$, de raio $b\sqrt{\frac{\xi_i^2}{a^2} - 1}$. Se V unidades cúbicas for o volume do sólido de revolução, então

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi b^2 \left(\frac{\xi_i^2}{a^2} - 1\right) \Delta_i x = \pi b^2 \int_a^{2a} \left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) dx = \pi b^2 \left[\frac{x^3}{3a^2} - x\right]_a^{2a} = \pi b^2 \left[\left(\frac{8}{3}a - 2a\right) - \left(\frac{1}{3}a - a\right)\right] = \frac{4}{3}\pi a b^2$$

37. Temos os pontos $A(0, 0)$, $B\left(0, \frac{21}{4}\right)$ e $C\left(\frac{25}{3}, 0\right)$. Seja $G(x, y)$ a posição da arma. Então, $|\overline{GC}| - |\overline{GA}| = \frac{5}{3}$ e $|\overline{GA}| - |\overline{GB}| = \frac{7}{4}$. Pela Definição 10.3.1, G está em duas hipérboles.

$$x^2 - \frac{50}{3}x + \frac{625}{9} + y^2 = x^2 + y^2 + \frac{10}{3}\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{25}{9} \qquad x^2 + y^2 - \frac{21}{2}y + \frac{441}{16} = x^2 + y^2 - \frac{7}{2}\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{49}{16}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = -5x + 20 \qquad \sqrt{x^2 + y^2} = 3y - 7$$

Comparando essas equações, $-5x + 20 = 3y - 7$; $y = 9 - \frac{5}{3}x$. Substituindo na segunda, encontramos $x = 3$; logo, $y = 4$.

39. Seja a equação da hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, com focos em $F'(-c, 0)$ e $F = (c, 0)$. Como no Exercício 10.2.30, uma equação da reta tangente no ponto $P(x_0, y_0)$ da hipérbole é $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$; logo, sua inclinação é $m = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$. A inclinação da reta PF é $m_1 = \frac{y_0}{x_0 - c}$ e a inclinação da reta PF' é $m_2 = \frac{y_0}{x_0 + c}$. Pelo Teorema 1.6.8, como $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ e $c^2 = a^2 + b^2$,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m_1 - m}{1 + m_1 m} = \frac{\frac{y_0}{x_0 - c} - \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}}{1 + \frac{y_0}{x_0 - c} \cdot \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}} = \frac{a^2 y_0^2 - b^2 x_0^2 + b^2 c x_0}{a^2 x_0 y_0 - a^2 c y_0 + b^2 x_0 y_0} = \frac{b^2 c x_0 - a^2 b^2\left(\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}\right)}{(a^2 + b^2) x_0 y_0 - a^2 c y_0}$$

$$= \frac{b^2 c x_0 - a^2 b^2}{c^2 x_0 y_0 - a^2 c y_0} = \frac{b^2 (c x_0 - a^2)}{c y_0 (c x_0 - a^2)} = \frac{b^2}{c y_0}$$

mudando o sinal de c achamos $\operatorname{tg}(-\beta) = -\frac{b^2}{c y_0}$. Portanto, $\alpha = \beta$.

41. Temos $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ e $a^2 + b^2 = c^2$, onde $c > a > 0$ e $|x| \geq a$.

$$(x \pm c)^2 + y^2 = x^2 \pm 2cx + c^2 + \frac{b^2 x^2}{a^2} - b^2 = \frac{(a^2 + b^2) x^2}{a^2} \pm 2cx + (c^2 - b^2) = \frac{c^2 x^2}{a^2} \pm 2cx + a^2 = \left(\frac{cx}{a} \pm a\right)^2$$

Além disso, $\left|\frac{c}{a} x\right| > |x| \geq a$ de modo que $\left|\frac{cx}{a} - a\right| = \frac{cx}{a} - a$ e $\left|\frac{cx}{a} + a\right| = \frac{cx}{a} + a$. Portanto,

$$\left|\,|\overline{FP}| - |\overline{F'P}|\,\right| = \left|\sqrt{(x - c)^2 + y^2} - \sqrt{(x + c)^2 + y^2}\right| = \left|\left|\frac{cx}{a} - a\right| - \left|\frac{cx}{a} + a\right|\right| = \left|\frac{cx}{a} - a - \frac{cx}{a} + a\right| = 2a$$

EXERCÍCIOS 10.4 Rotação de Eixos

Pelo Teorema 10.4.1, $x = \bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\,\text{sen}\,\alpha$ e $y = \bar{x}\,\text{sen}\,\alpha + \bar{y}\cos\alpha$.

1. (a) Com $\alpha = \frac{1}{4}\pi$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, obtemos $x = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}$ e $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}$. Então,

$$xy = 8;\quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}\right) = 8;\quad \frac{1}{2}\bar{x}^2 - \frac{1}{2}\bar{y}^2 = 8;\quad \bar{x}^2 - \bar{y}^2 = 16$$

3. (a) Com $\alpha = \frac{1}{4}\pi$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, obtemos $x = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}$ e $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}$. Então,

$$x^2 - y^2 = 8;\quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}\right)^2 = 8;\quad -2\bar{x}\bar{y} = 8;\quad \bar{x}\bar{y} = -4$$

5. A equação é $24xy - 7y^2 + 36 = 0$; logo, $A = 0$, $B = 24$, e $C = -7$. Portanto, o termo xy pode ser removido por uma rotação de eixos, escolhendo α de modo que $\text{cotg}\,2\alpha = \frac{A - C}{B} = \frac{7}{24}$; logo, $\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$ e

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{25}}{2}} = \sqrt{\frac{32}{50}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5},\quad \text{sen}\,\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{7}{25}}{2}} = \sqrt{\frac{18}{50}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

Portanto, substituímos $x = \frac{4}{5}\bar{x} - \frac{3}{5}\bar{y}$, $y = \frac{3}{5}\bar{x} + \frac{4}{5}\bar{y}$. Temos, então

$$24\left(\frac{4}{5}\bar{x} - \frac{3}{5}\bar{y}\right)\left(\frac{3}{5}\bar{x} + \frac{4}{5}\bar{y}\right) - 7\left(\frac{3}{5}\bar{x} + \frac{4}{5}\bar{y}\right)^2 + 36 = 0$$

$$\frac{288}{25}\bar{x}^2 + \frac{168}{25}\bar{x}\bar{y} - \frac{288}{25}\bar{y}^2 - \frac{63}{25}\bar{x}^2 - \frac{168}{25}\bar{x}\bar{y} - \frac{112}{25}\bar{y}^2 + 36 = 0;\quad 16\bar{y}^2 - 9\bar{x}^2 = 36$$

7. A equação dada é $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 8y = 0$; logo, $A = 1$, $B = 2$, e $C = 1$. Portanto, o termo xy pode ser removido por uma rotação de eixos, escolhendo α de modo que $\text{cotg}\,2\alpha = \frac{A - C}{B} = \frac{0}{2} = 0$. Logo, $2\alpha = \frac{1}{2}\pi$; $\alpha = \frac{1}{4}\pi$; $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e substituímos $x = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}$.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}\right)^2 - 8\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}\right) + 8\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}\bar{x}^2 - \bar{x}\bar{y} + \frac{1}{2}\bar{y}^2 + \bar{x}^2 - \bar{y}^2 + \frac{1}{2}\bar{x}^2 - \bar{y}^2 + \frac{1}{2}\bar{x}^2 + \bar{x}\bar{y} + \frac{1}{2}\bar{y}^2 - \frac{8}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{8}{\sqrt{2}}\bar{y} + \frac{8}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{8}{\sqrt{2}}y = 0$$

$$2\bar{x}^2 + 8\sqrt{2}\bar{y} = 0;\quad \bar{x}^2 + 4\sqrt{2}\bar{y} = 0$$

9. A equação dada é $xy + 16 = 0$; logo, $A = 0$, $B = 1$, e $C = 0$. Portanto, o termo xy pode ser removido por uma rotação de eixos, escolhendo α de modo que $\text{cotg}\,2\alpha = \frac{A - C}{B} = \frac{0}{2} = 0$. Logo, $2\alpha = \frac{1}{2}\pi$; $\alpha = \frac{1}{4}\pi$; $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e substituímos, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}$. Então,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}\right) + 16 = 0;\quad \frac{1}{2}\bar{x}^2 - \frac{1}{2}\bar{y}^2 + 16 = 0;\quad \bar{y}^2 - \bar{x}^2 = 32$$

11. A equação dada é $31x^2 + 10\sqrt{3}xy + 21y^2 = 144$; logo, $A = 31$, $B = 10\sqrt{3}$, e $C = 21$. Portanto,

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{A - C}{B} = \frac{31 - 21}{10\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad \cos 2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{2}} = \frac{1}{2}$$

Assim, substituímos $x = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\bar{x} - \frac{1}{2}\bar{y}$ e $y = \frac{1}{2}\bar{x} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\bar{y}$. Temos, então

$$31\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\bar{x} - \frac{1}{2}\bar{y}\right)^2 + 10\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\bar{y}\right)\left(\frac{1}{2}\bar{x} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\bar{y}\right) + 21\left(\frac{1}{2}\bar{x} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\bar{y}\right)^2 = 144$$

$$\left[31\left(\frac{3}{4}\right) + 10\sqrt{3}\left(\frac{1}{4}\sqrt{3}\right) + 21\left(\frac{1}{4}\right)\right]\bar{x}^2 + \left[31\left(\frac{1}{4}\right) - 10\sqrt{3}\left(\frac{1}{4}\sqrt{3}\right) + 21\left(\frac{3}{4}\right)\right]\bar{y}^2 = 144$$

$$36\bar{x}^2 + 16\bar{y}^2 = 144; \quad 9\bar{x}^2 + 4\bar{y}^2 = 36$$

13. A equação dada é $x^2 + xy + y^2 - 3y - 6 = 0$; logo, $A = 1$, $B = 1$, $C = 1$. Então, $\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{A - C}{B} = 0$.

Portanto, $2\alpha = \frac{1}{2}\pi$ e logo $\alpha = \frac{1}{4}\pi$; $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ e $\cos\alpha = \cos\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Então, substituímos $x = X - Y$ e $y = X + Y$ onde $X = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\bar{x}$ e $Y = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\bar{y}$. Então,

$$(X - Y)^2 + (X - Y)(X + Y) + (X + Y)^2 - 3(X + Y) = 6; \quad X^2 - 2XY + Y^2 + X^2 - Y^2 + X^2 + 2XY + Y^2 - 3X - 3Y = 6$$

$$3X^2 + Y^2 - 3X - 3Y = 6; \quad 3\left(X^2 - X + \frac{1}{4}\right) + \left(Y^2 - 3Y + \frac{9}{4}\right) = 6 + \frac{3}{4} + \frac{9}{4} = 3; \quad 3\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y - \frac{3}{2}\right)^2 = 9$$

$$3\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\bar{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\bar{y} - \frac{3}{2}\right)^2 = 9; \quad 3\left(\bar{x} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\bar{y} - \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2 = 18$$

Seja $\bar{x}' = \bar{x} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$ e $\bar{y}' = \bar{y} - \frac{3}{2}\sqrt{2}$. Então, temos $3\bar{x}'^2 + \bar{y}'^2 = 18$.

15. A equação dada é $17x^2 - 12xy + 8y^2 - 68x + 24y - 12 = 0$; logo, $A = 17$, $B = -12$, e $C = 8$.

Então, $\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{A - C}{B} = \frac{17 - 8}{-12} = -\frac{3}{4}$. Assim, $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$ e, logo

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Portanto, substituímos $x = X - 2Y$ e $y = 2X + Y$ onde $X = \frac{1}{\sqrt{5}}\bar{x}$ e $Y = \frac{1}{\sqrt{5}}\bar{y}$. Então,

$$17(X - 2Y)^2 - 2(X - 2Y)(2X + Y) + 8(2X + Y)^2 - 68(X - 2Y) + 24(2X + Y) = 12$$

$$17X^2 - 68XY + 68Y^2 - 24X^2 - 36XY + 24Y^2 + 32X^2 + 32XY + 8Y^2 - 68X + 16Y + 48X + 24Y = 12$$

$$25X^2 + 100Y^2 - 20X + 160Y = 12; \quad 25\left(X^2 - \frac{4}{5}X + \frac{4}{25}\right) + 100\left(Y^2 + \frac{8}{5}Y + \frac{16}{25}\right) = 12 + 4 + 64$$

$$25\left(X - \frac{2}{5}\right)^2 + 100\left(Y + \frac{4}{5}\right)^2 = 80; \quad 25\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\bar{x} - \frac{2}{5}\right) + 100\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\bar{y} + \frac{4}{5}\right)^2 = 80$$

$$5\left(\bar{x} - \frac{2}{5}\sqrt{5}\right)^2 + 20\left(\bar{y} + \frac{4}{5}\sqrt{5}\right)^2 = 80; \quad \left(\bar{x} - \frac{2}{5}\sqrt{5}\right)^2 + 4\left(\bar{y} + \frac{4}{5}\sqrt{5}\right)^2 = 16$$

Seja $\bar{x}' = \bar{x} - \frac{2}{5}\sqrt{5}$ e $\bar{y}' = \bar{y} + \frac{4}{5}\sqrt{5}$. Temos, então, $\bar{x}'^2 + 4\bar{y}'^2 = 16$.

17. A equação dada é $x^2 + 2xy + y^2 + x - y - 4 = 0$; $(x + y)^2 + (x - y) = 4$; logo, $A = 1$, $B = 2$, $C = 1$.

Portanto, $\cot g\, 2\alpha = \frac{A - C}{B} = \frac{1 - 1}{2} = 0$. Assim, $2\alpha = \frac{1}{2}\pi$ e, logo $\alpha = \frac{1}{4}\pi$, $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ e $\cos \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Daí, substituímos $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}\bar{x} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\bar{y}$ e $y = \frac{1}{2}\sqrt{2}\bar{x} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\bar{y}$; de modo que $x + y = \sqrt{2}\bar{x}$ e $x - y = -\sqrt{2}\bar{y}$.

Então, $(\sqrt{2}\bar{x})^2 - \sqrt{2}\bar{y} = 4$; $2\bar{x}^2 - \sqrt{2}\bar{y} = 4$; $\sqrt{2}\bar{x}^2 = \bar{y} + 2\sqrt{2}$. Seja $\bar{x}' = \bar{x}$, $\bar{y}' = \bar{y} + 2\sqrt{2}$. Então, $\sqrt{2}\bar{x}'^2 = \bar{y}$.

19. A equação dada é $11x^2 - 24xy + 4y^2 + 30x + 40y - 45 = 0$; logo, $A = 1$, $B = -24$, e $C = 4$. Então,

$\cot g\, 2\alpha = \frac{A - C}{B} = \frac{11 - 4}{-24} = -\frac{7}{24}$; logo, $\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$. Assim,

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 7/25}{2}} = \frac{3}{5} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 7/25}{2}} = \frac{4}{5}$$

Portanto, substituímos $x = \frac{3}{5}\bar{x} - \frac{4}{5}\bar{y}$ e $y = \frac{4}{5}\bar{x} + \frac{3}{5}\bar{y}$. Temos, então

$$11\left(\frac{3}{5}\bar{x} - \frac{4}{5}\bar{y}\right)^2 - 24\left(\frac{3}{5}\bar{x} - \frac{4}{5}\bar{y}\right)\left(\frac{4}{5}\bar{x} + \frac{3}{5}\bar{y}\right) + 4\left(\frac{4}{5}\bar{x} + \frac{3}{5}\bar{y}\right)^2 + 30\left(\frac{3}{5}\bar{x} - \frac{4}{5}\bar{y}\right) + 40\left(\frac{4}{5}\bar{x} + \frac{3}{5}\bar{y}\right) = 45$$

$$\left[11\left(\frac{9}{25}\right) - 24\left(\frac{12}{25}\right) + 4\left(\frac{16}{25}\right)\right]\bar{x}^2 + \left[11\left(\frac{16}{25}\right) + 24\left(\frac{12}{25}\right) + 4\left(\frac{9}{25}\right)\right]\bar{y}^2 + (18 + 32)\bar{x} + (-24 + 24)\bar{y} = 45$$

$-5\bar{x}^2 + 20\bar{y}^2 + 50\bar{x} = 45$; $-5(\bar{x}^2 - 10\bar{x} + 25) + 20\bar{y}^2 = 45 - 125$; $-5(\bar{x} - 5)^2 + 20\bar{y}^2 = -80$;

$(\bar{x} - 5)^2 - 4\bar{y}^2 = 16$. Seja $\bar{x}' = \bar{x} - 5$ e $\bar{y}' = \bar{y}$ e temos $\bar{x}'^2 - 4\bar{y}'^2 = 16$.

21. A equação dada é $4x^2 + 4xy + y^2 - 6x + 12y = 0$; logo, $A = 4$, $B = 4$, e $C = 1$. Portanto,

$\cot g 2\alpha = \frac{A - C}{B} = \frac{3}{4}$; logo, $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$. Então, $\cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ e $\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Portanto, substituímos $x = \frac{2}{\sqrt{5}}\bar{x} - \frac{1}{\sqrt{5}}\bar{y}$ e $y = \frac{1}{\sqrt{5}}\bar{x} + \frac{2}{\sqrt{5}}\bar{y}$. Então,

$$4\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\bar{x} - \frac{1}{\sqrt{5}}\bar{y}\right)^2 + 4\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\bar{x} - \frac{1}{\sqrt{5}}\bar{y}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\bar{x} + \frac{2}{\sqrt{5}}\bar{y}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\bar{x} + \frac{2}{\sqrt{5}}\bar{y}\right)^2 - 6\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\bar{x} - \frac{1}{\sqrt{5}}\bar{y}\right) + 12\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\bar{x} + \frac{2}{\sqrt{5}}\bar{y}\right) = 0$$

$$\frac{16}{5}\bar{x}^2 - \frac{16}{5}\bar{x}\bar{y} + \frac{4}{5}\bar{y}^2 + \frac{8}{5}\bar{x}^2 + \frac{12}{5}\bar{x}\bar{y} - \frac{8}{5}\bar{y}^2 + \frac{1}{5}\bar{x}^2 + \frac{4}{5}\bar{x}\bar{y} + \frac{4}{5}\bar{y}^2 - \frac{12}{\sqrt{5}}\bar{x} + \frac{6}{\sqrt{5}}\bar{y} + \frac{12}{\sqrt{5}}\bar{x} + \frac{24}{\sqrt{5}}\bar{y} = 0$$

$$25\bar{x}^2 + 30\sqrt{5}\bar{y} = 0; \quad 5\bar{x}^2 + 6\sqrt{5}\bar{y} = 0$$

23. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$; $\sqrt{y} = 1 - \sqrt{x}$; $y = 1 - 2\sqrt{x} + x^2$; $2\sqrt{x} = x - y + 1$; $4x = (x - y)^2 + 2(x - y) + 1$

Para uma rotação de $\frac{1}{4}\pi$ substituímos $x = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}$ e $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}$. Então,

$$4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}\right) = \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\bar{y}\right)^2 + \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\bar{y}\right) + 1; \quad \frac{1}{2}\bar{y}^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}\bar{y} = \frac{4}{\sqrt{2}}\bar{x} + 1; \quad \bar{y}^2 + 2\sqrt{2}\bar{y} + 2 = 4\sqrt{2}\bar{x} + 4$$

$(\bar{y} - \sqrt{2})^2 = 4\sqrt{2}(\bar{x} + \frac{1}{4}\sqrt{2})$, que tem a forma de uma parábola. No entanto, apenas a parte entre $(0, 1)$ e $(1, 0)$ satisfaz a equação dada.

25. Substituímos $x = \bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\,\text{sen}\,\alpha$, $y = \bar{x}\,\text{sen}\,\alpha + \bar{y}\cos\alpha$. Os termos de segundo grau tornam-se

$Ax^2 + Bxy + Cy^2$

$= A(\bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\,\text{sen}\,\alpha)^2 + B(\bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\,\text{sen}\,\alpha)(\bar{x}\,\text{sen}\,\alpha + \bar{y}\cos\alpha) + C(\bar{x}\,\text{sen}\,\alpha + \bar{y}\cos\alpha)^2$

$= \bar{A}\bar{x}^2 + \bar{B}\bar{x}\bar{y} + \bar{C}\bar{y}^2$, onde

$\bar{A} = A\cos^2\alpha + B\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha + C\,\text{sen}^2\alpha$; $2\bar{A} = A + C + (A - C)\cos 2\alpha + B\,\text{sen}\,2\alpha$

$\bar{B} = -2A\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha) + 2C\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha = B\,c\,2\alpha - (A - C)\,\text{sen}\,2\alpha$

$\bar{C} = A\,\text{sen}^2\alpha - B\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha$; $2\bar{C} = A + C - (A - C)\cos 2\alpha - B\,\text{sen}\,2\alpha$

$\bar{B}^2 - 4\bar{A}\bar{C} = [B^2\cos^2 2\alpha - 2B(A - C)\,\text{sen}\,2\alpha\cos 2\alpha + (A - C)^2\text{sen}\,2\alpha]$

$- [(A + C)^2 - (A - C)^2\cos^2 2\alpha - 2B(A - C)\,\text{sen}\,2\alpha\cos 2\alpha - B^2\text{sen}^2 2\alpha]$

$= [B^2 + (A - C)^2](\text{sen}^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha) - (A + C)^2 = (B^2 + A^2 - 2AC + C^2) - (A^2 + 2AC + C^2)$

$= B^2 - 4AC$

EXERCÍCIOS 10.5 Coordenadas Polares

5. $\left(4, \frac{1}{4}\pi\right)$ (a) $\left(-4, \frac{5}{4}\pi\right)$ (b) $\left(4, -\frac{7}{4}\pi\right)$ (c) $\left(-4, -\frac{3}{4}\pi\right)$

7. $\left(2, \frac{1}{2}\pi\right)$ (a) $\left(-2, \frac{3}{2}\pi\right)$ (b) $\left(2, -\frac{3}{2}\pi\right)$ (c) $\left(-2, -\frac{1}{2}\pi\right)$

9. $\left(\sqrt{2}, \frac{7}{4}\pi\right)$ (a) $\left(-\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi\right)$ (b) $\left(\sqrt{2}, -\frac{1}{4}\pi\right)$ (c) $\left(-\sqrt{2}, -\frac{5}{4}\pi\right)$

11. $\left(2, -\frac{1}{4}\pi\right)$ (a) $\left(-2, \frac{3}{4}\pi\right)$ (b) $\left(-2, -\frac{5}{4}\pi\right)$ (c) $\left(2, \frac{15}{4}\pi\right)$

13. $\left(3, -\frac{2}{3}\pi\right)$ (a) $\left(3, \frac{4}{3}\pi\right)$ (b) $\left(-3, \frac{1}{3}\pi\right)$ 15. $\left(-4, \frac{5}{6}\pi\right)$ (a) $\left(-4, -\frac{7}{6}\pi\right)$ (b) $\left(4, -\frac{1}{6}\pi\right)$

17. $\left(-2, -\frac{5}{4}\pi\right)$ (a) $\left(-2, \frac{3}{4}\pi\right)$ (b) $\left(2, \frac{7}{4}\pi\right)$ 19. $(2, 6)$ (a) $(2, 2\pi + 6)$ (b) $(-2, 6 - \pi)$

21. (a) $r = 3$ e $\theta = \pi$. $x = 3\cos\pi = -3$, $y = 3\,\text{sen}\,\pi = 0$

(b) $r = \sqrt{2}$ e $\theta = -\frac{3}{4}\pi$. $x = \sqrt{2}\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = -1$, $y = \sqrt{2}\,\text{sen}\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = -1$

(c) $r = -4$ e $\theta = \frac{2}{3}\pi$. $x = (-4)\cos\frac{2}{3}\pi = (-4)\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$, $y = (-4)\,\text{sen}\,\frac{2}{3}\pi = (-4)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = -2\sqrt{3}$

(d) $r = -1$ e $\theta = -\frac{7}{6}\pi$. $x = (-1)\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right) = (-1)\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $y = (-1)\,\text{sen}\left(-\frac{7}{6}\pi\right) = (-1)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

23. (a) $x = 1$ e $y = -1$. O ponto está no quarto quadrante. $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. $\operatorname{tg} \theta = -1$; $\theta = \frac{3}{4}\pi$.

(b) $x = -\sqrt{3}$ e $y = 1$. O ponto está no segundo quadrante. $r = \sqrt{3 + 1} = 2$. $\operatorname{tg} \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\theta = \frac{5}{6}\pi$.

(c) $x = 2$ e $y = 2$. O ponto está no primeiro quadrante. $r = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$. $\operatorname{tg} \theta = 1$; $\theta = \frac{1}{4}\pi$.

(d) $x = -5$ e $y = 0$. O ponto está no eixo x. $r = \sqrt{25 + 0} = 5$. $\operatorname{tg} \theta = 0$; $\theta = \pi$.

Nos Exercícios **25-43** usamos as fórmulas

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta, \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = y/x$$

25. $x^2 + y^2 = a^2$; $r^2 = a^2$; $r = \pm a$. Os gráficos de $r = a$ e $r = -a$ são idênticos. Assim, uma equação polar do gráfico é $r = |a|$.

27. $y^2 = 4(x + 1)$; $x^2 + y^2 = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$; $r^2 = (r \cos \theta + 2)^2$; $r = \pm(r \cos \theta + 2)$

Obtemos o gráfico inteiro, restringindo $r > 0$. Assim, uma equação polar do gráfico é

$$r - r \cos \theta = 2; \quad r = \frac{2}{1 - \cos \theta}$$

29. $x^2 = 6y - y^2$; $x^2 + y^2 = 6y$; $r^2 = 6r \operatorname{sen} \theta$. $r(r - 6 \operatorname{sen}\theta) = 0$; $r = 0$ e $r = 6 \operatorname{sen} \theta$. O gráfico de $r = 0$ é a origem. Ela está no gráfico de $r = 6 \operatorname{sen} \theta$, logo, dá o gráfico inteiro.

31. $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$; $(r^2)^2 = 4(r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta)$; $r^4 = 4r^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$; $r^4 = 4r^2\cos 2\theta$

O gráfico de $r = 0$ é a origem e ela está no gráfico de $r^2 = 4 \cos 2\theta$. Assim, o gráfico inteiro é dado por $r^2 = 4 \cos 2\theta$.

33. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$; $(r \cos \theta)^3 + (r \operatorname{sen} \theta)^3 - 3a(r \cos \theta)(r \operatorname{sen} \theta) = 0$

$$r = \frac{3a \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta}; \quad r = \frac{3a \operatorname{sen} 2\theta}{2(\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta)}$$

35. $r^2 = 2 \operatorname{sen} 2\theta$; $r^2 = 4 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$; $(r^2)^2 = 4(r \operatorname{sen} \theta)(r \cos \theta)$; $(x^2 + y^2)^2 = 4yx$

37. $r^2 = \cos \theta$; $r^3 = r \cos \theta$; $\pm(x^2 + y^2)^{3/2} = x$; $(x^2 + y^2)^3 = x^2$

39. $r^2 = \theta$; $x^2 + y^2 = \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x}$; $\operatorname{tg}(x^2 + y^2) = \frac{y}{x}$

41. $r \cos \theta = -1$; $x = -1$

43. $r = \frac{6}{2 - 3 \operatorname{sen} \theta}$; $r(2 - 3 \operatorname{sen} \theta) = 6$; $2r = 6 + 3r \operatorname{sen} \theta$; $\pm 2\sqrt{x^2 + y^2} = 6 + 3y$

$4(x^2 + y^2) = 36 + 36y + 9y^2$; $4x^2 - 5y^2 - 36y - 36 = 0$

EXERCÍCIOS 10.6 Gráficos de Equações em Coordenadas Polares

1. (a) $\theta = \frac{1}{3}\pi$. O gráfico é uma reta que passa pela origem, com inclinação $\operatorname{tg} \frac{1}{3}\pi = \sqrt{3}$.

   (b) $r = \frac{1}{3}\pi$. O gráfico é uma circunferência com centro na origem e raio $\frac{1}{3}\pi$.

3. (a) $\theta = 2$. O gráfico é uma reta que passa pela origem, com inclinação tg 2.

   (b) $r = 2$. O gráfico é uma circunferência com centro na origem e raio 2.

5. (a) $r \cos \theta = 4$; $x = 4$. O gráfico é uma reta paralela ao eixo $\frac{1}{2}\pi$ e está 4 unidades à sua direita.

   (b) $r = 4 \cos \theta$. O gráfico é uma circunferência com centro no ponto $(2, 0)$ e tangente ao eixo $\frac{1}{2}\pi$.

7. (a) $r \operatorname{sen} \theta = -4$; $y = -4$. O gráfico é uma reta paralela ao eixo polar e 4 unidades abaixo dele.

   (b) $r = -4 \operatorname{sen} \theta$. O gráfico é uma circunferência com centro no ponto $(2, \frac{3}{2}\pi)$ e tangente ao eixo polar.

9. $r = 4 - 4 \cos \theta$. A equação é da forma $r = a - b \cos \theta$, onde $a = b$. Portanto, o gráfico é uma cardióide. Veja a **Fig. 10.6.9.**

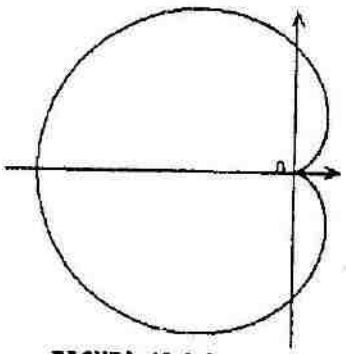


FIGURA 10.6.9

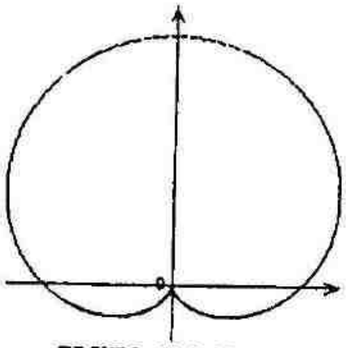


FIGURA 10.6.11

11. $r = 2 + 2 \operatorname{sen} \theta$. A equação é da forma $r = a + b \operatorname{sen} \theta$, onde $a = b$. Portanto, o gráfico é uma cardióide. Veja a **FIGURA 10.6.11.**

13. $r = 2 - 3 \operatorname{sen} \theta$. A equação é da forma $r = a - b \operatorname{sen} \theta$, onde $0 < a/b < 1$. Portanto, o gráfico é uma *limaçon* com um laço. Veja a Figura **10.6.13.**

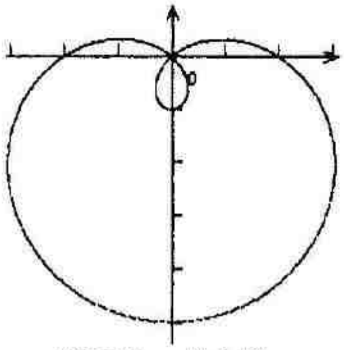


FIGURA 10.6.13

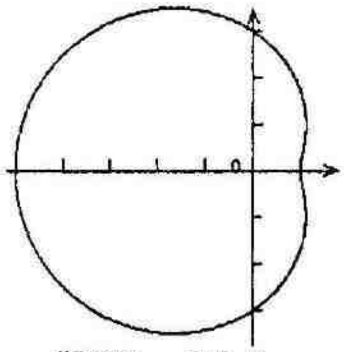


FIGURA 10.6.15

15. $r = 3 - 2 \cos \theta$. A equação é da forma $r = a - b \cos \theta$, onde $1 < a/b < 2$. Portanto, o gráfico é uma *limaçon* com um dente. Veja a Figura **10.6.15.**

17. $r = 4 + 2 \operatorname{sen} \theta$. A equação é da forma $r = a + b \operatorname{sen} \theta$, onde $a/b \geq 2$. Portanto, o gráfico é uma *limaçon* convexa. Veja a Figura **10.6.17.**

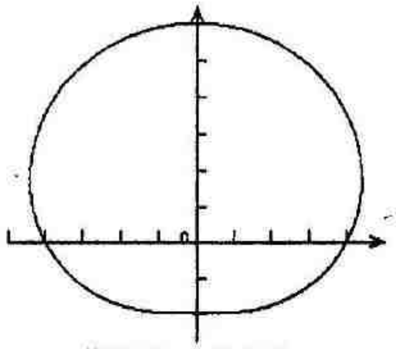


FIGURA 10.6.17

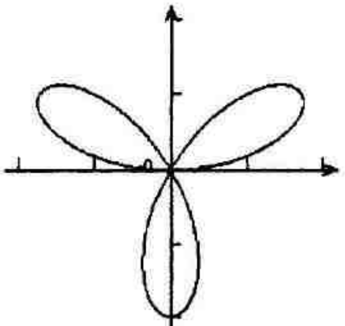


FIGURA 10.6.19

19. $r = 2 \operatorname{sen} 3\theta$. A equação é da forma $r = a \operatorname{sen} n\theta$, onde n é ímpar. Portanto, o gráfico é uma rosácea de três folhas. Veja a Figura **10.6.19.**

21. $r = 2 \cos 4\theta$. A equação é da forma $r = a \cos n\theta$, onde n é par. Portanto, o gráfico é uma rosácea de oito folhas. Veja a Figura **10.6.21.**

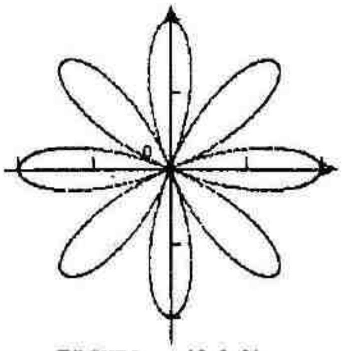


FIGURA 10.6.21

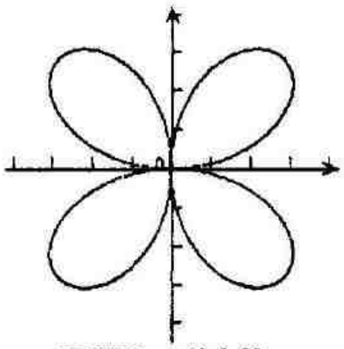


FIGURA 10.6.23

23. $r = 4 \operatorname{sen} 2\theta$. A equação é da forma $r = a \operatorname{sen} n\theta$, onde n é par. Portanto, o gráfico é uma rosácea de quatro folhas. Veja a Figura **10.6.23.**

25. $r = e^{\theta}$. O gráfico é uma espiral logarítmica. Veja a Figura 10.6.25.

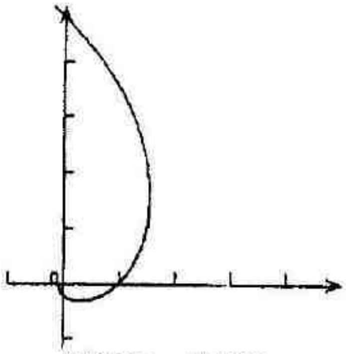


FIGURA 10.6.25

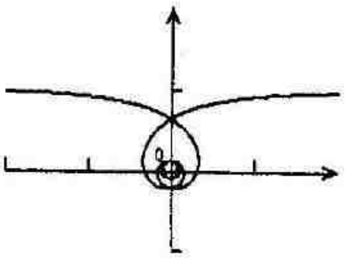


FIGURA 10.6.27

27. $r = \frac{1}{\theta}$. O gráfico é uma espiral recíproca. Veja a Figura 10.6.27.

29. $r^2 = 9 \operatorname{sen} 2\theta$. O gráfico é uma *lemniscata* situada no primeiro e terceiro quadrantes, e consiste em dois laços. O gráfico é simétrico com relação à origem e à reta $\theta = \frac{1}{4}\pi$. O gráfico inteiro é obtido, tomando $0 \le \theta \le \frac{1}{2}\pi$. Para cada θ no intervalo fechado $(0, \frac{1}{2}\pi)$, há dois valores de r, pois $r = \pm 3\sqrt{\operatorname{sen} 2\theta}$. Veja a Figura 10.6.29.

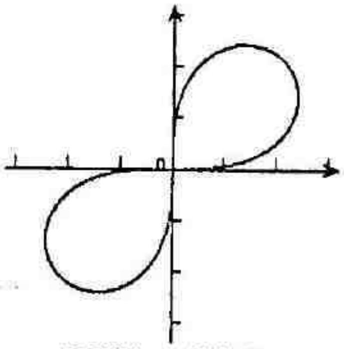


FIGURA 10.6.29

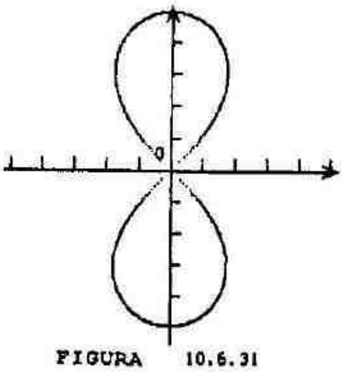


FIGURA 10.6.31

31. $r^2 = -25 \cos 2\theta$. O gráfico é uma *lemniscata* que consiste em dois laços, sendo simétrico em relação à origem e também ao eixo polar e ao eixo $\frac{1}{2}\pi$. Um laço está acima do eixo polar e o outro está abaixo dele. O gráfico inteiro é obtido, tomando $\frac{1}{4} \le \theta \le \frac{3}{4}\pi$. Para cada θ no intervalo aberto, há dois valores de r, pois $r = \pm 5\sqrt{-\cos 2\theta}$. Veja a Figura 10.6.31.

33. $r = 2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{tg} \theta = \dfrac{2 \operatorname{sen}^2 \theta}{\cos \theta}$; $r^2 = \dfrac{2r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{r \cos \theta}$

$x^2 + y^2 = \dfrac{2y^2}{x}$; $x^3 + xy^2 = 2y^2$; $y^2 = \dfrac{x^3}{2 - x}$, $x \in [0, 2)$

O gráfico é simétrico em relação ao eixo x.

A reta $x = 2$ é uma assíntota vertical do gráfico.

Veja a Figura 10.6.33.

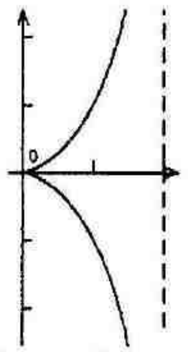


FIGURA 10.6.33

35. $r = |\operatorname{sen} 2\theta|$. Essa equação é equivalente às duas equações, $r = \operatorname{sen} 2\theta$ e $r = -\operatorname{sen} 2\theta$. A primeira equação é da forma $r = a \operatorname{sen} n\theta$, onde n é par. Assim, o gráfico é uma rosácea de quatro folhas. A equação $r = -\operatorname{sen} 2\theta$ é equivalente à equação $r = \operatorname{sen}(-2\theta)$. Portanto, seu gráfico é o mesmo que o gráfico de $r = \operatorname{sen} 2\theta$.

37. As equações dadas são circunferências $r = \frac{3}{2}$ e $r = 3 \operatorname{sen} \theta$. Resolvendo as duas equações simultaneamente, temos $3 \operatorname{sen} \theta = \frac{3}{2}$ ou $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}$. Portanto, obtemos os pontos de intersecção $(\frac{3}{2}, \frac{1}{6}\pi)$ e $(\frac{3}{2}, \frac{5}{6}\pi)$. Como os gráficos são ambos circunferências, não podem se interceptar em mais do que dois pontos.

39. As equações dadas são as circunferências $r = 2 \cos \theta$ e $r = 2 \operatorname{sen} \theta$. Dividindo os membros correspondentes das duas equações, obtemos $\dfrac{2 \operatorname{sen} \theta}{2 \cos \theta} = \dfrac{r}{r}$; $\operatorname{tg} \theta = 1$. Logo, $\theta = \frac{1}{4}\pi$ e $\frac{5}{4}\pi$. Substituindo esses valores de θ em uma das duas equações dadas, obtemos os valores correspondentes de r. Então, temos os pontos de intersecção: $(\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi)$ e $(-\sqrt{2}, \frac{5}{4}\pi)$, que são o mesmo ponto. A origem situa-se no gráfico de $r = 2 \cos \theta$, pois $r = 0$ qdo. $\theta = \frac{1}{2}\pi$. A origem também fica no gráfico de $r = 2 \operatorname{sen} \theta$, pois $r = 0$ qdo. $\theta = 0$. Assim, as duas curvas interceptam-se na origem. Como os gráficos são ambos circunferências, não podem se interceptar em mais do que dois pontos.

Nota: Como as coordenadas de qualquer ponto de intersecção devem ter uma forma que satisfaça a primeira das equações dadas, para achar os pontos de intersecção precisamos apenas aplicar a equação (10) à segunda equação dada. Ou então, podemos aplicar a equação (10) apenas à primeira. Além disso, se os argumentos forem múltiplos inteiros de θ, precisamos apenas considerar $n=0$ (a forma dada) e $n=1$.

41. As equações dadas são a espiral $r = 4\theta$ e a circunferência $r = \frac{1}{2}\pi$. Resolvendo essas equações simultaneamente, obtemos $4\theta = \frac{1}{2}\pi$; $\theta = \frac{1}{8}\pi$. Logo, obtemos o ponto de intersecção $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{8}\pi)$. A origem não é um ponto de intersecção, pois não está no gráfico de $r = \frac{1}{2}\pi$. Outra forma da equação $r = \frac{1}{2}\theta$ é $r = -\frac{1}{2}\theta$. Se essa equação for resolvida simultaneamente com $r = 4\theta$, obtemos o ponto $(-\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{8}\pi)$ que é o mesmo ponto que $(\frac{1}{2}\pi, \frac{7}{8}\pi)$.

43. As equações dadas são $r = \text{tg}\,\theta$ e a circunferência $r = 4\,\text{sen}\,\theta$.

Resolvendo essas equações simultaneamente, temos

$\text{tg}\,\theta = 4\,\text{sen}\,\theta$; $\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = 4\,\text{sen}\,\theta$; $\text{sen}\,\theta = 0$; logo $\theta = 0$, π; ou $\frac{1}{\cos\theta} = 4$; qdo. $\theta = \cos^{-1}\frac{1}{4}$, $-\cos^{-1}\frac{1}{4}$.

Qdo. $\theta = 0$ ou π, $r = 0$. Portanto, a origem é um ponto de intersecção. Qdo. $\theta = \cos^{-1}\frac{1}{4}$, $r = \sqrt{15}$. Assim, $(\sqrt{15}, \cos^{-1}\frac{1}{4})$ é um ponto de intersecção. Qdo. $\theta = -\cos^{-1}\frac{1}{4}$, $r = -\sqrt{15}$. Logo, temos o ponto $(-\sqrt{15}, -\cos^{-1}\frac{1}{4})$ ou, equivalentemente, $(\sqrt{15}, \pi - \cos^{-1}\frac{1}{4})$ como um ponto de intersecção. Os mesmos pontos de intersecção são obtidos, resolvendo simultaneamente as outras formas das equações.

45. As equações dadas são a circunferência $r = 3$ e a cardióide $r = 2(1 + \cos\theta)$.

Resolvendo as equações simultaneamente, temos

$$2 + 2\cos\theta = 3;\quad \cos\theta = \tfrac{1}{2}.\quad \theta = \tfrac{1}{3}\pi, -\tfrac{1}{3}\pi$$

Assim, temos os pontos de intersecção $(3, \frac{1}{3}\pi)$ e $(3, -\frac{1}{3}\pi)$. Os mesmos pontos de intersecção são obtidos, resolvendo simultaneamente as outras formas das equações dadas.

47. As equações dadas são a hipérbole $r^2\,\text{sen}\,2\theta = 8$; $2(r\,\text{sen}\,\theta)(r\cos\theta) = 8$; $2yx = 8$; $xy = 4$ e a reta $r\cos\theta = 2$; $x = 2$. Logo, $y = 2$ e o ponto de intersecção é $(2\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi)$.

49. As equações dadas são a cardióide $r = \cos\theta - 1$ e a rosácea de quatro folhas $r = \cos 2\theta$.

Resolvendo as duas equações simultaneamente, temos

$$\cos 2\theta = \cos\theta - 1;\quad 2\cos^2\theta - 1 = \cos\theta - 1;\quad 2\cos^2\theta = \cos\theta$$

$$\cos\theta = 0;\ \text{logo}\ \theta = \frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi;\ \text{ou}\ 2\cos\theta = 1;\ \text{logo}\ \theta = \frac{1}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$$

Portanto, obtemos os pontos $\left(-1, \frac{1}{2}\pi\right)$, $\left(-1, \frac{3}{2}\pi\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\pi\right)$, e $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{3}\pi\right)$ que são os mesmos pontos $\left(1, \frac{3}{2}\pi\right)$, $\left(1, \frac{1}{2}\pi\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\pi\right)$, e $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\pi\right)$, respectivamente. A origem está no gráfico de $r = \cos\theta - 1$, pois $r = 0$ qdo. $\theta = 0$. A origem também está no gráfico $r = \cos 2\theta$, pois $r = 0$ qdo. $\theta = \frac{1}{4}\pi$. Portanto, as duas curvas interceptam-se na origem. Outra forma de $r = \cos\theta - 1$ é $-r = \cos(\theta + \pi) - 1$ ou, equivalentemente, $r = \cos\theta + 1$. Resolvendo simultaneamente com $r = \cos 2\theta$, temos

$$\cos 2\theta = \cos\theta + 1;\quad 2\cos^2\theta - 1 = \cos\theta + 1;\quad 2\cos^2\theta - \cos\theta - 2 = 0;\quad \cos\theta = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$\cos\theta = 1{,}28$; logo, não há valores de θ; ou $\cos\theta = -0{,}78$ logo $\theta = \cos^{-1}(-0{,}78) = 2{,}47$, $\theta = 2\pi - \cos^{-1}(-0{,}78) = 3{,}82)$. Assim, temos os pontos $(0{,}22; 2{,}47)$ e $(0{,}22; 3{,}82)$.

51. As equações dadas são as rosáceas de quatro folhas $r = \text{sen}\, 2\theta$ e $r = \cos 2\theta$.

Dividindo os membros correspondentes das duas equações, obtemos

$$\text{tg}\, 2\theta = 1; \text{logo}\ 2\theta = \tfrac{1}{4}(2n+1)\pi; \quad \theta = \tfrac{1}{8}(2n+1)\pi, \quad \text{onde } n = 0, 1, \ldots, 7$$

Então, obtemos os pontos $(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \tfrac{1}{8}(2n+1)\pi)$, onde $n = 0, 1, \ldots, 7$. A origem está no gráfico de $r = \text{sen}\, 2\theta$ pois $r = 0$ qdo $\theta = 0$. A origem também está no gráfico de $r = \cos 2\theta$ pois $r = 0$ qdo $\theta = \tfrac{1}{4}\pi$. Os mesmos pontos de intersecção são obtidos das outras formas das equações dadas.

53. Se o ponto $P(r, \theta)$ for um ponto sobre o gráfico de uma equação, então o gráfico será simétrico em relação ao eixo $\tfrac{1}{2}\pi$ se houver um ponto $P_1(r_1, \theta_1)$ no gráfico, tal que o eixo $\tfrac{1}{2}\pi$ seja uma *mediatriz perpendicular* ao segmento de reta P_1P. Então, se $r_1 = r$, então, θ_1 deve se igualar a $\pi - \theta + 2n\pi$. E se $r_1 = -r$, então, θ_1 deve se igualar a $-\theta + 2n\pi$.

55. Primeiro obtemos outras equações para a curva com a equação dada $r = \text{sen}\, \tfrac{3}{2}\theta$. (1)

Consideramos as equações da forma $(-1)^n r = \text{sen}\, \tfrac{3}{2}(\theta + n\pi)$, onde n é um inteiro.

Qdo $n = 1$, temos $(-1) \cdot r = \text{sen}\, \tfrac{3}{2}(\theta + \pi)$ ou, equivalentemente, $r = \cos \tfrac{3}{2}\theta$. (2)

Qdo $n = 2$, temos $(-1)^2 \cdot r = \text{sen}\, \tfrac{3}{2}(\theta + 2\pi)$ ou, equivalentemente, $r = -\text{sen}\, \tfrac{3}{2}\theta$. (3)

Qdo $n = 3$, temos $(-1)^3 \cdot r = \text{sen}\, \tfrac{3}{2}(\theta + 3\pi)$ ou, equivalentemente $r = -\cos \tfrac{3}{2}\theta$. (4)

Qdo $n = 4$, temos $(-1)^4 \cdot r = \text{sen}\, \tfrac{3}{2}(\theta + 4\pi)$ ou, equivalentemente, a equação (1).

As equações de (1) a (4) são as equações possíveis da curva dada. Resolvendo as equações (1) e (2) simultaneamente, obtemos $\theta = \frac{1}{6}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$, e $\frac{9}{6}\pi$. Resolvendo as equações (1) e (3) simultaneamente, obtemos a origem. Resolvendo as equações (1) e (4) simultaneamente, obtemos $\theta = \frac{3}{6}\pi$, $\frac{7}{6}\pi$, e $\frac{11}{6}\pi$. Logo, os valores possíveis de θ são $\frac{1}{6}(2n+1)\pi$ onde $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Para cada um desses valores de θ $r = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$. Os pontos de intersecção são, portanto, a origem e $(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \tfrac{1}{6}(2n+1)\pi)$, onde $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

EXERCÍCIOS 10.7 Área de uma Região em Coordenadas Polares

Nestes Exercícios, A unidades de área é a área pedida.

1. O gráfico da equação $r = 3\cos\theta$ é uma circunferência. Obtemos a região limitada por uma semicircunferência se $\theta \in [0, \frac{1}{2}\pi]$.

$$A = 2\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(3\cos\xi_i)^2\Delta_i\theta = 9\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta = 9\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \frac{9}{2}\theta + \frac{9}{4}\operatorname{sen} 2\theta\Big]_0^{\pi/2} = \frac{9}{4}\pi$$

3. O gráfico da equação $r = 4\cos 3\theta$ é uma rosácea de três folhas. Obtemos a região limitada por metade de uma folha se $\theta \in [0, \frac{1}{6}\pi]$.

$$A = 6\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(4\cos 3\xi_i)^2\Delta_i\theta = 48\int_0^{\pi/6}\cos^2 3\theta\,d\theta = 24\int_0^{\pi/6}(1+\cos 6\theta)\,d\theta = 24\left[\theta + \frac{1}{6}\operatorname{sen} 6\theta\right]_0^{\pi/6} = 4\pi$$

5. O gráfico da equação $r^2 = 4\operatorname{sen} 2\theta$ é uma *lemniscata*. Obtemos a região limitada por metade de um dos dois laços de $\theta \in [0, \frac{1}{4}\pi]$.

$$A = 4\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(4\operatorname{sen} 2\xi_i)\Delta_i\theta = 8\int_0^{\pi/4}\operatorname{sen} 2\theta\,d\theta = -4\cos 2\theta\Big]_0^{\pi/4} = -4(0-1) = 4$$

7. $$A = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}8\xi_i)^2\Delta_i\theta = \frac{1}{2}\int_0^{3\pi/2}\theta^2\,d\theta = \frac{1}{6}\theta^3\Big]_0^{3\pi/2} = \frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}\pi\right)^3 = \frac{9}{16}\pi^3$$

9. O gráfico da equação $r = 3\cos 2\theta$ é uma rosácea de quatro folhas. Obtemos a região limitada por metade de uma folha se $\theta \in [0, \frac{1}{4}\pi]$.

$$A = 2\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(3\cos 2\xi_i)^2\Delta_i\theta = 9\int_0^{\pi/4}\cos^2 2\theta\,d\theta = 9\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 4\theta}{2}\,d\theta = \frac{9}{2}\theta + \frac{9}{8}\operatorname{sen} 4\theta\Big]_0^{\pi/4} = \frac{9}{8}\pi$$

11. O gráfico da equação $r = 1 + 3\operatorname{sen}\theta$ é uma *limaçon* com um laço. O gráfico é simétrico em relação ao eixo $\frac{1}{2}\pi$. Obtemos a região limitada por metade do laço se $\theta \in [-\frac{1}{2}\pi, b]$, onde $\operatorname{sen} b = -\frac{1}{3}$, $\cos b = \frac{2}{3}\sqrt{2}$, e $b = \operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$.

$$A = 2\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(1+3\operatorname{sen}\xi_i)^2\Delta_i\theta = \int_{-\pi/2}^{b}(1+3\operatorname{sen}\theta)^2\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{b}(1+6\operatorname{sen}\theta+9\operatorname{sen}^2\theta)\,d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{b}\left(1+6\operatorname{sen}\theta+\frac{9}{2}-\frac{9}{2}\cos 2\theta\right)d\theta = \frac{11}{2}\theta - 6\cos\theta - \frac{9}{4}\operatorname{sen} 2\theta\Big]_{-\pi/2}^{b}$$

$$= \frac{11}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) - 6\left(\frac{2}{3}\sqrt{2}\right) - \frac{9}{2}(2)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\sqrt{2}\right) + \frac{11}{4}\pi = \frac{11}{4}\pi - \frac{11}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{3} - 3\sqrt{2}$$

13. As equações dadas são a circunferência $r = 2$ e a *limaçon* com um dente $r = 3 - 2\cos\theta$. Resolvendo as duas equações simultaneamente, obtemos $3 - 2\cos\theta = 2$; $\cos\theta = \frac{1}{2}$; logo $\theta = \frac{1}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$. Portanto, os pontos de intersecção são $(2, \frac{1}{3}\pi)$ e $(2, \frac{5}{3}\pi)$. Obtemos a metade da área pedida se $\theta \in [0, \frac{1}{3}\pi]$ para a *limaçon* e $\theta \in [\frac{1}{3}\pi, \pi]$ para a circunferência.

$$A = 2\left[\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(3-2\cos\xi_i)^2\Delta_i\theta + \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(2)^2\Delta_i\theta\right] = \int_0^{\pi/3}(9-12\cos\theta+4\cos^2\theta)\,d\theta + 4\int_{\pi/3}^{\pi}d\theta$$

$$= \left[9\theta - 12\operatorname{sen}\theta + 4\int\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta\right]_0^{\pi/3} + 4\theta\Big]_{\pi/3}^{\pi} = 9\theta - 12\operatorname{sen}\theta + 2\theta + \operatorname{sen} 2\theta\Big]_0^{\pi/2} + \left(4\pi - \frac{4}{3}\pi\right)$$

$$= \left[\frac{11}{3}\pi - 12\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right] + \frac{8}{3}\pi = \frac{19}{3}\pi - \frac{11}{2}\sqrt{3}$$

15. As equações dadas são as rosáceas de quatro folhas $r = 3 \operatorname{sen} 2\theta$ e $r = 3 \cos 2\theta$. Obtemos um oitavo da área $\theta \in [0, \frac{1}{8}\pi]$ para o primeiro gráfico e $\theta \in [\frac{1}{8}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ para o segundo.

$$A = 8\left[\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(3 \operatorname{sen} 2\xi_i)^2 \Delta_i\theta + \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(3 \cos 2\xi_i)^2 \Delta_i\theta\right] = 4\int_0^{\pi/8} 9 \operatorname{sen}^2 2\theta \, d\theta + 4\int_{\pi/8}^{\pi/4} 9 \cos^2 2\theta \, d\theta$$

$$= 18\int_0^{\pi/8}(1 - \cos 4\theta)\,d\theta + 18\int_{\pi/8}^{\pi/4}(1 + \cos 4\theta)\,d\theta = 18\left[\theta - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4\theta\right]_0^{\pi/8} + 18\left[\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4\theta\right]_{\pi/8}^{\pi/4}$$

$$= 18\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) + 18\left(\frac{\pi}{4} + 0 - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{4}\pi - \frac{9}{2} + \frac{9}{2}\pi - \frac{9}{4}\pi - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}\pi - 9$$

17. As equações dadas são a circunferência $r = a$ e a cardióide $r = a(1 - \cos\theta)$. Cada grupo é simétrico em relação ao eixo polar. Obtemos a metade da área pedida se $\theta \in [0, \frac{1}{2}\pi]$.

$$A = 2\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}[a^2 - a^2(1 - \cos\xi_i)^2]\Delta_i\theta = \int_0^{\pi/2}[a^2 - a^2(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)]\,d\theta$$

$$= a^2\int_0^{\pi/2}\left(2\cos\theta - \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right)d\theta = a^2\left[2 \operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\cos 2\theta\right]_0^{\pi/2} = a^2(2 - \tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}) = a^2(2 - \tfrac{1}{4}\pi)$$

19. As equações dadas são a circunferência $r = 2 \operatorname{sen}\theta$ com centro em $(1, \frac{1}{2}\pi)$ e raio 1, e a circunferência $r = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$ com centro em $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi)$ e raio $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. As duas circunferências interceptam-se na origem e em $P = (\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi)$. A região pedida é aquela limitada pela primeira circunferência, exceto para duas regiões, uma das quais é a metade da região limitada pela segunda circunferência e a outra é um segmento da primeira circunferência formada pelo diâmetro da segunda circunferência, da origem até P. Veja a Figura 10.7.19.

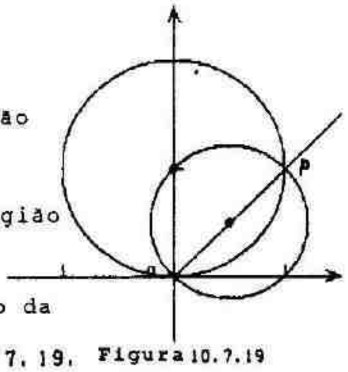


Figura 10.7.19

$$A = \pi - \left[\frac{1}{4}\pi + \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(2 \operatorname{sen}\xi_i)^2 \Delta_i\theta\right] = \pi - \frac{1}{4}\pi - 2\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^2\theta \, d\theta = \frac{3}{4}\pi - \int_0^{\pi/4}(1 - \cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{3}{4}\pi - \left[\theta - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{\pi/4} = \frac{3}{4}\pi - \left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(\pi + 1)$$

21. As equações dadas são a cardióide $r = a(1 + \cos\theta)$ e a circunferência $r = 2a\cos\theta$ de raio a. A circunferência está contida na cardióide. A metade superior da cardióide é obtida se $\theta \in [0, \pi]$ e a metade superior da circunferência é obtida se $\theta \in [0, \frac{1}{2}\pi]$.

$$A = 2\left[\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(a + a\cos\xi_i)^2 \Delta_i\theta - \frac{1}{2}\pi a^2\right] = a^2\int_0^{\pi}(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta - \pi a^2$$

$$= a^2\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta - \pi a^2 = a^2\left[\frac{3}{2}\theta + 2\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{\pi} - \pi a^2 = \frac{3}{2}\pi a^2 - \pi a^2 = \frac{1}{2}\pi a^2$$

23. Obtemos um quarto da área da armação de um óculos qdo $\theta \in [0, \frac{1}{4}\pi]$.

$$A = 4\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(4\cos 2\xi_i)\Delta_i\theta = 8\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta \, d\theta = 4 \operatorname{sen} 2\theta\Big]_0^{\pi/4} = 4$$

25. A espiral dada tem a equação $r = a\theta$. Se o raio vetor varre uma região com A_3 unidades de área durante sua terceira revolução qdo $\theta \in [4\pi, 6\pi]$ e A_2 unidades de área durante a sua segunda revolução qdo $\theta \in [2\pi, 4\pi]$, então

$$A = A_3 - A_2 = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(a\xi_i)^2 \Delta_i\theta - \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(a\xi_i)^2 \Delta_i\theta = \frac{1}{2}a^2\int_{4\pi}^{6\pi} \theta^2 d\theta - \frac{1}{2}a^2\int_{2\pi}^{4\pi} \theta^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{6}a^2\theta^3\Big]_{4\pi}^{6\pi} - \frac{1}{6}a^2\theta^3\Big]_{2\pi}^{4\pi} = \frac{1}{6}a^2(216\pi^3 - 64\pi^3 - 64\pi^3 + 8\pi^3) = 16a^2\pi^3$$

EXERCÍCIOS 10.8 Um Tratamento Unificado de Secções Cônicas e Equações Polares das Cônicas

1. (a) $4x^2 + 9y^2 = 36$; $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Elipse. $a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$. Portanto, $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}\sqrt{5}$. Como $\frac{a}{e} = \frac{9}{\sqrt{5}} = \frac{9}{5}\sqrt{5}$, as diretrizes correspondentes aos focos em $(\sqrt{5}, 0)$ e $(-\sqrt{5}, 0)$ têm, respectivamente, as equações $x = \frac{9}{5}\sqrt{5}$ e $x = -\frac{9}{5}\sqrt{5}$.

3. (a) $25x^2 + 4y^2 = 100$; $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$. Elipse. $a = 5$, $b = 4$, $c = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$. Logo, $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{5}\sqrt{21}$. Como $\frac{a}{e} = \frac{25}{\sqrt{21}} = \frac{25}{21}\sqrt{21}$, as diretrizes correspondentes aos focos em $(0, \sqrt{21})$ e $(0, -\sqrt{21})$ têm respectivamente , as equações $y = \frac{25}{21}\sqrt{21}$ e $y = -\frac{25}{21}\sqrt{21}$.

5. (a) $4x^2 - 25y^2 = 100$; $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$. Hipérbole $a = 5$, $b = 2$, $c = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$. Assim, $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{5}\sqrt{29}$. Como $\frac{a}{e} = \frac{25}{\sqrt{29}} = \frac{25}{29}\sqrt{29}$, as diretrizes correspondentes aos focos em $(\sqrt{29}, 0)$ e $(-\sqrt{29}, 0)$ têm, respectivamente, as equações $x = \frac{25}{29}\sqrt{29}$ e $x = -\frac{25}{29}\sqrt{29}$.

7. (a) $16x^2 - 9y^2 = 144$; $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Hipérbole $a = 3$, $b = 4$, $c = \sqrt{9+16} = 5$. Portanto, $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$. Como $\frac{a}{e} = \frac{9}{5}$, então, as diretrizes correspondentes aos focos em $(5, 0)$ e $(-5, 0)$ têm, respectivamente, as equações $x = \frac{9}{5}$ e $x = -\frac{9}{5}$.

9. (a) $r = \frac{3}{1 - \cos\theta}$ é da forma $r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}$ com $e = 1$. A cônica é uma parábola.

(b) $r = \frac{6}{4 + 5\,\text{sen}\,\theta} = \frac{3/2}{1 + 5/4\,\text{sen}\,\theta} = \frac{ed}{1 + e\,\text{sen}\,\theta}$ com $e = \frac{5}{4} > 1$. A cônica é uma hipérbole.

(c) $r = \frac{5}{4 - \cos\theta} = \frac{5/4}{1 - 1/4\cos\theta} = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}$ com $e = \frac{1}{4} < 1$. A cônica é uma elipse.

(d) $r = \frac{4}{1 + \text{sen}\,\pi} = \frac{4}{1 + 0} = 4$. A cônica é uma circunferência com centro na origem e raio 4.

Nota: Para a cônica $r = \frac{a}{b \pm c \operatorname{sen} \theta} = \frac{a/b}{1 \pm (c/b) \operatorname{sen} \theta}$, $ed = \frac{a}{b}$ e $e = \frac{c}{b}$; de modo que $d = \frac{a}{c}$.

11. $r = \frac{2}{1 - \cos \theta} = \frac{ed}{1 - e \cos \theta}$ com $e = 1$ e $d = \frac{2}{1} = 2$. A cônica é uma parábola. A diretriz está à esquerda do foco na origem. Sua equação é $r \cos \theta = -2$.

13. $r = \frac{5}{2 + \operatorname{sen} \theta} = \frac{5/2}{1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta} = \frac{ed}{1 + e \operatorname{sen} \theta}$ com $e = \frac{1}{2} < 1$ e $d = \frac{5}{1} = 5$. A cônica é uma elipse. A diretriz está acima do foco na origem; sua equação é $r \operatorname{sen} \theta = 5$.

15. $r = \frac{6}{3 - 2 \cos \theta} = \frac{2}{1 - \frac{2}{3} \cos \theta} = \frac{ed}{1 - e \cos \theta}$ com $e = \frac{2}{3}$ e $d = \frac{6}{2} = 3$. A cônica é uma elipse. A diretriz está à esquerda do foco na origem; sua equação é $r \cos \theta = -3$.

17. $r = \frac{9}{5 - 6 \operatorname{sen} \theta} = \frac{9/5}{1 - \frac{6}{5} \operatorname{sen} \theta} = \frac{ed}{1 - e \operatorname{sen} \theta}$ com $e = \frac{6}{5} > 1$ e $d = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$. A cônica é uma hipérbole. A diretriz está abaixo do foco na origem; sua equação é $r \operatorname{sen} \theta = -\frac{3}{2}$.

19. $r = \frac{10}{7 - 2 \operatorname{sen} \theta} = \frac{10/7}{1 - \frac{2}{7} \operatorname{sen} \theta} = \frac{ed}{1 - e \operatorname{sen} \theta}$ com $e = \frac{2}{7} < 1$ e $d = \frac{10}{2} = 5$. A cônica é uma elipse. A diretriz está abaixo do foco na origem; sua equação é $r \operatorname{sen} \theta = -5$.

21. $r = \frac{10}{4 + 5 \cos \theta} = \frac{5/2}{1 + \frac{5}{4} \cos \theta} = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$ com $e = \frac{5}{4} > 1$ e $d = \frac{10}{5} = 2$. A cônica é uma hipérbole. A diretriz está à direita do foco na origem; sua equação é $r \cos \theta = 2$.

23. Uma parábola tem seu foco na origem e seu vértice em $(4, \frac{3}{2}\pi)$. Como a cônica é uma parábola, $e = 1$. A distância não-orientada entre o foco e o vértice é $\frac{1}{2}d = 4$; $d = 8$. Como a diretriz está abaixo do foco na origem, a equação da cônica é da forma $r = \frac{ed}{1 - e \operatorname{sen} \theta}$. Assim, temos $r = \frac{8}{1 - \operatorname{sen} \theta}$.

25. Uma hipérbole tem seu foco na origem $e = \frac{4}{3}$, e $r \cos \theta = 9$ é a diretriz correspondente ao foco na origem; logo, $d = 9$. Como a diretriz está à direita do foco na origem, a equação tem a forma $r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$. Assim, $r = \frac{\frac{4}{3}(9)}{1 + \frac{4}{3} \cos \theta} = \frac{36}{3 + 4 \cos \theta}$.

27. Uma elipse tem seu foco na origem e vértices em $(3, 0) = \left(\frac{ed}{1 - e}, 0\right)$ e $(1, \pi) = \left(\frac{ed}{1 + e}, \pi\right)$. Portanto, $\frac{ed}{1 - e} = 3$ e $\frac{ed}{1 + e} = 1$. Dividindo a primeira equação pela segunda temos $\frac{1 + e}{1 - e} = 3$. Assim, $e = \frac{1}{2}$ e $d = 3$. Como a diretriz está à esquerda do foco na origem, uma equação da elipse é da forma $r = \frac{ed}{1 - e \cos \theta}$. Então, $r = \frac{\frac{1}{2}(3)}{1 - \frac{1}{2} \cos \theta} = \frac{3}{2 - \cos \theta}$.

29. (a) Uma equação de uma hipérbole com um foco na origem e a diretriz correspondente à esquerda do foco é da forma $r = \dfrac{ed}{1 - e\cos\theta}$. Como $e = 3$, temos $r = \dfrac{3d}{1 - 3\cos\theta}$. Como o ponto $(2, \frac{2}{3}\pi)$ está na hipérbole,

$$2 = \frac{3d}{1 - 3\cos\frac{2}{3}\pi} = \frac{3d}{1 - 3(-\frac{1}{2})};\quad 3d = 5;\quad d = \frac{5}{3}$$

Portanto, uma equação da hipérbole é $r = \dfrac{5}{1 - 3\cos\theta}$.

(b) Uma equação da diretriz correspondente ao foco na origem é da forma $r\cos\theta = -d$. Assim, temos $r\cos\theta = -\frac{5}{3}$.

31. A unidades é a área dentro da elipse $r = 6/(2 - \operatorname{sen}\theta)$ e acima da parábola $r = 3/(1 + \operatorname{sen}\theta)$. As duas curvas interceptam-se nos pontos $(3, 0)$ e $(3, \pi)$ e cada uma delas é simétrica em relação ao eixo $\frac{1}{2}\pi$. Então,

$$A = 2\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{6}{2 - \operatorname{sen}\xi_i}\right)^2 - \left(\frac{3}{1 + \operatorname{sen}\xi_i}\right)^2\right]\Delta_i\theta = \int_0^{\pi/2}\left[\left(\frac{6}{2 - \operatorname{sen}\theta}\right)^2 - \left(\frac{3}{1 + \operatorname{sen}\theta}\right)^2\right]d\theta$$

Como é mais fácil integrar os co-senos, seja $\theta = \frac{1}{2}\pi - x$, $\operatorname{sen}\theta = \cos x$. Portanto,

$A = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\left[\frac{36}{(2 - \cos x)^2} - \frac{9}{(1 + \cos x)^2}\right]dx$. Agora seja $z = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta$ logo $\cos\theta = \dfrac{1 - z^2}{1 + z^2}$ e $d\theta = \dfrac{2\,dz}{1 + z^2}$. Assim,

$$A = \int_0\left[\frac{36\cdot\frac{2}{1 + z^2}}{\left(2 - \frac{1 - z^2}{1 + z^2}\right)^2} - \frac{9\cdot\frac{2}{1 + z^2}}{\left(1 + \frac{1 - z^2}{1 + z^2}\right)^2}\right]dz = 72\int_0^1\frac{1 + z^2}{(3z^2 + 1)^2}\,dz - \frac{9}{2}\int_0^1(1 + z^2)\,dz = I - J$$

Em I, seja $z = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,\operatorname{tg} u$. Então, $dz = \frac{1}{3}\sqrt{3}\sec^2 u\,du$, e $u = \frac{1}{3}\pi$ qdo $z = 1$. Logo,

$$I = 72\int_0^{\pi/3}\frac{1 + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^2 u}{\sec^4 u}\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\sec^2 u\,du\right) = 24\sqrt{3}\int_0^{\pi/3}\left(\cos^2 u + \frac{1}{3}\operatorname{sen}^2 u\right)du$$

$$= 24\sqrt{3}\int_0^{\pi/3}\left[\frac{1 + \cos 2u}{2} + \frac{1 - \cos 2u}{6}\right]du = 4\sqrt{3}\int_0^{\pi/3}(4 + 2\cos 2u)\,du = 4\sqrt{3}\Big[4u + \operatorname{sen} 2u\Big]_0^{\pi/3} = \frac{16}{3}\sqrt{3}\pi + 6$$

$J = \dfrac{9}{2}\left[z + \dfrac{1}{3}z^3\right]_0^1 = \dfrac{9}{2}\cdot\dfrac{4}{3} = 6$. Portanto, $A = \left(\dfrac{16}{3}\sqrt{3}\pi + 6\right) - 6 = \dfrac{16}{3}\sqrt{3}\pi$.

33. Veja a Figura **10.8.33**. O ponto $P(r, \theta)$ estará sobre a cônica se e somente se $|\overline{OP}| = e|\overline{RP}|$. Como P está à esquerda da diretriz, $\overline{RP} < 0$; assim, $|\overline{RP}| = -\overline{RP}$. Além disso, $|\overline{OP}| = r$ pois $r > 0$. Portanto, $r = e(-\overline{RP})$. Entretanto, $\overline{RP} = \overline{DO} + \overline{OQ} = -d + r\cos\theta$. Portanto,

$$r = e(d - r\cos\theta);\quad r(1 + e\cos\theta) = ed;\quad r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

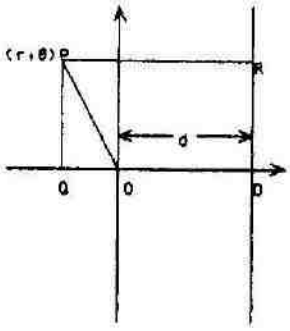


Figura 10.8.33

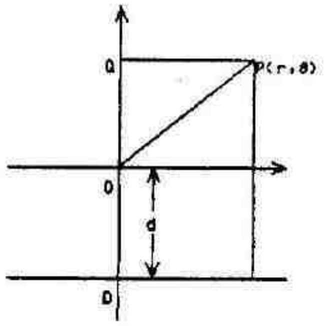


Figura 10.8.35

35. Veja a Figura 10.8.35. O ponto $P(r,\theta)$ estará na cônica se e somente se $|\overline{OP}| = e|\overline{RP}|$. Como P está acima da diretriz, $\overline{RP} > 0$; portanto, $|\overline{RP}| = \overline{RP}$. Além disso, $|\overline{OP}| = r$ pois $r > 0$. Logo, $r = e(\overline{RP})$. Entretanto, $\overline{RP} = \overline{DO} + \overline{OQ} = d + r \operatorname{sen} \theta$. Portanto,

$$r = e(d + r \operatorname{sen} \theta); \quad r(1 - e \operatorname{sen} \theta) = ed; \quad r = \frac{ed}{1 - e \operatorname{sen} \theta}$$

37. (a) Escolha a origem no foco e o eixo polar e sua extensão ao longo do eixo da parábola. Como $e = 1$, uma equação da órbita parabólica é $r = \dfrac{d}{1 - \cos \theta}$. As coordenadas do ponto $(80.000.000, \frac{1}{3}\pi)$ satisfazem a equação; logo

$$80.000.000 = \frac{d}{1 - \frac{1}{2}} = 2d; \quad d = 40.000.000$$

Uma equação da órbita do cometa é, portanto, $r = \dfrac{40.000.000}{1 - \cos \theta}$.

(b) r é menor qdo $\cos \theta = -1$. Assim, o cometa vem a 20.000.000 km do sol.

39. Seja $P(r,\theta)$ qualquer ponto sobre a cônica. Veja a Figura 10.8.39. O centro da cônica está na origem, que é eqüidistante dos vértices em V_1 e V_2. Pelo Teorema 10.8.1

$$|\overline{FP}| = e|\overline{PD}| \qquad (1)$$

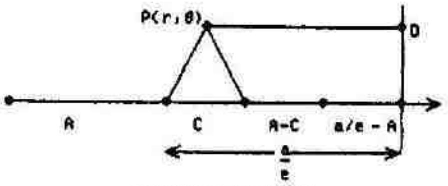


Figura 10.8.39

Seja $|\overline{OF}| = C$ e $|\overline{OV_1}| = |\overline{OV_2}| = A$. Como V_1 e V_2 estão sobre a cônica, temos $A - C = e\left(\frac{a}{e} - A\right)$ e $A + C = e\left(\frac{a}{e} + A\right)$.

Somando essas equações encontramos $2A = 2a$; substituindo-as encontramos $2C = 2eA = 2ea$; $C = ea$. Aplicando a lei dos co-senos ao triângulo FOP obtemos

$$|\overline{FP}| = \sqrt{C^2 + r^2 - 2Cr\cos\theta} = \sqrt{a^2e^2 + r^2 - 2aer\cos\theta}$$

Além disso, $|\overline{PD}| = \frac{a}{e} - r\cos\theta$. Substituindo $|\overline{FP}|$ e $|\overline{PD}|$ em (1) obtemos

$$\sqrt{a^2e^2 + r^2 - 2aer\cos\theta} = a - er\cos\theta; \quad a^2e^2 + r^2 - 2aer\cos\theta = a^2 - 2aer\cos\theta + e^2r^2\cos^2\theta$$

$$r^2 = \frac{a^2(1 - e^2)}{1 - e^2\cos^2\theta}$$

EXERCÍCIOS 10.9 Retas Tangentes a Curvas em Coordenadas Polares (Suplementar)

Se α for a medida da inclinação da reta tangente à curva em (r, θ), sua inclinação será

$$m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \theta (dr/d\theta) + r}{(dr/d\theta) - r \operatorname{tg} \theta}$$

1. Em $\theta = \frac{1}{6}\pi$, $r = 2 \operatorname{sen} \theta = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $\frac{dr}{d\theta} = 2\cos\theta = 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Logo,

$$\text{inclinação} = \frac{(\frac{1}{3}\sqrt{3})\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1(\frac{1}{3}\sqrt{3})} = \frac{2}{\frac{2}{3}\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

3. Em $\theta = \frac{1}{4}\pi$, $r = 1 - \cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\frac{dr}{d\theta} = \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\theta = 1$. Logo,

$$\text{inclinação} = \frac{1(\frac{1}{2}\sqrt{2}) + (1 - \frac{1}{2}\sqrt{2})}{\frac{1}{2}\sqrt{2} - (1 - \frac{1}{2}\sqrt{2})1} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

5. Em $\theta = \frac{5}{6}\pi$, $r = 6 + 2\operatorname{sen}\theta = 6 + 1 = 7$, $\frac{dr}{d\theta} = 2\cos\theta = -\sqrt{3}$, $\operatorname{tg}\theta = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$. Logo,

$$\text{inclinação} = \frac{(-\frac{1}{3}\sqrt{3})(-\sqrt{3}) + 7}{(-\sqrt{3}) - 7(-\frac{1}{3}\sqrt{3})} = \frac{8}{\frac{4}{3}\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

7. Em $\theta = \frac{2}{3}\pi$, $r = 3\cos 2\theta = 3\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$, $\frac{dr}{d\theta} = -6\operatorname{sen} 2\theta = -6\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 3\sqrt{3}$, $\operatorname{tg}\theta = -\sqrt{3}$. Logo,

$$\text{inclinação} = \frac{(-\sqrt{3})(3\sqrt{3}) + (-\frac{3}{2})}{3\sqrt{3} - (-\frac{3}{2})(-\sqrt{3})} = \frac{-\frac{21}{2}}{\frac{3}{2}\sqrt{3}} = -\frac{7}{3}\sqrt{3}$$

Nos Exercícios 9-19 nosso primeiro passo é multiplicar o numerador e o denominador por $\cos\theta$.

9. $r = 4 + 3\operatorname{sen}\theta$; $\frac{dr}{d\theta} = 3\cos\theta$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\theta(3\cos\theta) + (4 + 3\operatorname{sen}\theta)}{3\cos\theta - (4 + 3\operatorname{sen}\theta)\operatorname{tg}\theta} = \frac{3\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 4\cos\theta + 3\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta - 4\operatorname{sen}\theta - 3\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{\cos\theta(4 + 6\operatorname{sen}\theta)}{3 - 4\operatorname{sen}\theta - 6\operatorname{sen}^2\theta}$$

Tangentes horizontais: $-2\cos\theta(3\operatorname{sen}\theta + 2) = 0$. $\cos\theta = 0$; $\theta = \frac{1}{2}\pi$, $\theta = \frac{3}{2}\pi$ e

$4 + 6\operatorname{sen}\theta = 0$; $\operatorname{sen}\theta = -\frac{2}{3}$; $\theta = \pi - \operatorname{sen}^{-1}(-\frac{2}{3}) \approx 3,87$, $\theta = 2\pi + \operatorname{sen}^{-1}(-\frac{2}{3}) \approx 5,55$

Há retas tangentes horizontais nos pontos $(7, \frac{1}{2}\pi)$, $(1, \frac{3}{2}\pi)$, $(2, 3,87)$, $(2, 5,55)$.

Tangentes verticais: $6\operatorname{sen}^2\theta + 4\operatorname{sen}\theta - 3 = 0$; $\operatorname{sen}\theta = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 72}}{12} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{22}}{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{22}}{6}$

$\operatorname{sen}\theta \approx 0,448$; $\theta = \operatorname{sen}^{-1} 0,448 = 0,46$, $\theta = \pi - \operatorname{sen}^{-1} 0,448 = 2,68$. $\operatorname{sen}\theta \approx -1,115$; não há solução.

Há retas tangentes verticais nos pontos $(5,35, 0,46)$ e $(5,35, 2,68)$.

11. $r = 4 - 2\cos\theta$; $\frac{dr}{d\theta} = 2\operatorname{sen}\theta$. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\theta(2\operatorname{sen}\theta) + (4 - 2\cos\theta)}{2\operatorname{sen}\theta - (4 - 2\cos\theta)\operatorname{tg}\theta}$

$$= \frac{2\operatorname{sen}^2\theta + 4\cos\theta - 2\cos^2\theta}{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta - 4\operatorname{sen}\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta} = \frac{2 - 4\cos^2\theta + 4\cos\theta}{4\operatorname{sen}\theta(\cos\theta - 1)}$$

Tangentes horizontais: $2\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1 = 0$; $\cos\theta = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 8}}{4} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$

$\cos\theta \approx 1,366$, não há solução.

$\cos\theta \approx -0,366$; $\theta = \cos^{-1}(-0,366) = 1,95$, $\theta = 2\pi - \cos^{-1}(-0,366) = 4,34$

Há retas tangentes horizontais nos pontos $(4,73, 1,95)$ e $(4,73, 4,34)$.

Tangentes verticais: $-2\operatorname{sen}\theta(\cos\theta - 1) = 0$. $\operatorname{sen}\theta = 0$; $\theta = 0$, $\theta = \pi$ e $\cos\theta = 1$; $\theta = 0$.

Há retas tangentes verticais nos pontos $(2, 0)$ e $(6, \pi)$.

13. $r = 1 - \text{sen}\,\theta;\ \dfrac{dr}{d\theta} = -\cos\theta.\quad \text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{tg}\,\theta(-\cos\theta) + (1-\text{sen}\,\theta)}{-\cos\theta - (1-\text{sen}\,\theta)\ \text{tg}\,\theta} = \dfrac{\cos\theta(1-2\,\text{sen}\,\theta)}{2\text{sen}^2\theta - \text{sen}\,\theta - 1}$

$= \dfrac{\cos\theta(1-2\,\text{sen}\,\theta)}{(\text{sen}\,\theta - 1)(2\,\text{sen}\,\theta + 1)} = \dfrac{\text{sen}(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\pi)(2\,\text{sen}\,\theta - 1)}{\cos(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\pi)\,2\,\text{sen}\,\theta}$

Como o numerador e o denominador têm uma raiz comum em $\frac{1}{2}\pi$, usamos

$$\frac{\cos\theta}{1-\text{sen}\,\theta} = \frac{\text{sen}(\theta + \frac{1}{2}\pi)}{1+\cos(\theta+\frac{1}{2}\pi)} = \frac{2\,\text{sen}\frac{1}{2}(\theta+\frac{1}{2}\pi)\cos\frac{1}{2}(\theta+\frac{1}{2}\pi)}{2\cos^2\frac{1}{2}(\theta+\frac{1}{2}\pi)} = \frac{\text{sen}(\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\pi)}{\cos(\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\pi)}$$

Tangentes horizontais: $\text{sen}(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\pi) = 0;\ \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\pi = \pi;\ \theta = \frac{3}{2}\pi$ e

$2\,\text{sen}\,\theta - 1 = 0;\ \text{sen}\,\theta = \frac{1}{2};\ \theta = \frac{1}{6}\pi,\ \theta = \frac{5}{6}\pi.$

Há retas tangentes horizontais nos pontos $\left(2, \frac{3}{2}\pi\right),\ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\pi\right),\ \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\pi\right).$

Tangentes verticais: $\cos(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\pi) = 0;\ \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi;\ \theta = \frac{1}{2}\pi$ e

$2\,\text{sen}\,\theta + 1 = 0;\ \text{sen}\,\theta = -\frac{1}{2};\ \theta = \frac{7}{6}\pi,\ \theta = \frac{11}{6}\pi.$

Há retas tangentes verticais nos pontos $\left(0, \frac{1}{2}\pi\right),\ \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{6}\pi\right),\ \left(\frac{3}{2}, \frac{11}{6}\pi\right).$

15. $r = 2 + 3\cos\theta;\ \dfrac{dr}{d\theta} = -3\,\text{sen}\,\theta.$

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{tg}\,\theta(-3\,\text{sen}\,\theta) + (2+3\cos\theta)}{-3\,\text{sen}\,\theta - (2+3\cos\theta)\ \text{tg}\,\theta} = \dfrac{-3\,\text{sen}^2\theta + 2\cos\theta + 3\cos^2\theta}{-3\,\text{sen}\,\theta\cos\theta - 2\,\text{sen}\,\theta - 3\,\text{sen}\,\theta\cos\theta} = \dfrac{6\cos^2\theta + 2\cos\theta - 3}{-2\,\text{sen}\,\theta(3\cos\theta + 1)}$

Tangentes horizontais: $6\cos^2\theta + 2\cos\theta - 3 = 0;\ \cos\theta = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+72}}{12} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{19}}{6}$

$\cos\theta \approx 0,560;\ \theta = \cos^{-1}0,560 = 0,98,\ \theta = 2\pi - \cos^{-1}0,560 = 5,31$ e

$\cos\theta \approx -0,893;\ \theta = \cos^{-1}(-0,893) = 2,68,\ \theta = 2\pi - \cos^{-1}(-0,893) = 3,61$

As tangentes horizontais estão em $(3,68, 0,98),\ (3,68, 5,31),\ (-0,68, 2,68),\ (-0,68, 3,61).$

Tangentes verticais: $\text{sen}\,\theta = 0;\ \theta = 0,\ \theta = \pi$ e

$3\cos\theta + 1 = 0;\ \cos\theta = -\frac{1}{3};\ \theta = \cos^{-1}(-\frac{1}{3}) \approx 1,91,\ \theta = 2\pi - \cos^{-1}(-\frac{1}{3}) \approx 4,37$

Há retas tangentes verticais nos pontos $(5, 0),\ (-1, \pi),\ (1, 1,91),\ (1, 4,37).$

17. $r = \cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta;\ \dfrac{dr}{d\theta} = -2\,\text{sen}\,2\theta = -4\,\text{sen}\,\theta\cos\theta.$

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{tg}\,\theta(-4\,\text{sen}\,\theta\cos\theta) + (\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)}{-4\,\text{sen}\,\theta\cos\theta - (\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)\ \text{tg}\,\theta} = \dfrac{\cos\theta(-4\,\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)}{\text{sen}\,\theta(-4\cos^2\theta - \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)} = \dfrac{\cos\theta(1 - 6\,\text{sen}^2\theta)}{\text{sen}\,\theta(1 - 6\cos^2\theta)}$

Tangentes horizontais: $\cos\theta = 0;\ \theta = \frac{1}{2}\pi,\ \theta = \frac{3}{2}\pi$ e $1 - 6\,\text{sen}^2\theta = 0$

$\text{sen}\,\theta = \pm\frac{1}{6}\sqrt{6};\ \theta = \text{sen}^{-1}(\frac{1}{6}\sqrt{6}) \approx 0,42,\ \theta = \pi - \text{sen}^{-1}(-\frac{1}{6}\sqrt{6}) \approx 3,56,\ \theta = 2\pi + \text{sen}^{-1}(-\frac{1}{6}\sqrt{6}) \approx 5,86$

As tangentes horizontais estão em $(-1, \frac{1}{2}\pi),\ (-1, \frac{3}{2}\pi),\ (\frac{2}{3}, 0,42),\ (\frac{2}{3}, 2,72),\ (\frac{2}{3}, 3,56),\ (\frac{2}{3}, 5,86).$

Tangentes verticais: $\text{sen}\,\theta = 0;\ \theta = 0,\ \theta = \pi$ e $1 - 6\cos^2\theta = 0;\ \cos\theta = \pm\frac{1}{6}\sqrt{6}$

$\theta = \cos^{-1}(\frac{1}{6}\sqrt{6}) \approx 1,15,\ \theta = \cos^{-1}(-\frac{1}{6}\sqrt{6}) \approx 1,99,\ \theta = 2\pi - \cos^{-1}(-\frac{1}{6}\sqrt{6}),\ \theta = 2\pi - \cos^{-1}(\frac{1}{6}\sqrt{6}) \approx 5,13$

As tangentes verticais estão em $(1, 0),\ (1, \pi),\ (-\frac{2}{3}, 1,15),\ (-\frac{2}{3}, 1,99),\ (-\frac{2}{3}, 4,29),\ (-\frac{2}{3}, 5,13).$

19. $r^2 = 4 \text{ sen } 2\theta = 8 \text{ sen } \theta \cos \theta, \quad \theta \in [0, \tfrac{1}{2}\pi]; \quad r\dfrac{dr}{d\theta} = 8\cos^2\theta - 8 \text{ sen}^2\theta$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{tg } \theta \dfrac{dr}{d\theta} + r}{\dfrac{dr}{d\theta} + r \;\; \text{tg } \theta} = \frac{\text{tg } \theta\left(r\dfrac{dr}{d\theta}\right) + r^2}{r\dfrac{dr}{d\theta} + r^2 \text{ tg } \theta} = \frac{\text{tg } \theta(4\cos^2\theta - 4 \text{ sen}^2\theta) + 8 \text{ sen } \theta \cos \theta}{4\cos^2\theta - 4 \text{ sen}^2\theta + 8 \text{ sen } \theta \cos \theta \;\; \text{tg } \theta}$$

$$= \frac{\text{sen } \theta(4\cos^2\theta - 4 \text{ sen}^2\theta + 8\cos^2\theta)}{\cos \theta(4\cos^2\theta - 4 \text{ sen}^2\theta + 8 \text{ sen}^2\theta)} = \frac{\text{sen } \theta(4\cos^2\theta - 1)}{\cos \theta(1 - 4 \text{ sen}^2\theta)}$$

Tangentes horizontais: $\text{sen } \theta = 0; \;\; \theta = 0$ e $4\cos^2\theta - 1 = 0; \;\; \cos \theta = \pm \tfrac{1}{2}; \;\; \theta = \tfrac{1}{3}\pi.$

Há retas tangentes horizontais nos pontos $(0, 0), \;\; (\sqrt[4]{12}, \tfrac{1}{3}\pi), \;\; (-\sqrt[4]{12}, \tfrac{1}{3}\pi).$

Tangentes verticais: $\cos \theta = 0; \;\; \theta = \tfrac{1}{2}\pi$ e $1 - 4 \text{ sen}^2\theta = 0; \;\; \text{sen } \theta = \pm\tfrac{1}{2}; \;\; \theta = \tfrac{1}{6}\pi.$

Há retas tangentes verticais nos pontos $(0, \tfrac{1}{2}\pi), \;\; (\sqrt{2}, \tfrac{1}{6}\pi), \;\; (-\sqrt{2}, \tfrac{1}{6}\pi).$

Nos Exercícios 21-27, $\alpha = \chi + \theta - k\pi$, onde k é escolhido de modo que $0 \le \alpha < \pi$.

21. Em $\theta = 1, \;\; r = 4\theta^{-1} = 4, \;\; \dfrac{dr}{d\theta} = -4\theta^{-2} = -4, \quad \text{tg } \chi = \dfrac{4}{-4} = -1, \;\; \chi = \dfrac{3}{4}\pi.$

Como $\chi + \theta = \dfrac{3}{4}\pi + 1 \in [\pi, 2\pi)$, então, $\alpha = \chi + \theta - \pi = 1 - \dfrac{1}{4}\pi.$

23. Em $\theta = -\dfrac{1}{8}\pi, \;\; r = \sec 2\theta = \sqrt{2}, \;\; \dfrac{dr}{d\theta} = 2\sec 2\theta \text{ tg } 2\theta = -2\sqrt{2}, \quad \text{tg } \chi = \dfrac{\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{2}$

$\chi = \text{tg}^{-1}(-\tfrac{1}{2}) + \pi \approx 2{,}68.$ Como $\chi + \theta \approx 2{,}68 - \tfrac{1}{8}\pi \in [0, \pi)$, então, $\alpha = 2{,}68 - \tfrac{1}{8}\pi = 2{,}29.$

25. Em $\theta = \tfrac{1}{2}\pi, \;\; r = \theta^2 = \tfrac{1}{4}\pi^2, \;\; \dfrac{dr}{d\theta} = 2\theta = \pi, \quad \text{tg } \chi = \dfrac{\tfrac{1}{4}\pi^2}{\pi} = \tfrac{1}{4}\pi, \;\; \chi = \text{tg}^{-1}\tfrac{1}{4}\pi \approx 0{,}67.$

Como $\chi + \theta \approx 0{,}67 + \tfrac{1}{2}\pi \approx 2{,}24 \in [0, \pi), \;\; \alpha = 2{,}24.$

27. Em $\theta = \dfrac{1}{6}\pi, \;\; r^2 = 9\cos 2\theta = \dfrac{9}{2}, \;\; 2r\dfrac{dr}{d\theta} = -18 \text{ sen } 2\theta = -9\sqrt{3}, \quad \text{tg } \chi = \dfrac{r}{dr/d\theta} = \dfrac{r^2}{r(dr/d\theta)} = \dfrac{9/2}{(-9/2)\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}},$

$\chi = \tfrac{5}{6}\pi.$ Como $\chi + \theta = \pi \in [\pi, 2\pi)$, então, $\alpha = \chi + \theta - \pi = 0.$

Nos Exercícios 29-35, β é a medida do ângulo entre as retas tangentes.

29. Em $(\sqrt{2}, \tfrac{1}{4}\pi), \;\; r = 2\cos \theta = \sqrt{2}, \;\; \dfrac{dr}{d\theta} = -2 \text{ sen } \theta = -\sqrt{2}, \quad \text{tg } \chi_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -1, \;\; \chi_1 = 135°$ e

$r = 2 \text{ sen } \theta = \sqrt{2}, \;\; \dfrac{dr}{d\theta} = 2\cos \theta = \sqrt{2}, \quad \text{tg } \chi_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1, \;\; \chi = 45°.$ Logo, $\beta = 135° - 45° = 90°.$

31. Em $\left(-2, \dfrac{2}{3}\pi\right), \;\; r = 4\cos \theta = -2, \;\; \dfrac{dr}{d\theta} = -4 \text{ sen } \theta = -2\sqrt{3}, \quad \text{tg } \chi_1 = \dfrac{-2}{-2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \;\; \chi_1 = 30°$ e

$r = 4\cos^2\theta - 3 = -2, \;\; \dfrac{dr}{d\theta} = -8 \text{ sen } \theta \cos \theta = 2\sqrt{2}, \quad \text{tg } \chi_2 = \dfrac{-2}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \;\; \chi_2 = -30°. \;\; \beta = 30° - (-30°) = 60°.$

33. As equações dadas são $r = 1 - \text{sen}\,\theta$ (1) e $r = 1 + \text{sen}\,\theta$ (2). Resolvendo simultaneamente,

$$1 + \text{sen}\,\theta = -\text{sen}\,\theta;\quad 2\,\text{sen}\,\theta = 0;\quad \theta = 0,\quad \theta = \pi$$

Qdo. $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, então $r = 1$. Assim, dois pontos de intersecção são $(1, 0)$ e $(1, \pi)$. As curvas também se interceptam na origem, pois ela está em cada curva.

Para o gráfico de (1), $\text{tg}\,\chi_1 = \dfrac{r}{dr/d\theta} = \dfrac{1 - \text{sen}\,\theta}{-\cos\theta}$. Para o gráfico de (2), $\text{tg}\,\chi_2 = \dfrac{1 + \text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$.

Em (1), a origem é o ponto $(0, \frac{1}{2}\pi)$ e $\chi_1 = 90°$. Em (2), a origem é o ponto $(0, \frac{3}{2}\pi)$ e $\chi_2 = 90°$. Portanto, na origem $\beta = 0°$.

Em $(1, 0)$, $\text{tg}\,\chi_1 = -1$; $\theta = 135°$ e $\text{tg}\,\chi_2 = 1$; $\chi_2 = 45°$. Portanto, $\beta = 135° - 45° = 90°$.

Em $(1, \pi)$, $\text{tg}\,\chi_1 = 1$; $\theta = 45°$ e $\text{tg}\,\chi_2 = -1$; $\chi_2 = 135°$. Portanto, $\beta = 135° - 45° = 90°$.

35. As equações dadas são a circunferência $r = \cos\theta$ (1) e a rosácea de quatro folhas $r = \text{sen}\,2\theta$ (2). Resolvendo simultaneamente, obtemos

$\text{sen}\,2\theta = \cos\theta$; $2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = \cos\theta$. $\cos\theta = 0$; $\theta = \frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$ e $2\,\text{sen}\,\theta = 1$; $\text{sen}\,\theta = \frac{1}{2}$; $\theta = \frac{1}{6}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$

Qdo. $\theta = \frac{1}{2}\pi$ e $\frac{3}{2}\pi$, $r = 0$. Assim, a origem é um ponto de intersecção. Também $(0, 0)$ está em (2). Os outros pontos de intersecção são $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{6}\pi)$ e $(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{5}{6}\pi)$.

Para $r = \cos\theta$, $\text{tg}\,\chi_1 = \dfrac{r}{dr/d\theta} = \dfrac{\cos\theta}{-\text{sen}\,\theta} = -\text{cotg}\,\theta$. Para $r = \text{sen}\,2\theta$, $\text{tg}\,\chi_2 = \dfrac{\text{sen}\,2\theta}{2\cos 2\theta} = \dfrac{1}{2}\,\text{tg}\,2\theta$.

Em $(0, \frac{1}{2}\pi)$ e $(0, \frac{3}{2}\pi)$, $\text{tg}\,\chi_1 = 0$; $\chi_1 = 0$ e $\text{tg}\,\chi_2 = 0$; $\chi_2 = 0$ logo, $\beta = 0$. Também em $(0, 0)$, $\chi_1 = 90°$, logo, $\beta = 90°$ para a segunda intersecção na origem.

Em $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{6}\pi)$, $\text{tg}\,\chi_1 = -\text{cotg}\,\frac{1}{6}\pi = -\sqrt{3}$; $\chi_1 = 120°$ e $\text{tg}\,\chi_2 = \frac{1}{2}\,\text{tg}\,\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\chi_2 \approx 40{,}9°$.

Logo, $\beta = \chi_2 - \chi_1 = 79{,}11°$.

Em $(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{5}{6}\pi)$, $\text{tg}\,\chi_1 = -\text{cotg}\,\frac{5}{6}\pi = \sqrt{3}$; $\chi_1 = 60°$ e $\text{tg}\,\chi_2 = \frac{1}{2}\,\text{tg}\,\frac{5}{3}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\chi_2 \approx 139{,}11°$.

Logo, $\beta = \chi_2 - \chi_1 = 79{,}11°$.

37. Seja (r, θ) qualquer ponto na circunferência $r = k$. Então, $dr/d\theta = 0$ e

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{tg}\,\theta(dr/d\theta) + r}{dr/d\theta - r\,\text{tg}\,\theta} = \frac{(\text{tg}\,\theta)(0) + k}{0 - k\,\text{tg}\,\theta} = -\frac{1}{\text{tg}\,\theta}$$

Portanto, $\text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\theta = -1$ Se $\text{tg}\,\theta \neq 0$.

39. Para a curva $r = 2(1 - \cos\theta)$, $\text{tg}\,\chi = \dfrac{r}{dr/d\theta} = \dfrac{2(1 - \cos\theta)}{2\,\text{sen}\,\theta} = \dfrac{1 - \cos\theta}{\text{sen}\,\theta} = \text{tg}\,\frac{1}{2}\theta$.

41. A inclinação da tangente a $r = a(1 + \text{sen}\,\theta)$ é $m_1 = \text{tg}\,\chi_1 = \dfrac{r}{dr/d\theta} = \dfrac{a(1 + \text{sen}\,\theta)}{a\cos\theta} = \dfrac{1 + \text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$.

A inclinação da tangente a $r = b(1 - \text{sen}\,\theta)$ é $m_2 = \text{tg}\,\chi_2 = \dfrac{r}{dr/d\theta} = \dfrac{b(1 - \text{sen}\,\theta)}{-b\cos\theta} = \dfrac{1 - \text{sen}\,\theta}{-\cos\theta}$.

Como em qualquer ponto da intersecção $m_1 m_2 = \dfrac{1 + \text{sen}\,\theta}{\cos\theta}\cdot\dfrac{1 - \text{sen}\,\theta}{-\cos\theta} = \dfrac{\cos^2\theta}{-\cos^2\theta} = -1$, as retas tangentes são perpendiculares.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 10

1. O foco da parábola está em $(0, -3)$ e a diretriz tem a equação $y = 3$.
A distância orientada da diretriz ao foco é -6. Portanto, $2p = -6$; $4p = -12$.
O vértice está na origem. (a) Portanto, uma equação da parábola é $x^2 = -12y$.
(b) O comprimento do *lactus rectum* é $|4p| = 12$.

3. O foco da parábola está em $(1, 0)$ e a diretriz tem a equação $x = -1$.
A distância orientada da diretriz ao foco é 2. Portanto, $2p = 2$; $4p = 4$.
O vértice está na origem. (a) Portanto, uma equação da parábola é $y^2 = 4x$.
(b) O comprimento do *lactus rectum* é $|4p| = 4$.

5. $x^2 - 6y = 0$; $x^2 = 6y = 4(\frac{3}{2})y$. (a) O foco está no ponto $(0, \frac{3}{2})$.
(b) Uma equação da diretriz é $y = -\frac{3}{2}$.

7. $y^2 + 8x - 6y - 7 = 0$; $y^2 - 6y + 9 = -8x + 7 + 9$; $(y - 3)^2 = -8(x - 2)$
A equação é da forma $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ onde $h = 2$, $k = 3$, e $4p = -8$. Portanto, (a) o vértice está em $(2, 3)$, (b) Uma equação do eixo é $y = 3$, (c) o foco está em $(0, 3)$, e (d) uma equação da diretriz é $x = 4$.

9. Como a parábola tem seu vértice em $(5, 1)$ e seu eixo é paralelo ao eixo y, uma equação da parábola é da forma $(x - 5)^2 = 4p(y - 1)$. Como o ponto $(9, 3)$ está na parábola, temos $(9 - 5)^2 = 4p(3 - 1)$; $16 = 8p$; $4p = 8$. Portanto, uma equação da parábola é $(x - 5)^2 = 8(y - 1)$.

11. Tomamos os eixos coordenados de modo que o vértice da parábola esteja na origem e o eixo da parábola esteja no eixo y. Uma equação da parábola é da forma $x^2 = 4py$. Como o ponto $(9, 12)$ está na parábola, $9^2 = 4p(12)$; $4p = \frac{27}{4}$. Logo, uma equação da parábola é $x^2 = \frac{27}{4}$. Seja $x = \bar{x}$ qdo $y = 3$. Então, $\bar{x}^2 = \frac{27}{4}(3)$; $\bar{x} = \pm\frac{9}{2}$. Assim, o número de centímetros na circunferência da secção plana circular é $2\pi(\frac{9}{2}) = 9\pi$.

13. $4x^2 + 25y^2 = 100$; $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$; $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$. Elipse. $c = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$.
Centro: $(0, 0)$; vértices: $(5, 0)$ e $(-5, 0)$; focos: $(\sqrt{21}, 0)$ e $(-\sqrt{21}, 0)$.
Extremidades do eixo menor: $(0, 2)$ e $(0, -2)$.

15. $16x^2 - 9y^2 = 144$; $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$. Hipérbole. $c = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.
Centro: $(0, 0)$; vértices: $(3, 0)$ e $(-3, 0)$; focos: $(5, 0)$ e $(-5, 0)$.
Assintotas: $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 0$; $y = -\frac{4}{3}x$ e $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 0$; $y = \frac{4}{3}x$

17. $4x^2 + y^2 + 24x - 16y + 84 = 0$; $4(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 16y + 64) = -84 + 4 \cdot 36 + 64$

$4(x+3)^2 + (y-8)^2 = 16$; $\dfrac{(x+3)^2}{4} + \dfrac{(y-8)^2}{16} = 1$; $\dfrac{(x+3)^2}{2^2} + \dfrac{(y-8)^2}{4^2} = 1$; Elipse $c = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}$.

Centro: $(-3, 8)$; vértices: $(-3, 8 \pm 4)$, isto é, $(-3, 12)$ e $(-3, 4)$; focos: $(-3, 8 \pm 2\sqrt{3})$.

Extremidades do eixo menor: $(-3 \pm 2, 8)$, isto é, $(-1, 8)$ e $(-5, 8)$.

19. $25x^2 - y^2 + 50x + 6y - 9 = 0$; $25(x^2 + 2x + 1) - (y^2 - 6y + 9) = 9 + 25 \cdot 1 - 9$; $25(x^2 + 1)^2 - (y-3)^2 = 25$

$\dfrac{(x+1)^2}{1} - \dfrac{(y-3)^2}{25} = 1$; $\dfrac{(x+1)^2}{1^2} - \dfrac{(y-3)^2}{5^2} = 1$. Hipérbole $c = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$.

Centro: $(-1, 3)$; vértices: $(-1 \pm 1, 3)$, isto é, $(0, 3)$ e $(-2, 3)$; focos: $(-1 \pm \sqrt{26}, 3)$.

Assintotas: $\dfrac{x+1}{1} - \dfrac{y-3}{5} = 0$; $5x - y + 8 = 0$ e $\dfrac{x+1}{1} + \dfrac{y-3}{5} = 0$; $5x + y + 2 = 0$.

21. A elipse tem vértices em $(0, 8)$ e $(0, -4)$. O centro está em seu ponto médio, o qual é $(0, 2)$ e $a = 8 - 2 = 6$. Como o foco está em $(0, 6)$, $c = 6 - 2 = 4$ e $b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20$. Logo, uma equação da elipse é $\dfrac{x^2}{20} + \dfrac{(y-2)^2}{36} = 1$.

23. A hipérbole tem focos em $(-5, 1)$ e $(1, 1)$. O centro está em seu ponto médio, o qual é $(-2, 1)$ e $c = 1 - (-2) = 3$. Como um vértice está em $(-4, 1)$, $a = -2 - (-4) = 2$ e $b^2 = c^2 - a^2$ $9 - 4 = 5$. Logo, uma equação da hipérbole é $\dfrac{(x+2)^2}{4} - \dfrac{(y-1)^2}{5} = 1$.

Nos exercícios 25-41 usamos as fórmulas.

$$x = r\cos\theta,\quad y = r \operatorname{sen}\theta,\quad x^2 + y^2 = r^2,\quad r = \pm\sqrt{x^2+y^2},\quad \operatorname{tg}\theta = y/x$$

25. $4x^2 - 9y^2 = 36$; $4(r\cos\theta)^2 - 9(r\operatorname{sen}\theta)^2 = 36$; $r^2(4\cos^2\theta - 9\operatorname{sen}^2\theta) = 36$

27. $x^2 + y^2 - 9x + 8y = 0$; $r^2 - 9r\cos\theta + 8r\operatorname{sen}\theta = 0$; $r(r - 9\cos\theta + 8\operatorname{sen}\theta) = 0$

Como ele contém a origem, o gráfico inteiro é dado por $r = 9\cos\theta - 8\operatorname{sen}\theta$.

29. $r = 9\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}\theta$; $r = \tfrac{9}{2}(1 - \cos\theta)$; $2r^2 = 9(r - r\cos\theta)$; $2(x^2 + y^2) = \pm 9(\sqrt{x^2+y^2} - x)$

$$2x^2 + 2y^2 + 9x = \pm 9\sqrt{x^2+y^2};\quad 4x^4 + 4y^4 + 81x^2 + 8x^2y^2 + 36x^3 + 36xy^2 = 81x^2 + 81y^2$$

$$4x^4 + 8x^2y^2 + 4y^4 + 36x^3 + 36xy^2 - 81y^2 = 0$$

31. $\cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta) = \cos 2\theta\cos\theta - \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen}\theta = (2\cos^2 - 1)\cos\theta - (2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)\operatorname{sen}\theta$

$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$. Logo, $r = 4\cos 3\theta = 4(4\cos^3\theta - 3\cos\theta)$; $r^4 = 16(r\cos\theta)^3 - 12r^2(r\cos\theta)$

$$(x^2 + y^2)^2 = 16x^3 - 12(x^2 + y^2)x;\quad (x^2 + y^2)^2 = 4x^3 - 12xy^2$$

33. (a) O gráfico de $r\theta = 3$ é uma espiral recíproca. É semelhante ao gráfico de $r\theta = 1$ (veja a Figura 10.6.15).

(b) O gráfico de $3r = \theta$ é uma espiral de Arquimedes. Veja a Figura 10.33.

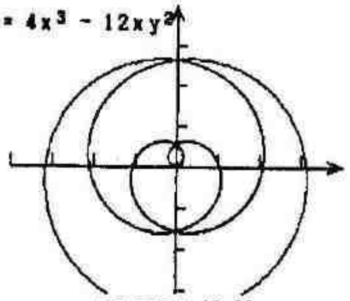


FIGURA 10.33

35. $r = \sqrt{|\cos\theta|}$ é equivalente às duas equações $r = \sqrt{\cos\theta}$ (1) e $r = \sqrt{-\cos\theta}$ (2).
Em (1), $r \geq 0$ e $\theta \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$. Seu gráfico é um laço de uma *lemniscata* simétrica com relação ao eixo polar e situada no primeiro e quarto quadrantes. Em (2), $r \geq 0$ e $\theta \in [\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$. Seu gráfico é um laço de uma *lemniscata* simétrica em relação ao eixo polar e situada no segundo e terceiro quadrantes. O gráfico da equação dada consiste em dois laços.

37. $r = 2(1 + \cos\theta)$. A equação é da forma $r = a + b\cos\theta$ onde $a = b$. Portanto, o gráfico é uma cardióide. O gráfico é mostrado na Figura 10.2.16 no texto.

39. As equações dadas são $r = 2(1 + \cos\theta)$ (1) e $r^2 = 2\cos\theta$ (2). Substituindo r em (2)

$$4(1 + \cos\theta)^2 = 2\cos\theta;\quad 2(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) = \cos\theta;\quad 2\cos^2\theta + 3\cos\theta + 2 = 0$$

Como $3^2 - 4\cdot2\cdot2 = -7 < 0$, não há soluções reais simultâneas. Na equação (1), $r = 0$ qdo. $\theta = \pi$, e na equação (2), $r = 0$ qdo. $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Portanto, a origem fica em ambos os gráficos, sendo o único ponto de intersecção.

Nos Exercícios 41-45, A unidades de área é a área pedida.

41. A *limaçon* dada tem a equação $r = 4(1 + 2\cos\theta)$.

(a) Metade da região limitada pelo laço é obtida qdo. $\theta \in [\frac{2}{3}\pi, \pi]$.

$$A = 2\lim_{\|\Delta\|\to0}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2}[4(1 + 2\cos\xi_i)]^2\Delta_i\theta = 16\int_{2\pi/3}^{\pi}(1 + 2\cos\theta)^2 d\theta = 16\int_{2\pi/3}^{\pi}(1 + 4\cos\theta + 4\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= 16\int_{2\pi/3}^{\pi}[1 + 4\cos\theta + 2(1 + \cos2\theta)]\,d\theta = 16\int_{2\pi/3}^{\pi}(3 + 4\cos\theta + 2\cos2\theta)\,d\theta$$

$$= 16\Big[3\theta + 4\,\text{sen}\,\theta + \text{sen}\,2\theta\Big]_{2\pi/3}^{\pi} = 16[3\pi - (2\pi + 2\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3})] = 16\pi - 24\sqrt{3}$$

(b) Metade da região limitada pela parte externa da *limaçon* é obtida qdo $\theta \in [0, \frac{2}{3}\pi]$.

$$A = 2\lim_{\|\Delta\|\to0}\sum_{i=0}^{n}\tfrac{1}{2}[4(1 + 2\cos\xi_i)]^2\Delta_i\theta = 16\int_{0}^{2\pi/3}(1 + 2\cos\theta)^2 d\theta$$

$$= 16\Big[3\theta + 4\,\text{sen}\,\theta + \text{sen}\,2\theta\Big]_{0}^{2\pi/3} = 16(2\pi + 2\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}) = 32\pi + 24\sqrt{3}$$

43. As equações dadas são $r = 2a\,\text{sen}\,\theta$ e $r = a$. Os pontos de intersecção dos dois gráficos são $(a, \frac{1}{6}\pi)$ e $(a, \frac{5}{6}\pi)$. A região pedida é simétrica em relação ao eixo $\frac{1}{2}\pi$. Assim, se tomamos $\theta \in [\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, obtemos a metade da área pedida. Portanto,

$$A = 2\lim_{\|\Delta\|\to0}\sum_{i=0}^{n}[\tfrac{1}{2}(2a\,\text{sen}\,\xi_i)^2 - \tfrac{1}{2}a^2]\Delta_i\theta = a^2\int_{\pi/6}^{\pi/2}(4\,\text{sen}^2\theta - 1)\,d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/2}(1 - 2\cos2\theta)\,d\theta$$

$$= \Big[\theta - \text{sen}\,2\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/2} = a^2(\tfrac{1}{2}\pi - 0 - \tfrac{1}{6}\pi - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}) = a^2(\tfrac{1}{3}\pi + \tfrac{1}{2}\sqrt{3})$$

45. $A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left(e^{k\xi_i}\right)^2 \Delta_i\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{2k\theta}\,d\theta = \frac{1}{4k}\,e^{2k\theta}\Big]_0^{2\pi} = \frac{e^{4k\pi}-1}{4k}$

47. Os dois pontos $P_i(r_i, \theta_i)$ nas coordenadas cartesianas são (x_i, y_i) onde $x_i = r_i\cos\theta_i$ e $y_i = r_i \operatorname{sen}\theta_i$ $(i = 1, 2)$. Se d for a medida da distância entre P_1 e P_2 então

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(r_1\cos\theta_1 - r_2\cos\theta_2)^2 + (r_1\operatorname{sen}\theta_1 - r_2\operatorname{sen}\theta_2)^2}$$

$$= \sqrt{r_1^2(\cos^2\theta_1 + \operatorname{sen}^2\theta_1) + r_2^2(\cos^2\theta_2 + \operatorname{sen}^2\theta_2) - 2r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2)}$$

$$= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

49. Seja $C = (r_0, \theta_0)$ e $P = (r, \theta)$. A circunferência pedida é o *locus* de $|\overline{CP}| = a$. Pelo Exercício 47, que também pode ser obtido pela lei dos co-senos, temos

$$a = \sqrt{r_0^2 + r^2 - 2r_0r\cos(\theta - \theta_0)};\quad a^2 = r_0^2 + r^2 - 2r_0r\cos(\theta - \theta_0)$$

51. $r = \frac{2}{2 - \operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta}$ é da forma $r = \frac{ed}{1 - e\operatorname{sen}\theta}$ com (a) $e = \frac{1}{2} < 1$; (b) a cônica é uma elipse, (c) $d = \frac{2}{1} = 2$ e a diretriz está abaixo do foco na origem ; logo , sua equação é $r\operatorname{sen}\theta = -2$.

53. $r = \frac{4}{2 + 3\cos\theta} = \frac{2}{1 + \frac{3}{2}\cos\theta}$ é da forma $r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$ com (a) $e = \frac{3}{2} > 1$; (b) a cônica é uma hipérbole(c) $d = \frac{4}{3}$ e a diretriz está à direita do foco; logo, sua equação é é $r\cos\theta = \frac{4}{3}$.

55. A diretriz correspondente ao foco no pólo está à esquerda do foco.

Assim, uma equação da cônica é da forma $r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}$. Como um vértice está em $(2, \pi)$,

$$2 = \frac{ed}{1 - e\cos\pi};\quad 2 = \frac{ed}{1 + e};\quad ed = 2 + 2e$$

Como um vértice está em$(4, \pi)$ ou, equivalentemente $(-4, 0)$, então

$$-4 = \frac{ed}{1 - e\cos 0};\quad -4 = \frac{ed}{1 - e};\quad ed = -4 + 4e$$

Resolvendo simultaneamente, obtemos $e = 3$ e $ed = 8$. A cônica é uma hipérbole, uma equação é

$$r = \frac{8}{1 - 3\cos\theta}$$

57. Como $e = 1$, a cônica é uma parábola. Como um foco está na origem e o vértice está em $(3, \frac{3}{2}\pi)$, a diretriz está abaixo do foco. Assim, uma equação da parábola é da forma $r = \frac{d}{1 - \cos\theta}$. Como d é uma distância não-orientada entre o foco e a diretriz $d = 2(3) = 6$. Logo, uma equação da parábola é $r = \frac{6}{1 - \operatorname{sen}\theta}$.

59. A equação dada é $3x^2 - 3xy - y^2 - 6y = 0$ Logo, $A = 3$, $B = 3$, e $C = -1$. Portanto, o termo xy pode ser removido por uma rotação de eixos, escolhendo α de modo que $\cot g\,\alpha = \frac{A - C}{B} = \frac{3+1}{-3} = -\frac{4}{3}$.

Portanto, $\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\text{sen}\,\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

Logo, substituímos $x = X - 3Y$, $y = 3X + Y$ onde $X = \frac{1}{\sqrt{10}}\bar{x}$ e $Y = \frac{1}{\sqrt{10}}\bar{y}$. Então

$$3(X-3Y)^2 - 3(X-3Y)(3X+Y) - (3X+Y)^2 - 6(3X+Y) = 0$$

$$3X^2 - 18XY + 27Y^2 - 9X^2 + 24XY - 9Y^2 - 9X^2 - 6XY - Y^2 - 18X - 6Y = 0$$

$$-15X^2 + 35Y^2 - 18X - 6Y = 0;\quad 35\left(Y^2 - \frac{18}{35}Y + \frac{9}{35^2}\right) - 15\left(X^2 + \frac{6}{5}X + \frac{9}{25}\right) = \frac{9}{35} - 15\cdot\frac{9}{25} = -\frac{36}{7}$$

$$15\left(X + \frac{3}{5}\right)^2 - 35\left(Y - \frac{3}{35}\right)^2 = \frac{36}{7};\quad 15\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\bar{x} + \frac{3}{5}\right)^2 - 35\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\bar{y} - \frac{3}{35}\right)^2 = \frac{36}{7}$$

$$21\left(\bar{x} + \frac{3}{5}\sqrt{10}\right)^2 - 49\left(\bar{y} - \frac{3}{35}\sqrt{10}\right)^2 = 72;\quad 21\bar{x}'^2 - 49\bar{y}'^2 = 72$$

onde $\bar{x}' = \bar{x} + \frac{3}{5}\sqrt{10}$ e $\bar{y}' = \bar{y} - \frac{3}{35}\sqrt{10}$.

61. (a) $25x^2 - 9y^2 = 225$; $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$; $a = 3$, $b = 5$. $c = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$; logo, os focos estão em $(\pm\sqrt{34}, 0)$. $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}\sqrt{34}$. Como $\frac{a}{e} = \frac{9}{\sqrt{34}} = \frac{9}{34}\sqrt{34}$, as equações das diretrizes são $x = \pm\frac{9}{34}\sqrt{34}$.

63. $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$. Um elemento de volume é um invólucro cilíndrico centrado no eixo y de raio médio m_i, $m_i \in [a, 2a]$, e altura $\sqrt{m_i^2/a^2 - 1}$. Então,

$$V = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}(2\pi m_i)\,2b\sqrt{\frac{m_i^2}{a^2} - 1}\,\Delta_i x = 4\pi b\int_a^{2a} x\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\,dx = \frac{4}{3}\pi a^2 b\left[\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)^{3/2}\right]_a^{2a} = \frac{4}{3}\pi a^2 b(3^{3/2})$$
$$= 4\sqrt{3}\,\pi a^2 b$$

65. O satélite está mais próximo da Terra qdo ele está no vértice entre a Terra no foco e sua diretriz correspondente. Assim, $a - ae = 300$; $a - \frac{1}{3}a = 300$; $a = 450$. O satélite está mais longe da Terra qdo está no outro vértice. Se d km for essa distância, então $d = a + ae = 450 + 450(\frac{1}{3}) = 600$.

67. Escolha o sistema de coordenadas com a origem no foco. A cônica é uma parábola, logo, $e = 1$ e uma equação é $r = \dfrac{d}{1 - \cos\theta}$. Sejam $(15, \theta)$ e $(5, \theta + \frac{1}{2}\pi)$ os pontos dados. Então,

$$15 = \frac{d}{1 - \cos\theta}; \quad 15 - 15\cos\theta = d; \quad \cos\theta = \frac{15 - d}{15}$$

$$5 = \frac{d}{1 - \cos(\theta + \frac{1}{2}\pi)} = \frac{d}{1 + \operatorname{sen}\theta}; \quad 5 + 5\operatorname{sen}\theta = d; \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{d - 5}{5}$$

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{d-5}{5}\right)^2 + \left(\frac{15-d}{15}\right)^2; \quad 1 = \frac{d^2 - 10d + 25}{25} + \frac{d^2 - 30d + 25}{225}$$

$$225 = 9d^2 - 90d + 225 + d^2 - 30d + 225; \quad 10d^2 - 120d + 225 = 0; \quad d^2 - 12d + 2.5 = 0$$

$$d = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 90}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{54}}{2} = 6 \pm \frac{3}{2}\sqrt{6}$$

Portanto, as distâncias mais próximas das duas órbitas são $\frac{1}{2}d = (3 \pm \frac{3}{4}\sqrt{6})$ milhões de quilômetros

69. Como a cônica é uma parábola, $e = 1$. Como a diretriz está à esquerda do foco, uma equação da parábola é da forma $r = \dfrac{d}{1 - \cos\theta}$. O ponto $(2, \frac{1}{3}\pi)$ está sobre a parábola, logo, $2 = \dfrac{d}{1 - \cos\frac{1}{3}\pi}$; $2 = \dfrac{d}{1 - \frac{1}{2}}$; $d = 1$. Uma equação da parábola é $r = \dfrac{1}{1 - \cos\theta}$.

71. Escolha os ptos. A em $(-500, 0)$ e B em $(500, 0)$. Seja o local da explosão em $P(x, y)$; então $|\overline{PB}| - |\overline{PA}| = 600$. Da Definição 10.6.1, o conjunto de pontos é uma hipérbole, tendo os focos A e B e $2a = 600$; $a = 300$. O centro da hipérbole está no ponto médio de AB, que é a origem, e $c = 500$. Assim, $b^2 = c^2 - a^2 = 250.000 - 90.000 = 160.000$ e uma equação é $\dfrac{x^2}{90.000} - \dfrac{y^2}{160.000} = 1$; $16x^2 - 9y^2 = 1.440.000$.

A explosão está mais próxima de A do que de B; logo, P está restrito ao ramo esquerdo da hipérbole.

73. Como $e = 1$, uma equação da parábola é $r = \dfrac{d}{1 - \cos\theta}$. Sejam $P_i(r_i, \theta_i)$ e $Q_i(q_i, \theta_i + \pi)$ os pontos extremos das cordas focais perpendiculares $(i = 1, 2)$. Como $P_1(r_1, \theta_1)$ e $P_2(r_2, \theta_2)$ estão sobre a parábola $r_1 = \dfrac{d}{1 - \cos\theta_1}$ e $r_2 = \dfrac{d}{1 - \cos\theta_2}$. Também, como $Q_1(q_1, \theta_1 + \pi)$ e $Q_2(q_2, \theta_2 + \pi)$ está sobre a parábola,

$$q_1 = \frac{d}{1 - \cos(\theta_1 + \pi)} = \frac{d}{1 + \cos\theta_1} \quad \text{e} \quad q_2 = \frac{d}{1 - \cos(\theta_2 + \pi)} = \frac{d}{1 + \cos\theta_2}$$

Então, $|\overline{P_1Q_1}| = r_1 + q_1 = \dfrac{d}{1 - \cos\theta_1} + \dfrac{d}{1 + \cos\theta_1} = \dfrac{2d}{\operatorname{sen}^2\theta_1}$ e $|\overline{P_2Q_2}| = \dfrac{2d}{\operatorname{sen}^2\theta_2}$. Como P_1Q_1 e P_2Q_2 são perpendiculares, $\theta_2 = \theta_1 \pm \frac{1}{2}\pi$. Portanto,

$$\frac{1}{|\overline{P_1Q_1}|} + \frac{1}{|\overline{P_2Q_2}|} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta_1 + \operatorname{sen}^2\theta_2}{2d} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta_1 + \cos^2\theta_1}{2d} = \frac{1}{2d}$$

75. $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 1}$. Aplicando a Definição **10.3.3** encontramos

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \to +\infty} [2\sqrt{x^2 - 1} - 2x] = \lim_{x \to +\infty} \frac{(2\sqrt{x^2 - 1} - 2x)(2\sqrt{x^2 - 1} + 2x)}{2\sqrt{x^2 - 1} + 2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-4}{2\sqrt{x^2 - 1} + 2x} = 0$$

Além disso, $2\sqrt{x^2 - 1} < 2x$ p/ todo $x \geq 1$. Assim, $y = 2x$ é uma assíntota do gráfico de f.

77. $\sqrt{x} \pm \sqrt{y} = \pm\sqrt{a}$; $x \pm 2\sqrt{xy} + y = a$; $\pm 2\sqrt{xy} = a - x - y$; $4xy = a^2 + x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + 2xy$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0$$

Para essa equação $A = 1$, $B = -2$, $C = 1$, e $B^2 - 4AC = 4 - 4 = 0$ o que representa uma parábola pelo Teorema **10.3.6**.

Nos Exercícios **79-85**, α e χ são as medidas dos ângulos do eixo polar e o raio vetor, respectivamente, à reta tangente.

79. $r = 3 - 3 \operatorname{sen} \theta$; $\frac{dr}{d\theta} = -3 \cos \theta$. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \theta(-3 \cos \theta) + (3 - 3 \operatorname{sen} \theta)}{-3 \cos \theta - (3 - 3 \operatorname{sen} \theta) \operatorname{tg} \theta} = \frac{\cos \theta(1 - 2 \operatorname{sen} \theta)}{2 \operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen} \theta - 1}$

A solução continua como no Exercício **10.9.13**.

81. Em $(1, \frac{1}{6}\pi)$, $r = \frac{1}{2} + \operatorname{sen} \theta = 1$, $\frac{dr}{d\theta} = \cos \theta = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \theta \frac{dr}{d\theta} + r}{\frac{dr}{d\theta} - r \operatorname{tg} \theta} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + 1}{\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1 \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{6}\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$$

83. As equações dadas são $r = -6 \cos \theta$ (1) e $r = 2(1 - \cos \theta)$ (3). Outra equação para o gráfico de (2) é $r = -2(1 + \cos \theta)$ (3). Resolvendo (1) e (2) simultaneamente, obtemos $\theta = \frac{2}{3}\pi$ e $\theta = \frac{4}{3}\pi$. Resolvendo (1) e (3) simultaneamente, obtemos $\theta = \frac{1}{3}\pi$ e $\theta = -\frac{1}{3}\pi$.

Os pontos de intersecção são $\left(3, \frac{2}{3}\pi\right)$, $\left(3, \frac{4}{3}\pi\right)$, e a origem.

Para (1), $\frac{dr}{d\theta} = 6 \operatorname{sen} \theta$. Assim, $\operatorname{tg} \chi_1 = \frac{r}{6 \operatorname{sen} \theta}$. Para (2), $\frac{dr}{d\theta} = 2 \operatorname{sen} \theta$. Assim, $\operatorname{tg} \chi_2 = \frac{r}{2 \operatorname{sen} \theta}$.

Seja β a medida em radianos do ângulo entre as retas tangentes no ponto dado.

Em $\left(3, \frac{2}{3}\pi\right)$, $\operatorname{tg} \chi_1 = \frac{3}{6 \operatorname{sen} \frac{2}{3}\pi} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; logo, $\chi_1 = \frac{1}{6}\pi$ e $\operatorname{tg} \chi_2 = \frac{3}{2 \operatorname{sen} \frac{2}{3}\pi} = \sqrt{3}$; logo, $\chi_2 = \frac{1}{3}\pi$. Então, $\beta = \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{6}\pi$. Em $\left(3, \frac{4}{3}\pi\right)$, $\operatorname{tg} \chi_1 = \frac{3}{6 \operatorname{sen} \frac{4}{3}\pi} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; logo, $\chi_1 = \frac{5}{6}\pi$ e $\operatorname{tg} \chi_2 = \frac{3}{2 \operatorname{sen} \frac{4}{3}\pi} = -\sqrt{3}$; logo, $\chi_2 = \frac{2}{3}\pi$. Então, $\beta = \frac{5}{6}\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{1}{6}\pi$. Na origem $\chi_1 = \frac{1}{2}\pi$ e $\chi_2 = 0$; logo, $\beta = \frac{1}{2}\pi$.

85. $r = \sqrt{2 \cos \frac{1}{2}\theta}$. Em $(1, \frac{2}{3}\pi)$, $r^2 = 2 \cos \frac{1}{2}\theta = 1$, $2r \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\operatorname{tg} \chi = \frac{r}{dr/d\theta} = \frac{r^2}{r(dr/d\theta)} = \frac{1}{-\frac{1}{4}\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Portanto, $\chi = \pi + \operatorname{tg}^{-1}(-4/\sqrt{3}) \approx 1,98$. Como $\chi + \theta = 1,98 + \pi \in [\pi, 2\pi)$, $\alpha = \chi + \theta - \pi = 0$.

CAPÍTULO ONZE

FORMAS INDETERMINADAS, INTEGRAIS IMPRÓPRIAS E A FÓRMULA DE TAYLOR

EXERCÍCIOS 11.1 A Forma Indeterminada 0/0

1. $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^2$. Então, $f'(x) = 3x^2$ e $g'(x) = 2x$. Desejamos encontrar todos os valores de z em $(0, 2)$ tais que

$$\frac{f(2) - f(0)}{g(2) - g(0)} = \frac{f'(z)}{g'(z)};\quad \frac{8 - 0}{4 - 0} = \frac{3z^2}{2z};\quad z = \frac{4}{3}$$

3. $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = \cos x$. Então, $f'(x) = \cos x$ e $g'(x) = -\text{sen } x$. Desejamos encontrar todos os valores de z em $(0, \pi)$ tais que

$$\frac{f(\pi) - f(0)}{g(\pi) - g(0)} = \frac{f'(z)}{g'(z)};\quad \frac{0 - 0}{-1 - 1} = \frac{\cos z}{-\text{sen } z};\quad -\text{cotg } z = 0;\quad z = \tfrac{1}{2}\pi$$

5. $f(x) = \sqrt{x + 5}$ e $g(x) = x + 3$. Então, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x + 5}}$ e $g'(x) = 1$. Desejamos encontrar todos os valores de z em $(-4, -1)$ tais que

$$\frac{f(-1) - f(-4)}{g(-1) - g(-4)} = \frac{f'(z)}{g'(z)};\quad \frac{2 - 1}{2 - (-1)} = \frac{1}{2\sqrt{z + 5}};\quad \sqrt{z + 5} = \frac{3}{2};\quad z + 5 = \frac{9}{4};\quad z = -\frac{11}{4}$$

7. $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} \text{tg } x = 0$. Pela regra de L'Hôpital $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\text{tg } x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sec^2 x} = \dfrac{1}{1} = 1$.

9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{sen}\dfrac{2}{x} = 0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Pela regra de L'Hôpital $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\text{sen}\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos\frac{2}{x}\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = 2\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\dfrac{2}{x} = 2$.

11. Como $\left(\dfrac{2}{e}\right)^{-1} > 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2^x}{e^x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{2}{e}\right)^x = +\infty$.

13. $\lim\limits_{x\to\pi/2} \ln(\text{sen } x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to\pi/2} (\pi - 2x)^2 = 0$. Pela regra de L'Hôpital

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\ln(\text{sen } x)}{(\pi - 2x)^2} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\frac{\cos x}{\text{sen } x}}{-4(\pi - 2x)} = -\frac{1}{4}\lim_{x\to\pi/2} \frac{\text{cotg } x}{\pi - 2x} = -\frac{1}{4}\lim_{x\to\pi/2} \frac{-\text{cosec}^2 x}{-2} = -\frac{1}{8}$$

Como $\lim\limits_{x\to\pi/2} \text{cotg } x = 0$ e $\lim\limits_{x\to\pi/2} (\pi - 2x) = 0$, aplicamos a regra de L'Hôpital outra vez.

15. $\lim\limits_{x\to 0} (2^x - 3^x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$. Pela regra de L'Hôpital $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x - 3^x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x(\ln 2) - 3^x(\ln 3)}{1} = \ln\dfrac{2}{3}$.

17. $\lim\limits_{\theta\to 0} (\theta - \text{sen } \theta) = 0$ e $\lim\limits_{\theta\to 0} \text{tg}^3\theta = 0$. Pela regra de L'Hôpital

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\theta - \text{sen } \theta}{\text{tg}^3\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{1 - \cos\theta}{3\text{tg}^2\theta\sec^2\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{1}{\sec^2\theta}\cdot\lim_{\theta\to 0} \frac{1 - \cos\theta}{3\text{tg}^2\theta} = 1\cdot\lim_{\theta\to 0} \frac{\text{sen }\theta}{6\text{tg }\theta\sec^2\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\cos^3\theta}{6} = \frac{1}{6}$$

Como $\lim\limits_{\theta\to 0} (1 - \cos\theta) = 0$ e $\lim\limits_{\theta\to 0} (3\text{tg}^2\theta) = 0$, aplicamos a regra de L'Hôpital outra vez.

19. $\lim_{z\to+\infty}(1-e^{1/z})=0$ e $\lim_{z\to+\infty}\frac{-3}{z}=0$. Pela regra de L'Hôpital

$$L=\lim_{z\to+\infty}\frac{1-e^{1/z}}{-\frac{3}{z}}=\lim_{z\to+\infty}\frac{-e^{1/z}\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{\frac{3}{z^2}}=\frac{1}{3}\lim_{z\to+\infty}e^{1/z}=\frac{1}{3}$$

De outro modo, seja $x=\frac{1}{z}$. Então, $L=\lim_{x\to0^+}\frac{1-e^x}{-3x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-e^x}{-3}=\frac{1}{3}$.

21. $\lim_{t\to0}\operatorname{sen}t=0$ e $\lim_{t\to0}\ln(2e^t-1)=0$. Pela regra de L'Hôpital $\lim_{t\to0}\frac{\operatorname{sen}t}{\ln(2e^t-1)}=\lim_{t\to0}\frac{\cos t}{\frac{2e^t}{2e^t-1}}=\frac{1}{2}$.

23. $\lim_{t\to0}\operatorname{sen}^2 t=0$ e $\lim_{t\to0}\operatorname{sen}t^2=0$. Pela regra de L'Hôpital

$$\lim_{t\to0}\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{sen}t^2}=\lim_{t\to0}\frac{2\operatorname{sen}t\cos t}{2t\cos t^2}=\lim_{t\to0}\frac{1}{\cos t^2}\cdot\lim_{t\to0}\frac{\operatorname{sen}2t}{2t}=1\cdot\lim_{t\to0}\frac{2\cos 2t}{2}=1$$

Como $\lim_{t\to0}\operatorname{sen}2t=0$ e $\lim_{t\to0}2t=0$, aplicamos a regra de L'Hôpital novamente.

25. $\lim_{x\to0}[(1+x)^{1/5}-(1-x)^{1/5}]=0$ e $\lim_{x\to0}[(1+x)^{1/3}-(1-x)^{1/3}]=0$. Pela regra de L'Hôpital

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{1/5}-(1-x)^{1/5}}{(1+x)^{1/3}-(1-x)^{1/3}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{5}(1+x)^{-4/5}+\frac{1}{5}(1-x)^{-4/5}}{\frac{1}{3}(1+x)^{-2/3}+\frac{1}{3}(1-x)^{-2/3}}=\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{5}$$

27. $\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos 2x}{1-\operatorname{sen}x}=\frac{1+\cos 2\pi}{1-\operatorname{sen}\pi}=\frac{1+1}{1-0}=2$

29. $\lim_{x\to0}(\cos x-\cosh x)=0$ e $\lim_{x\to0}x^2=0$. Pela regra de L'Hôpital

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cosh x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\operatorname{sen}x-\operatorname{senh}x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{-\cos x-\cosh x}{2}=-1$$

Como $\lim_{x\to0}(-\operatorname{sen}x-\operatorname{senh}x)=0$ e $\lim_{x\to0}2x=0$, aplicamos a regra de L'Hôpital novamente.

31. $\lim_{R\to0^+}E(1-e^{-Rt/L})=0$ e $\lim_{R\to0^+}R=0$, onde t, E e L são constantes. Pela regra de L'Hôpital

$$\lim_{R\to0^+}I=\lim_{R\to0^+}\frac{E(1-e^{-Rt/L})}{R}=\lim_{R\to0^+}\frac{E\left(\frac{t}{L}e^{-Rt/L}\right)}{1}=\frac{Et}{L}$$

33. Desejamos encontrar valores de a e b tais que $\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}3x+ax+bx^3}{x^3}=0$.

$\lim_{x\to0}(\operatorname{sen}3x+ax+bx^3)=0$ e $\lim_{x\to0}x^3=0$. Pela regra de L'Hôpital

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}3x+ax+bx^3}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{3\cos 3x+a+3bx^2}{3x^2}$$

$\lim_{x\to0}3x^2=0$. Como $\lim_{x\to0}(3\cos 3x+a+3b^2)=3+a$, podemos aplicar a regra de L'Hôpital se $a=-3$

Se $a\neq-3$ o limite dado não é 0. Seja $a=-3$ e temos

$$\lim_{x\to0}\frac{3\cos 3x-3+3bx^2}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-9\operatorname{sen}3x+6bx}{6x}=\lim_{x\to0}\frac{-27\cos 3x+6b}{6}=-27+6b$$

Como $\lim_{x\to0}(-9\operatorname{sen}3x+6bx)=0$ e $\lim_{x\to0}6x=0$, aplicamos a regra de L'Hôpital novamente. O limite será 0 se $-27+6b=0$; $b=\frac{9}{2}$. Assim, o limite dado é 0 se $a=-3$ e $b=\frac{9}{2}$.

35. Como $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, então $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ e então, pela parte (i), $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = L$. Além disso,

$\lim_{x\to a^-}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$; logo, pela parte (ii), $\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)}{g(x)} = L$. Portanto, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = L$.

37. $f(x) = \begin{cases}\frac{\cos x - 1}{x} & \text{se } x \neq 0\\ 0 & \text{se } x = 0\end{cases}$

(a) $\lim_{x\to 0}(\cos x - 1) = 0$ e $\lim_{x\to 0} x = 0$. Pela regra de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x}{1} = 0 = f(0)$$

Portanto, f é contínua em 0

(b) $f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x - 1)/x - 0}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{2} = -\frac{1}{2}$

Como $\lim_{x\to 0}(\cos x - 1) = 0$, $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$; e $\lim_{x\to 0}(-\operatorname{sen} x) = 0$, $\lim_{x\to 0} 2x = 0$; usamos a regra de L'Hôpital duas vezes.

39. $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} e^{x/10}$. Pela regra de L'Hôpital

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{10}}{e^x} = \left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x/10}}\right)^{10} = \left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x/10}/10}\right)^{10} = 0^{10} = 0$$

Logo, para x suficientemente grande $x^{10}/e^x < 1$, de modo que $x^{10} < e^x$.

EXERCÍCIOS 11.2 Outras Formas Indeterminadas

1. $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. Pela regra de L'Hôpital $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x} = 0$.

Como $\lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, aplicamos a regra de L'Hôpital novamente

3. $\lim_{x\to 1/2^-}\ln(1 - 2x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 1/2^-}\operatorname{tg}\pi x = +\infty$. Pela regra de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 1/2^-}\frac{\ln(1-2x)}{\operatorname{tg}\pi x} = \lim_{x\to 1/2^-}\frac{\frac{-2}{1-2x}}{\pi\sec^2\pi x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2\cos^2\pi x}{(1-2x)\pi} = \lim_{x\to 1/2^-}\frac{4\pi\cos\pi x\operatorname{sen}\pi x}{-2\pi} = 0$$

Como $\lim_{x\to 1/2^-}(-2\cos^2\pi x) = 0$ e $\lim_{x\to 1/2^-}(1-2x)\pi = 0$, aplicamos a regra de L'Hôpital novamente.

5. $\lim_{x\to 0^+} x = 0$ e $\lim_{x\to 0^+}\operatorname{cosec} x = +\infty$. Temos a forma indeterminada $0\cdot(+\infty)$. Então,

$$\lim_{x\to 0^+} x\operatorname{cosec} x = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$$

Note que $\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\operatorname{sen} x}$ também pode ser avaliada pela regra de L'Hôpital.

7. $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$. Pela regra de L'Hôpital $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$

9. $\lim_{x\to0^+} \operatorname{tg} x = 0$ de modo que $\lim_{x\to0^+} \operatorname{cotg} x = +\infty$, e $\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty$. Pela regra de L'Hôpital

$$\lim_{x\to0^+} \operatorname{tg} x(\ln x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x} = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\operatorname{cosec}^2 x} = -\lim_{x\to0^+} \operatorname{sen} x \cdot \lim_{x\to0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0 \cdot 1 = 0$$

11. $\lim_{x\to1}(x - 1 - \ln x) = 0$ e $\lim_{x\to1}(x - 1)\ln x = 0$. Pela regra de L'Hôpital

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to1} \frac{x - 1 - \ln x}{(x-1)\ln x} = \lim_{x\to1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} = \lim_{x\to1} \frac{x-1}{x\ln x + x - 1} = \lim_{x\to1} \frac{1}{\ln x + 2} = \frac{1}{2}$$

Como $\lim_{x\to1}(x - 1) = 0$ e $\lim_{x\to1}(x\ln x + x - 1) = 0$, aplicamos a regra de L'Hôpital novamente.

13. $\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty$ e $\lim_{x\to0^+} \operatorname{cosec} x = +\infty$. Pela regra de L'Hôpital

$$\lim_{x\to0^+} \ln x \operatorname{sen} x = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{cosec} x} = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x} = \lim_{x\to0^+} -\operatorname{tg} x \cdot \lim_{x\to0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0 \cdot 1 = 0$$

Portanto, $\ln \lim_{x\to0^+} x^{\operatorname{sen} x} = 0$, $\lim_{x\to0^+} x^{\operatorname{sen} x} = 1$.

15. $\lim_{x\to+\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 - x^2 + 2}) = \lim_{x\to+\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 - x^2 + 2}) \cdot \frac{x^2 + \sqrt{x^4 - x^2 + 2}}{x^2 + \sqrt{x^4 - x^2 + 2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 2}{x^2 + \sqrt{x^4 - x^2 + 2}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - x^{-2}}{1 + \sqrt{1 - x^{-2} + 2x^{-4}}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

17. $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$. Pela regra de L'Hôpital

$\lim_{x\to+\infty} \ln x^{1/x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$ Logo, $\ln \lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = 0$; $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = 1.$

19. $\lim_{x\to+\infty} 2\ln(e^x + x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$. Pela regra de L'Hôpital

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(e^x + x)^{2/x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln(e^x + x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2(e^x + 1)}{e^x + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x}{e^x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1 + e^{-x}} = 2$$

Como $\lim_{x\to+\infty} 2(e^x + 1) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} (e^x + x) = +\infty$, aplicamos a regra de L'Hôpital novamente

Portanto, $\ln \lim_{x\to+\infty} (e^x + x)^{2/x} = 2$; $\lim_{x\to+\infty} (e^x + x)^{2/x} = e^2$.

21. $\lim_{x\to0} \ln(1 + ax) = 0$ e $\lim_{x\to0} x = 0$. Pela regra de L'Hôpital

$$\lim_{x\to0} \ln(1 + ax)^{1/x} = \lim_{x\to0} \frac{\ln(1 + ax)}{x} = \lim_{x\to0} \frac{a}{1 + ax} = a$$

Portanto, $\ln \lim_{x\to0}(1 + ax)^{1/x} = a$; $\lim_{x\to0}(1 + ax)^{1/x} = e^a$.

23. $\lim_{x\to0^+} \ln \operatorname{sen} x = -\infty$ e $\lim_{x\to0^+} x^{-2} = +\infty$. Pela regra de L'Hôpital

$$\lim_{x\to0^+} \ln(\operatorname{sen} x)^{x^2} = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln \operatorname{sen} x}{x^{-2}} = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to0^+} \frac{x^2 \cos x}{-2} \cdot \lim_{x\to0^+} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 0 \cdot 1 = 0$$

Portanto, $\ln \lim_{x\to0^+} (\operatorname{sen} x)^{x^2} = 0$; $\lim_{x\to0^+} (\operatorname{sen} x)^{x^2} = 1$.

25. $\lim_{x \to 0} 2\ln(1 + \operatorname{senh} x) = 0$ e $\lim_{x \to 0} x = 0$. Pela regra de L'Hôpital.

$$\lim_{x \to 0} \ln(1 + \operatorname{senh} x)^{2/x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\ln(1 + \operatorname{senh} x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\cosh x}{1 + \operatorname{senh} x} = 2$$

Portanto, $\ln \lim_{x \to 0}(1 + \operatorname{senh} x)^{2/x} = 2$; $\lim_{x \to 0}(1 + \operatorname{senh} x)^{2/x} = e^2$.

27. $\lim_{x \to 0} 4(\ln \cos x + \frac{1}{2}x^2) = 0$ e $\lim_{x \to 0} x^4 = 0$. Pela regra de L'Hôpital

$$\lim_{x \to 0} \ln[(\cos x)e^{x^2/2}]^{4/x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{4(\ln \cos x + \frac{1}{2}x^2)}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{4\left(\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} + x\right)}{4x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x^3}$$

$\lim_{x \to 0}(x - \operatorname{tg} x) = 0$ e $\lim_{x \to 0} x^3 = 0$; logo, aplicamos a regra de L'Hôpital novamente e obtemos

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sec^2 x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{-\operatorname{tg}^2 x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-1}{3\cos^2 x} \cdot \left(\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 = -\frac{1}{3} \cdot 1^2 = -\frac{1}{3}$$

Portanto, $\ln \lim_{x \to 0}[(\cos x)e^{x^2/2}]^{4/x^4} = -\frac{1}{3}$; $\lim_{x \to 0}[(\cos x)e^{x^2/2}]^{4/x^4} = e^{-1/3}$.

29. $$\lim_{x \to +\infty} [(x^6 + 3x^5 + 4)^{1/6} - x] = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^6}\right)^{1/6} - 1}{\frac{1}{x}}$$

$\lim_{x \to +\infty}\left[\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^6}\right)^{1/6} - 1\right] = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Pela regra de L'Hôpital

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^6}\right)^{1/6} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{6}\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^6}\right)^{-5/6}\left(-\frac{3}{x^2} - \frac{24}{x^7}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty}\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^6}\right)^{-5/6}\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{x^5}\right) = \frac{1}{2}$$

31. Seja $y = \frac{1}{x}$. Então, $\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x}} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{e^y}$. $\lim_{y \to +\infty} y = +\infty$ e $\lim_{y \to +\infty} e^y = +\infty$.

Pela regra de L'Hôpital $\lim_{y \to +\infty} \frac{y}{e^y} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{e^y} = 0$.

33. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^{-2} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{0 + 1}} = 1$

35. $f(x) = \begin{cases} (1 - e^{4x})^x & \text{se } x < 0 \\ k & \text{se } 0 \le x \end{cases}$

Como $f(0) = k$ e $\lim_{x \to 0^+} f(x) = k$, então f será contínua em 0 se $\lim_{x \to 0^-} f(x) = k$.

$\lim_{x \to 0^-} \ln(1 - e^{4x}) = -\infty$ e $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$. Pela regra de L'Hôpital

$$\lim_{x \to 0^-} \ln f(x) = \lim_{x \to 0^-} x\ln(1 - e^{4x}) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\ln(1 - e^{4x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{-4e^{4x}}{1 - e^{4x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^-} \frac{4x^2}{e^{-4x} - 1} = \lim_{x \to 0^-} \frac{8x}{-4e^{-4x}} = 0$$

Como $\lim_{x \to 0^-} 4x^2 = 0$ e $\lim_{x \to 0^-}(e^{-4x} - 1) = 0$, aplicamos a regra de L'Hôpital novamente . Portanto,

$\ln \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$; $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$. Logo, f será contínua em 0 se $k = 1$.

37. $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{nx+1}{nx-1}\right) = \ln \lim_{x\to+\infty} \frac{n+\frac{1}{x}}{n-\frac{1}{x}} = \ln 1 = 0$ e $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$. Pela regra de L'Hôpital

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{nx+1}{nx-1}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\frac{nx+1}{nx-1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{n}{nx+1}-\frac{n}{nx-1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2nx^2}{n^2x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2n}{n^2-x^{-2}} = \frac{2}{n}$$

Portanto, $\ln 9 = \ln \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{nx+1}{nx-1}\right)^x = \frac{2}{n}$; $n = \frac{2}{\ln 9} = \frac{2}{\ln 3^2} = \frac{1}{\ln 3}$.

39. (a) Use limites laterais. Seja $t = \frac{1}{x^2}$, $\lim_{t\to+\infty} t = +\infty$ e $\lim_{t\to+\infty} e^{2t/n} = +\infty$. Pela regra de L'Hôpital

$$\lim_{x\to0^+} \frac{e^{-1/x^2}}{x^n} = \lim_{t\to+\infty}\frac{t^{n/2}}{e^t} = \left(\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^{2t/n}}\right)^{n/2} = \left(\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{(2/n)e^{2t/n}}\right)^{n/2} = 0^{n/2} = 0$$

pois n é positivo. Como n é um inteiro positivo

$\lim_{x\to0^-}\frac{e^{-1/x^2}}{x^n} = \pm\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-1/x^2}}{x^n} = 0$. Portanto, $\lim_{x\to0}\frac{e^{-1/x^2}}{x^n} = 0$.

(b) $\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} e^{-1/x^2} = 0$. $f'(x) = \frac{2e^{-1/x^2}}{x^3}$ e toda derivada de f é a soma de termos da forma $\frac{ke^{-1/x^2}}{x^n}$. Logo, os limites em 0 de todas as derivadas de f são 0.

41. $f(x) = x^{1/x} = e^{(\ln x)/x}$, $x > 0$. Veja a Figura 11.2.41.

$$f'(x) = e^{(\ln x/x)}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right) = x^{1/x}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)$$

Como $f'(x) > 0$ se $0 < x < e$ e $f'(x) < 0$ se $x > e$, o gráfico de $y = f(x)$ tem um valor máximo absoluto no ponto $(e, e^{1/e}) \approx (2,78; 1,44)$.

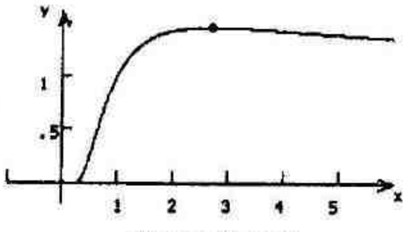


Figura 11.2.41

Pela regra de L'Hôpital $\lim_{x\to+\infty}\ln f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x} = 0$.

Portanto, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ e $y = 1$ é uma assíntota horizontal.

43. (a) $\lim_{x\to0^+} \text{sen}\, x = 0^+$ e $\lim_{x\to0^+}\text{cosec}\, x = +\infty$. Logo, $\lim_{x\to0^+}(\text{sen}\, x)^{\text{cosec}\, x} = 0$.

(b) $\lim_{x\to+\infty}\text{sen}\,\frac{1}{x} = 0^+$. Logo, $\lim_{x\to+\infty}\left(\text{sen}\,\frac{1}{x}\right)^x = 0$. $0^{+\infty}$ não é uma forma indeterminada.

EXERCÍCIOS 11.3 Integrais Impróprias com Extremos de Integração Infinitos

Nota: Se $f(x) \geq 1$ para $x \geq a$, então $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx \geq \lim_{b\to+\infty}\int_a^b 1\,dx = \lim_{b\to+\infty}(b-a) = +\infty$. Logo, a integral dada é divergente. Certamente, se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, a integral é divergente.

1. $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\Big[-e^{-x}\Big]_0^b = \lim_{b\to+\infty}(-e^{-b}+e^0) = 1$

3. $\int_{-\infty}^0 x5^{-x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 5^{-x^2}(x\,dx) = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left[\frac{5^{-x^2}}{\ln 5}\right]_a^0 = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1-5^{-a^2}}{\ln 5}\right) = -\frac{1}{2\ln 5}$

5. Seja $u = x$ e $dv = 2^{-x}dx$. Então, $du = dx$ e $v = -\frac{2^{-x}}{\ln 2}$. Portanto,

$$\int_0^{+\infty} x2^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b x2^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{x2^{-x}}{\ln 2} + \int\frac{2^{-x}}{\ln 2}dx\right]_0^b = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{x2^{-x}}{\ln 2} - \frac{2^{-x}}{(\ln 2)^2}\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{-\frac{b}{\ln 2} - \frac{1}{(\ln 2)^2}}{2^b} + \frac{1}{(\ln 2)^2}\right] = \lim_{b\to+\infty}\frac{-\frac{1}{\ln 2}}{2^b} + \frac{1}{(\ln 2)^2} = \frac{1}{(\ln 2)^2}$$

Como $\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{b}{\ln 2} - \frac{1}{(\ln 2)^2}\right) = -\infty$ e $\lim_{b\to+\infty} 2^b = +\infty$, aplicamos a regra de L'Hôpital.

7. Como $\lim_{x\to+\infty} x\cosh x = +\infty$, $\int_{-\infty}^{\infty} x\cosh x\,dx$ é divergente.

9. Como $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{9-x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1/3}}{\sqrt[3]{9x^{-2}-1}} = -\infty$, $\int_5^{+\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{9-x^2}}$ é divergente.

11 $\int_{\sqrt{3}}^{+\infty}\frac{3\,dx}{x^2+9} = 3\lim_{b\to+\infty}\int_{\sqrt{3}}^b\frac{dx}{x^2+9} = 3\cdot\frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{3}\Big]_{\sqrt{3}}^{+\infty} = \lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{tg}^{-1}\frac{b}{3} - \operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{3}\pi$

13. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^x dx + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}dx = \lim_{a\to-\infty}\Big[e^x\Big]_a^0 + \lim_{b\to+\infty}\Big[-e^{-x}\Big]_0^b = \lim_{a\to-\infty}(1-e^a) + \lim_{b\to+\infty}(-e^{-b}+1)$

$= 1 - 0 - 0 + 1 = 2$

15. $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_e^b\frac{1}{(\ln x)^2}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{\ln x}\right]_e^b = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln e}\right) = -0 + 1 = 1$

17. Como $\lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$, $\int_1^{+\infty}\ln x\,dx$ é divergente.

19. (a) $\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sen} x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0\operatorname{sen} x\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\operatorname{sen} x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\Big[-\cos x\Big]_a^0 + \lim_{b\to+\infty}\Big[-\cos x\Big]_0^b$

$= \lim_{a\to-\infty}(-1+\cos a) + \lim_{b\to+\infty}(-\cos b + 1)$

Como $\lim_{a\to-\infty}\cos a$ não existe e $\lim_{b\to+\infty}\cos b$ não existe; $\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sen} x\,dx$ diverge

(b) $\lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^r\operatorname{sen} x\,dx = \lim_{r\to+\infty}\Big[-\cos x\Big]_{-r}^r = \lim_{r\to+\infty}[-\cos r + \cos(-r)] = \lim_{r\to+\infty}(-\cos r + \cos r) = \lim_{r\to+\infty} 0 = 0$

21. (a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2} + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2} = \lim_{a\to-\infty}\left[-\frac{1}{2(1+x^2)}\right]_a^0 + \left[-\frac{1}{(1+x^2)}\right]_0^b$

$= \lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2(1+a^2)}\right) + \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2(1+b^2)}+\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 0$

(b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{x\,dx}{1+x^2} + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{x\,dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_a^0 + \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^b$

$\lim_{a\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}\ln(1+a^2)\right] + \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\ln(1+b^2)\right]$

Nenhum limite existe. Logo, a integral dada é divergente.

23. Seja A unidades a área da região limitada por $y = 1/(e^x + e^{-x})$, pelo eixo x, pela reta $x = a$ $(a < 0)$ e pela reta $x = b$ $(b > 0)$. Então,

$$A = \int_a^b \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_a^b \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \operatorname{tg}^{-1} e^x\Big]_a^b = \operatorname{tg}^{-1} e^b - \operatorname{tg}^{-1} e^a$$

Como $\lim_{b\to+\infty} \operatorname{tg}^{-1} e^b = \frac{1}{2}\pi$ e $\lim_{a\to-\infty} \operatorname{tg}^{-1} e^a = 0$, atribuímos $\frac{1}{2}\pi$ como a medida da área.

25. Considere a região limitada por $y = x^{-3/2}$ pelo eixo x, $x = 1$ e $x = b$ $(b > 1)$. Um elemento de volume é um disco circular centrado no eixo x, de raio $\xi_i^{-3/2}$. Então,

$$V = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=0}^{n} \pi(\xi_i^{-3/2})^2 \Delta_i x = \pi\int_1^b x^{-3} dx = -\frac{\pi}{2x^2}\Big]_1^b = \pi\left(-\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{2}\right)$$

Como $\lim_{b\to+\infty} V = \lim_{b\to+\infty} \pi\left(-\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\pi$, atribuímos $\frac{1}{2}\pi$ como a medida do volume.

27. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{60}e^{-x/60} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

(a) A probabilidade de que a vida de uma bateria não seja mais que 50 h é

$$P((-\infty, 50]) = \int_{-\infty}^{50} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^{50} \frac{1}{60}e^{-x/60}dx = 0 + \left[-e^{-x/60}\right]_0^{50} = -e^{-5/6} + 1 \approx 0{,}565$$

(b) A probabilidade de que a vida de uma bateria seja de pelo menos 75 h é

$$P([75, +\infty)) = \int_{75}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{75}^{b} \frac{1}{60}e^{-x/60}dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-e^{-x/60}\right]_{75}^{b} = \lim_{b\to+\infty}(-e^{-b/60} + e^{-5/4})$$

$$= e^{-5/4} \approx 0{,}287$$

29. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-x/3} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

(a) $P([1, 2]) = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{1}{3}e^{-x/3}dx = \left[-e^{-x/3}\right]_1^2 = -e^{-2/3} + e^{-1/3} \approx 0{,}203$

(b) $P([5, +\infty)) = \int_5^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_5^b \frac{1}{3}e^{-x/3}dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-e^{-x/3}\right]_5^b = \lim_{b\to+\infty}(-e^{-b/3} + e^{-5/3}) = e^{-5/3}$

$\approx 0{,}188$

31. $f(x) = \begin{cases} ke^{-kx} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} x f(x)\,dx = 0 + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b x(ke^{-kx})\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-xe^{-kx} - \frac{1}{k}e^{-kx}\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{b}{e^{kb}} - \frac{1}{ke^{kb}} + \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k}$$

Após integrar por partes. Logo, a média das probabilidades é $\frac{1}{k}$.

33. Seja $f(t) = 1000\cdot 2^{-t}$ e $i = 0,08$. Como $2e^{-t} = e^{-t\ln 2}$, o valor é

$$V = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-it}dt = \int_0^{+\infty} 1.000\cdot 2^{-t}e^{-0,08t}dt = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b 1.000e^{(-\ln 2-0,08)t}dt$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1.000}{-\ln 2 - 0,08}e^{(-\ln 2-0,08)t}\right]_0^b = -\frac{1.000}{\ln 2 + 0,08}\lim_{b\to+\infty}[e^{(-\ln 2-0,08)b} - 1]$$

$$= -\frac{1000}{\ln 2 + 0,08}[0 - 1] = 1293,41$$

Assim, o valor é \$1293,41.

35. Seja S o preço de venda justo. Então,

$$S = \int_0^{+\infty} Re^{-it}dt = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b Re^{-it}dt = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{-Re^{-it}}{i}\right]_0^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{-Re^{-ib}}{i} + \frac{R}{i}\right) = \left(0 + \frac{R}{i}\right) = \frac{R}{i}$$

37. Se $n = 1$, $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^n} = \lim_{b\to+\infty}\int_e^b \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\ln(\ln x)\Big]_e^b = \lim_{b\to+\infty}[\ln(\ln b) = +\infty$

Assim, a integral diverge. Se $n \neq 1$, então

$$\int_e^{+\infty}\frac{1}{(\ln x)^n}\cdot\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\frac{(\ln x)^{-n+1}}{-n+1}\Big]_e^b = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{(\ln b)^{1-n}}{1-n} + \frac{1}{n-1}\right] = \begin{cases}\frac{1}{n-1} & \text{se } n > 1\\ +\infty & \text{se } n < 1\end{cases}$$

Logo, a integral converge se e apenas se $n > 1$.

39. $I = \int_1^{+\infty}\left(\frac{nx^2}{x^3+1} - \frac{1}{3x+1}\right)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\left(\frac{n}{3}\cdot\frac{3x^2}{x^3+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{3x+1}\right)dx = \frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left[n\ln|x^3+1| - \ln|3x+1|\right]_1^b$

$$= \frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}[n\ln(b^3+1) - \ln(3b+1) - n\ln 2 + \ln 4]$$

Se $n \leq 0$ o limite é $-\infty$ e a integral é divergente. Se $n > 0$, então

$$I = \frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left[\ln\frac{(b^3+1)^n}{3b+1} + (2-n)\ln 2\right] = \frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left[\ln\frac{(b^{3-1/n} + b^{-1/n})^n}{3 + b^{-1}} + (2-n)\ln 2\right]$$

se $0 < n < \frac{1}{3}$ o numerador tende a 0 e o limite é $-\infty$ enquanto, se $n > \frac{1}{3}$ o numerador tende a $+\infty$ e o limite é $+\infty$; em qualquer dos casos, a integral não existe. Se $n = \frac{1}{3}$

$$I = \frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left[\ln\frac{(1+b^{-3})^{1/3}}{3+b^{-1}} + \frac{5}{3}\ln 2\right] = \frac{1}{3}\left[\ln\frac{1}{3} + \frac{5}{3}\ln 2\right] = \frac{1}{9}\left[3\ln\frac{1}{3} + 5\ln 2\right] = \frac{1}{9}\ln\frac{32}{27}$$

EXERCÍCIOS 11.4 Outras Integrais Impróprias

1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t \to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t \to 1^-} \left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^t = \lim_{t \to 1^-} (-2\sqrt{1-t} + 2) = 2$

3. $\int_{-5}^{-3} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-9}} = \frac{1}{2} \lim_{t \to -3^-} \int_{-5}^{t} 2x(x^2-9)^{-1/2}dx = \frac{1}{2} \lim_{t \to -3^-} \left[2\sqrt{x^2-9}\right]_{-5}^{t} = \lim_{t \to -3^-} [\sqrt{t^2-9} - \sqrt{(-5)^2-9}] = -4$

5. $\int_2^4 \frac{dt}{\sqrt{16-t^2}} = \lim_{t \to 4^-} \int_2^t \frac{dt}{\sqrt{16-t^2}} = \lim_{t \to 4^-} \left[\text{sen}^{-1}\frac{t}{4}\right]_2^t = \lim_{t \to 4^-} \left[\text{sen}^{-1}\frac{t}{4} - \text{sen}^{-1}\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{3}\pi$

7. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sec\theta\,d\theta = \lim_{t \to \pi/2^-} \int_{\pi/4}^{t} \sec\theta\,d\theta = \lim_{t \to \pi/2^-} \left[\ln|\sec\theta + \text{tg}\,\theta|\right]_{\pi/4}^{t}$

$= \lim_{t \to \pi/2^-} [\ln|\sec t + \text{tg}\,t| - |\sqrt{2} + 1|] = +\infty$

Portanto, a integral dada é divergente.

9. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{x^3} + \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^3} = \lim_{t \to 0^+} \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_t^1 + \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^b = \lim_{t \to 0^+} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2t^2}\right) + \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2}\right)$

Como, $\lim_{t \to 0^+} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2t^2}\right) = +\infty$, a integral dada é divergente.

11. $\int_0^{\pi/2} \frac{dy}{1-\text{sen}\,y} = \lim_{t \to \pi/2^-} \int_0^t \frac{1+\text{sen}\,y}{1+\text{sen}\,y} \cdot \frac{dy}{1-\text{sen}\,y} = \lim_{t \to \pi/2^-} \int_0^t \frac{1+\text{sen}\,y}{\cos^2 y} = \lim_{t \to \pi/2^-} \int_0^t (\sec^2 y + \sec y\ \text{tg}\,y)\,dy$

$= \lim_{t \to \pi/2^-} |\ \text{tg}\,t + \sec t - 1| = +\infty$

Portanto, a integral dada é divergente.

13. $\int_0^4 \frac{dx}{x^2-2x-3} = \int_0^4 \frac{dx}{(x-3)(x+1)} = \lim_{t \to 3^-} \int_0^t \frac{dx}{(x-3)(x+1)} + \lim_{t \to 3^+} \int_t^4 \frac{dx}{(x-3)(x+1)} = I + J$

Mas $I = \lim_{t \to 3^-} \frac{1}{4} \int_0^t \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \lim_{t \to 3^-} \left[\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|\right]_0^t = -\infty$ (J também não converge.)

Portanto, a integral dada é divergente.

15. Como $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, $\int_0^{+\infty} \ln x\,dx$ é divergente.

17. $\int_{-2}^{0} \frac{dw}{(w+1)^{1/3}} = \lim_{t \to -1^-} \int_{-2}^{t} \frac{dw}{(w+1)^{1/3}} + \lim_{t \to -1^+} \int_t^0 \frac{dw}{(w+1)^{1/3}} = \lim_{t \to -1^-} \left[\frac{3}{2}(w+1)^{2/3}\right]_{-2}^{t} + \lim_{t \to -1^+} \left[\frac{3}{2}(w+1)^{2/3}\right]_t^0$

$= \lim_{t \to -1^-} \left[\frac{3}{2}(t+1) - \frac{3}{2}\right] + \lim_{t \to -1^+} \left[\frac{3}{2} - \frac{3}{2}(t+1)\right] = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$

19. $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^3} = \lim_{t \to 0^-} \int_{-2}^{t} \frac{dx}{x^3} + \lim_{t \to 0^+} \int_t^2 \frac{dx}{x^3} = \lim_{t \to 0^-} \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{-2}^{t} + \lim_{t \to 0^+} \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_t^2 = \lim_{t \to 0^-} \left[-\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{8}\right] + \lim_{t \to 0^+} \left[-\frac{1}{8} + \frac{1}{2t^2}\right]$

Como nenhum desses limites existe, a integral dada é divergente.

21. $\displaystyle\int_{1/2}^{2} \frac{dz}{z(\ln z)^{1/5}} = \lim_{t\to 1^-}\int_{1/2}^{t}(\ln z)^{-1/5}\frac{dz}{z} + \lim_{t\to 1^+}\int_{t}^{2}(\ln z)^{-1/5}\frac{dz}{z}$

$$= \lim_{t\to 1^-}\left[\frac{5}{4}(\ln z)^{4/5}\right]_{1/2}^{t} + \lim_{t\to 1^+}\left[\frac{5}{4}(\ln z)^{4/5}\right]_{t}^{2}$$

$$= \frac{5}{4}\left[\lim_{t\to 1^-}(\ln t)^{4/5} - \left(\ln\frac{1}{2}\right)^{4/5} + (\ln 2)^{4/5} - \lim_{t\to 1^+}(\ln t)^{4/5}\right]$$

$$= \frac{5}{4}[0 - (-\ln 2)^{4/5} + (\ln 2)^{4/5} - 0] = 0$$

23. $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{t\to 1^+}\int_{t}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{t\to 1^+}\left[\sec^{-1}x\right]_{t}^{2} = \lim_{t\to 1^+}(\sec^{-1}2 - \sec^{-1}t) = \frac{1}{3}\pi - 0 = \frac{1}{3}\pi$

25. $\displaystyle\int_{1}^{3}\frac{dy}{\sqrt[3]{y-2}} = \lim_{t\to 2^-}\int_{1}^{t}(y-2)^{-1/3}dy + \lim_{t\to 2^+}\int_{t}^{3}(y-2)^{-1/3}dy = \lim_{t\to 2^-}\left[\frac{3}{2}(y-2)^{2/3}\right]_{1}^{t} + \lim_{t\to 2^+}\left[\frac{3}{2}(y-2)^{2/3}\right]_{t}^{3}$

$$= \lim_{t\to 2^-}\left[\frac{3}{2}(t-2) - \frac{3}{2}\right] + \lim_{t\to 2^+}\left[\frac{3}{2} - \frac{3}{2}(t-2)\right] = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$$

27. Se $n = -1$, $\displaystyle\int_{0}^{1}x^n dx = \lim_{t\to 0^+}\int_{t}^{1}\frac{dx}{x} = \lim_{t\to 0^+}\left[\ln|x|\right]_{t}^{1} = \lim_{t\to 0^+}[0 - \ln t] = +\infty$. Se $n \neq -1$, então

$$\int_{0}^{1}x^n dx = \lim_{t\to 0^+}\int_{t}^{1}x^n dx = \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{t}^{1} = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{t^{n+1}}{n+1}\right)$$

Se $n < -1$, o limite é novamento $+\infty$, mas, se $n > -1$, o limite é $\dfrac{1}{n+1}$ e a integral é convergente a esse valor.

29. Se $n = -1$, $\displaystyle\int_{0}^{1}x^n\ln^2 x\,dx = \lim_{t\to 0^+}\int_{t}^{1}\ln^2 x\frac{dx}{x} = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{3}\ln^3 x\Big]_{t}^{1} = \lim_{t\to 0^+}-\frac{1}{3}\ln^3 t = +\infty$.

Se $n \neq -1$, usamos a integração por partes duas vezes e obtemos

$$\int_{0}^{1}x^n\ln^2 x\,dx = \lim_{t\to 0^+}\int_{t}^{1}x^n\ln^2 x\,dx = \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{x^{n+1}\ln^2 x}{n+1} - \frac{2x^{n+1}\ln x}{(n+1)^2} + \frac{2x^{n+1}}{(n+1)^3}\right]_{t}^{1}$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{2}{(n+1)^3} - \frac{t^{n+1}\ln^2 t}{n+1} + \frac{2t^{n+1}\ln t}{(n+1)^2} - \frac{2t^{n+1}}{(n+1)^3}\right]$$

Se $n < -1$, o limite é novamente $+\infty$, mas, se $n > -1$, o limite é $\dfrac{2}{(n+1)^3}$ e a integral é convergente para esse valor.

31. Considere a região limitada por $y = x^{-1/3}$, $x = t$ $(t > 0)$, $x = 8$, e pelo eixo x. Um elemento de volume é um disco circular centrado no eixo x, $x \in [t, 8]$, de raio $\xi_i^{-1/3}$. Se V unidades cúbicas representarem o volume do sólido dado, então

$$V = \lim_{t\to 0^+}\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\pi(\xi_i^{-1/3})^2\Delta_i x = \lim_{t\to 0^+}\pi\int_{t}^{8}x^{-2/3}dx = \pi\lim_{t\to 0^+}\left[3x^{1/3}\right]_{t}^{8} = \pi\lim_{t\to 0^+}[6 - 3t^{1/3}] = 6\pi$$

33. Uma equação do quarto de circunferência no primeiro quadrante é $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. Então, $y' = -x/\sqrt{a^2 - x^2}$. Se L unidades for a circunferência do círculo,

$$L = 4\int_{0}^{a}\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}\,dx = 4a\lim_{t\to 0^+}\int_{t}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 4a\lim_{t\to 0^+}\left[\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}\right]_{t}^{a} = 4a\lim_{t\to 0^+}\left(\operatorname{sen}^{-1}1 - \operatorname{sen}^{-1}\frac{t}{a}\right)$$

$$= 4a\cdot\tfrac{1}{2}\pi = 2\pi a$$

EXERCÍCIOS 11.5 A Fórmula de Taylor

1. $f(x) = (x-2)^{-1}$; $a = 1$; $n = 3$

$f'(x) = -(x-2)^{-2}$, $f''(x) = 2(x-2)^{-3}$, $f'''(x) = -6(x-2)^{-4}$, $f^{(4)}(x) = 24(x-2)^{-5}$

$f(1) = -1$, $f'(1) = -1$, $\dfrac{f''(1)}{2!} = \dfrac{-2}{2} = -1$, $\dfrac{f'''(1)}{3!} = \dfrac{-6}{6} = -1$, $\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!} = \dfrac{24(\xi-2)^{-5}}{24} = \dfrac{1}{(\xi-2)^5}$

$P_3(x) = -1 - (x-1) - (x-1)^2 - (x-1)^3$; $R_3(x) = \dfrac{(x-1)^4}{(\xi-2)^5}$ onde ξ está entre 1 e x.

3. $f(x) = x^{3/2}$; $a = 4$; $n = 3$

$f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$, $f''(x) = \frac{3}{4}x^{-1/2}$, $f'''(x) = -\frac{3}{8}x^{-3/2}$, $f^{(4)}(x) = \frac{9}{16}x^{-5/2}$

$f(4) = 8$, $f'(4) = 3$, $\dfrac{f''(4)}{2!} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{8} = \dfrac{3}{16}$, $\dfrac{f'''(4)}{3!} = \dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{3}{64}\right) = -\dfrac{1}{128}$, $\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!} = \dfrac{1}{24}\left(\dfrac{9}{16}\xi^{-5/2}\right)$

$P_3(x) = 8 + 3(x-4) + \frac{3}{16}(x-4)^2 - \frac{1}{128}(x-4)^3$; $R_3(x) = \dfrac{3(x-4)^4}{128\xi^{5/2}}$ onde ξ está entre 4 e x.

5. $f(x) = \operatorname{sen} x$; $a = \frac{1}{6}\pi$; $n = 3$

$f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\operatorname{sen} x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x$

$f(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}$, $f'(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\dfrac{f''(\frac{1}{6}\pi)}{2!} = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{f'''(\frac{1}{6}\pi)}{3!} = \dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{2}\sqrt{3}\right) = -\dfrac{1}{12}\sqrt{3}$, $\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!} = \dfrac{\operatorname{sen}\xi}{24}$

$P_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}(x - \frac{1}{6}\pi) - \frac{1}{4}(x - \frac{1}{6}\pi)^2 - \frac{1}{12}\sqrt{3}(x - \frac{1}{6}\pi)^3$

$R_3(x) = \dfrac{\operatorname{sen}\xi}{24}(x - \frac{1}{6}\pi)^4$ onde ξ está entre $\frac{1}{6}\pi$ e x.

7. $f(x) = \operatorname{senh} x$; $a = 0$; $n = 4$

$f'(x) = \cosh x$, $f''(x) = \operatorname{senh} x$, $f'''(x) = \cosh x$, $f^{(4)}(x) = \operatorname{senh} x$, $f^{(5)}(x) = \cosh x$

$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $\dfrac{f''(0)}{2!} = 0$, $\dfrac{f'''(0)}{3!} = \dfrac{1}{6}$, $\dfrac{f^{(4)}(0)}{4!} = 0$, $\dfrac{f^{(5)}(\xi)}{5!} = \dfrac{\cosh\xi}{120}$

$P_4(x) = 0 + x + 0 + \frac{1}{6}x^3 + 0 = x + \frac{1}{6}x^3$; $R_4 = \dfrac{\cosh\xi}{120}x^5$ onde ξ está entre 0 e x.

9. $f(x) = \ln x$; $a = 1$; $n = 3$

$f'(x) = x^{-1}$, $f''(x) = -x^{-2}$, $f'''(x) = 2x^{-3}$, $f^{(4)}(x) = -6x^{-4}$

$f(1) = 0$, $f'(1) = 1$, $\dfrac{f''(1)}{2!} = \dfrac{-1}{2}$, $\dfrac{f'''(1)}{3!} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!} = \dfrac{-6\xi^{-4}}{24} = -\dfrac{1}{4}\xi^{-4}$

$P_3(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$; $R_3(x) = -\frac{1}{4}\xi^{-4}(x-1)^4$ onde ξ está entre 1 e x.

11. $f(x) = \ln\cos x$; $a = \frac{1}{3}\pi$; $n = 3$

$f'(x) = \dfrac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$, $f''(x) = -\sec^2 x$, $f'''(x) = -2\sec^2 x \operatorname{tg} x$, $f^{(4)}(x) = -4\sec^2 x \operatorname{tg}^2 x - 2\sec^4 x$

$f(\frac{1}{3}\pi) = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$, $f'(\frac{1}{3}\pi) = -\sqrt{3}$, $\dfrac{f''(\frac{1}{3}\pi)}{2!} = \dfrac{-4}{2} = -2$, $\dfrac{f'''(\frac{1}{3}\pi)}{3!} = \dfrac{-8\sqrt{3}}{6} = -\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$

$P_3(x) = -\ln 2 - \sqrt{3}(x - \frac{1}{3}\pi) - 2(x - \frac{1}{3}\pi)^2 - \frac{4}{3}\sqrt{3}(x - \frac{1}{3}\pi)^3$

$R_3(x) = \frac{1}{24}(-4\sec^2\xi \operatorname{tg}^2\xi - 2\sec^4\xi)(x - \frac{1}{3}\pi)^4 = -\frac{1}{12}(2\sec^2\xi \operatorname{tg}^2\xi + \sec^4\xi)(x - \frac{1}{3}\pi)^4$

onde ξ está entre $\frac{1}{3}\pi$ e x.

13. $f(x) = (1+x)^{3/2}$; $a = 0$; $n = 3$

$f'(x) = \frac{3}{2}(1+x)^{1/2}$, $f''(x) = \frac{3}{4}(1+x)^{-1/2}$, $f'''(x) = -\frac{3}{8}(1+x)^{-3/2}$, $f^{(4)}(x) = \frac{9}{16}(1+x)^{-5/2}$

$f(0) = 1$, $f'(0) = \frac{3}{2}$, $\frac{f''(0)}{2!} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$, $\frac{f'''(0)}{3!} = \frac{1}{6}\left(-\frac{3}{8}\right) = -\frac{1}{16}$, $\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} = \frac{1}{24}\left[\frac{9}{16}(1+\xi)^{-5/2}\right]$

$P_3(x) = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3$; $R_3(x) = \frac{3}{128}(1+\xi)^{-5/2}x^4$ onde ξ está entre 0 e x.

15. $f(x) = e^x$; $a = 1$; $|\text{erro}| < 0{,}000\,005$

Para todo n, $f^{(n)}(x) = e^x$, $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}$. $P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$.

$e = e^1 \approx P_9(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + \frac{1}{40.320} + \frac{1}{362.880} = 2{,}718282$

com $|\text{erro}| = \frac{e^{\xi}}{10!}1^{10} < \frac{e^1}{10!} < \frac{4}{10!} = 0{,}000001$ como e^x é crescente e ξ está entre

0 e 1. Além disso, $\ln 4 = \int_1^4 \frac{dt}{t} > \int_1^2 \frac{dt}{t} + \int_2^3 \frac{dt}{t} + \int_3^4 \frac{dt}{t} > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 = \ln e$ implica que $e < 4$.

Assim, até cinco casas decimais, e é 2,71828.

17. $f(x) = \cos x$; $a = 0$; $n = 3$; $|x| < 0{,}1$

$f'(x) = -\operatorname{sen} x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \operatorname{sen} x$, $f^{(4)}(x) = \cos x$

$f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $\frac{f''(0)}{2!} = \frac{1}{2}$, $\frac{f'''(0)}{3!} = 0$, $\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} = \frac{\cos\xi}{24}$

$P_3(x) = 1 + 0 - \frac{1}{2}x^2 + 0 = 1 - \frac{1}{2}x^2$ e $|\text{erro}| = \left|\frac{\cos\xi}{24}x^4\right| \le \frac{1}{24}(0{,}1)^4 < 0{,}000\,005$.

19. Usando o polinômio de Taylor no Exercício 5, temos

$\operatorname{sen} 31° = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) \approx P_3\left(\frac{1}{6}\pi + 0{,}0175\right)$

$\approx 0{,}5000 + 0{,}8660(0{,}0175) - 0{,}2500(0{,}0175)^2 - 0{,}2887(0{,}0175)^3 \approx 0{,}515$

21. $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$; $a = 0$; $x = \frac{1}{11}$; $|\text{erro}| < 0{,}00005$

$f'(x) = (1+x)^{-1} + (1-x)^{-1}$, $f''(x) = -(1+x)^{-2} + (1-x)^{-2}$, $f'''(x) = 2(1+x)^{-3} + 2(1-x)^{-3}$,

$f^{(4)}(x) = -6(1+x)^{-4} + 6(1-x)^{-4}$, $f^{(5)}(x) = 24(1+x)^{-5} + 24(1-x)^{-5}$

$f(0) = 0$, $f'(0) = 2$, $\frac{f''(0)}{2!} = 0$, $\frac{f'''(0)}{3!} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = 0$, $\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} = \frac{1}{5}[(1+\xi)^{-5} + (1-\xi)^{-5}]$

$P_4(x) = 2x + \frac{2}{3}x^3$, $\ln 1{,}2 = f\left(\frac{1}{11}\right) \approx P_4\left(\frac{1}{11}\right) = 2\cdot\frac{1}{11} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{11}\right)^3 = 0{,}182319 \approx 0{,}1823$

Com $|\text{erro}| = \frac{1}{5}[(1+\xi)^{-5} + (1-\xi)^{-5}]\left(\frac{1}{11}\right)^5 < \left[1 + \frac{1}{(10/11)^5}\right]\frac{1}{11^5} = \frac{1}{11^5} + \frac{1}{10^5} = 0{,}000016$

Como ξ está entre 0 e $1/11$.

23. Do Exercício 22 se $0 \leq u \leq \frac{1}{2}$, $\left|\text{sen } u - \left(u - \frac{1}{6}u^3\right)\right| < \frac{1}{3840}$. Seja $u = x^2$. Portanto,

se $0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ então $\left|\text{sen } x^2 - \left(x^2 - \frac{1}{6}x^6\right)\right| < \frac{1}{3840}$ de modo que

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \text{sen } x^2 dx \approx \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(x^2 - \frac{1}{6}x^6\right)dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{42}x^7\Big]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^{3/2}} - \frac{1}{42}\cdot\frac{1}{2^{7/2}} = 0{,}115747$$

com $|\text{erro}| < \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{3840}dx = \frac{1}{7680}\sqrt{2} = 0{,}000184$.

De fato, a solução do Exercício 22 mostra $\left|\text{sen } u - \left(u - \frac{1}{6}u^3\right)\right| = \frac{|\text{sen }\xi|}{120}u^5 < \frac{u^5}{120}$ de modo que

$\left|\text{sen } x^2 - \left(x^2 - \frac{1}{6}x^6\right)\right| < \frac{x^{10}}{120}$ e $|\text{erro}| < \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^{10}}{120}dx = \frac{x^{11}}{1320}\Big]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{1320}\cdot\frac{\sqrt{2}}{64} = 0{,}000017$.

25. $f(x) = (1+x)^{-1/2}$, $f'(x) = -\frac{1}{2}(1+x)^{-3/2}$, $f''(x) = \frac{3}{4}(1+x)^{-5/2}$.

$f(0) = 1$, $f'(0) = -\frac{1}{2}$, $\frac{f''(\xi)}{2!} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}(1+\xi)^{-5/2}$

$P_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x$ e $R_1(x) = \frac{3}{8}(1+\xi)^{-5/2}x^2$ onde ξ está entre 0 e x.

Como $-0{,}1 \leq x \leq 0$, então $|R_1(x)| \leq \frac{3}{8}(0{,}9)^{-5/2}(0{,}1)^2 = 0{,}00488 < 0{,}005$.

Logo, a fórmula $(1+x)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ é exata até duas casas decimais se $-0{,}1 \leq x \leq 0$.

27. Traçando esboços de $y = \text{cotg } x$ e $y = mx$ no mesmo conjunto de eixos, notamos que se m é positivo e perto de 0 os gráficos, interceptam-se perto do ponto $(\frac{1}{2}\pi, 0)$.

Seja $f(x) = \text{cotg } x - mx$; $a = \frac{1}{2}\pi$; $n = 2$. Então, $f'(x) = -\text{cosec}^2 x - m$ e $f''(x) = 2\text{cosec}^2 x \text{ cotg } x$.

$f(\frac{1}{2}\pi) = -\frac{1}{2}\pi m$, $f'(\frac{1}{2}\pi) = -1 - m$, $f''(\frac{1}{2}\pi)/2! = 0$. $P_2(x) = -\frac{1}{2}\pi - (1+m)(x - \frac{1}{2}\pi)$

Para resolver $\text{cotg } x = mx$ aproximadamente, resolvemos $P_2(x) = 0$. Então,

$$-\tfrac{1}{2}\pi m - (1+m)x + \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\pi m = 0;\ \tfrac{1}{2}\pi = (1+m)x;\ x = \frac{\frac{1}{2}\pi}{1+m}$$

Usando o método de Newton com $x_1 = \frac{1}{2}\pi$ encontramos $x_2 = \frac{\frac{1}{2}\pi}{1+m}$ outra vez.

29. $f(x) = P(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1$; $a = 1$; $n = 4$

$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 4x - 3$, $f''(x) = 12x^2 - 6x + 4$, $f'''(x) = 24x - 6$, $f^{(4)}(x) = 24$, $f^{(5)}(x) = 0$

$f(1) = 0$, $f'(1) = 2$, $\frac{f''(1)}{2!} = \frac{10}{2} = 5$, $\frac{f'''(1)}{3!} = \frac{18}{6} = 3$, $\frac{f^{(4)}(1)}{4!} = \frac{24}{24} = 1$, $\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} = 0$

$P_4(x) = 2(x-1) + 5(x-1)^2 + 3(x-1)^3 + (x-1)^4 = P(x)$ Como $|\text{erro}| = 0$.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 11

1. $\lim_{x \to 0^+} \text{tgh } 2x = 0$ e $\lim_{x \to 0^+} \text{senh}^2 x = 0$. Pela regra de L'Hôpital $\lim_{x \to 0^+} \frac{\text{tgh } 2x}{\text{senh}^2 x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2 \text{sech}^2 2x}{2 \text{senh } x \cosh x} = +\infty$

3. Usamos $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\text{sen } x} = 1$ para simplificar as derivadas do denominador

$$L = \lim_{x \to 0} \left(\text{cosec}^2 x - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \text{sen}^2 x}{x^2 \text{sen}^2 x} = \left(\lim_{x \to 0} \frac{x}{\text{sen } x} \right)^2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \text{sen}^2 x}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \text{sen}^2 x}{x^4}$$

$\lim_{x \to 0} (x^2 - \text{sen}^2 x) = 0$ e $\lim_{x \to 0} x^4 = 0$. Pela regra de L'Hôpital

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{2x - 2 \text{ sen } x \cos x}{4x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{2x - \text{sen } 2x}{4x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{2 - 2 \cos 2x}{12x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{4 \text{ sen } 2x}{24x} = \lim_{x \to 0} \frac{8 \cos 2x}{24} = \frac{1}{3}$$

Os numeradores e denominadores tendem a 0; logo, usamos a regra de L'Hôpital mais três vez

5. $$\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{e^{2t}}{t}\right)}{t^{1/2}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln\left[e^t\left(e^{-t} + \frac{e^t}{t}\right)\right]}{t^{1/2}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t + \ln\left(e^{-t} + \frac{e^t}{t}\right)}{t^{1/2}} = \lim_{t \to +\infty} \left[t^{1/2} + \frac{\ln\left(e^{-t} + \frac{e^t}{t}\right)}{t^{1/2}} \right] = +\infty$$

O segundo termo é positivo pois $e^t > t$.

7. $\lim_{x \to \pi/2} 2 \ln \text{sen } x = 0$ e $\lim_{x \to \pi/2} \text{cotg } x = 0$. Pela regra de L'Hôpital

$$\lim_{x \to \pi/2} \ln(\text{sen}^2 x)^{\text{tg } x} = \lim_{x \to \pi/2} \text{tg } x \ln \text{sen}^2 x = \lim_{x \to \pi/2} \frac{2 \ln \text{sen} x}{\text{cotg} x} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{\frac{2 \cos x}{\text{sen } x}}{-\text{cosec}^2 x} = \lim_{x \to \pi/2} (-2 \text{ sen } x \cos x) = 0$$

Assim, $\ln \lim_{x \to \pi/2} (\text{sen}^2 x)^{\text{tg } x} = 0$; $\lim_{x \to \pi/2} (\text{sen}^2 x)^{\text{tg } x} = 1$.

9. $\lim_{y \to 0} \text{sen } 2y = 0$ e $\lim_{y \to 0} (y - \text{sen } 5y) = 0$. Pela regra de L'Hôpital $\lim_{y \to 0} \frac{\text{sen } 2y}{y - \text{sen } 5y} = \lim_{y \to 0} \frac{2 \cos 2y}{1 - 5 \cos 5y} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$

11. $\lim_{t \to 0^-} 3 \ln(1 + 4t) = 0$ e $\lim_{t \to 0^-} t = 0$. Pela regra de L'Hôpital

$$\lim_{t \to 0^-} \ln(1 + 4t)^{3/t} = \lim_{t \to 0^-} \frac{3 \ln(1 + 4t)}{t} = \lim_{t \to 0^-} \frac{12}{1 + 4t} = 12$$

Assim, $\ln \lim_{t \to 0^-} (1 + 4t)^{3/t} = 12$; $\lim_{t \to 0^-} (1 + 4t)^{3/t} = e^{12}$.

13. Como $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, então $\lim_{x \to +\infty} (x - \ln x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$. Portanto,

$\lim_{x \to +\infty} \ln(x - \ln x) = +\infty$, e $\lim_{x \to +\infty} \ln(\ln x) = +\infty$. Pela regra de L'Hôpital

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln(x - \ln x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x \ln x}}{\frac{x - 1}{x - \ln x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - \ln x}{x(x - 1) \ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{\ln x}{x}}{(x - 1) \ln x} = 0$$

15. $$\lim_{\theta \to \pi/2} \frac{\text{tg } \theta + 3}{\sec \theta - 1} = \lim_{\theta \to \pi/2} \frac{\text{sen } \theta + 3 \cos \theta}{1 - \cos \theta} = 1$$

17. Como $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ então $\lim_{x \to +\infty} \ln(e^x - x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = +\infty$. Pela regra de L'Hôpital

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(e^x - x)^{1/x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(e^x - x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x - x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 - x/e^x} = 1$$

Assim, $\ln \lim_{x \to +\infty} (e^x - x)^{1/x} = 1$; $\lim_{x \to +\infty} (e^x - x)^{1/x} = e$.

19. $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{2x+3} = \lim_{t\to -3/2^-} \int_{-2}^{t} \frac{dx}{2x+3} + \lim_{t\to -3/2^+} \int_{t}^{0} \frac{dx}{2x+3} = \lim_{t\to -3/2^-} \left[\frac{1}{2}\ln|2x+3|\right]_{-2}^{t} + \lim_{t\to -3/2^+} \left[\frac{1}{2}\ln|2x+3|\right]_{t}^{0}$

$= \lim_{t\to -3/2^-} \frac{1}{2}\ln|2t+3| + \lim_{t\to -3/2^+} \left[\frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln|2t+3|\right]$

Como nenhum desses limites existe, a integral dada é divergente.

21. $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x-2)^2} = \lim_{a\to -\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{(x-2)^2} = \lim_{a\to -\infty} \left[-\frac{1}{x-2}\right]_{a}^{0} = \lim_{a\to -\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{a-2}\right) = \frac{1}{2}$

23. $\int_{0}^{\pi/4} \cot g^2 \theta \, d\theta = \lim_{t\to 0^+} \int_{t}^{\pi/4} (\operatorname{cosec}^2 \theta - 1)\, d\theta = \lim_{t\to 0^+} \left[-\cot g\, \theta - \theta\right]_{t}^{\pi/4} = \lim_{t\to 0^+} \left(-1 - \frac{\pi}{4} + \cot g\, t + t\right) = +\infty$

Portanto, a integral dada é divergente.

25. $\int_{-\infty}^{3} 4^x dx = \lim_{a\to -\infty} \int_{a}^{3} 4^x dx = \lim_{a\to -\infty} \left[\frac{4^x}{\ln 4}\right]_{a}^{3} = \lim_{a\to -\infty} \left(\frac{4^3}{\ln 4} - \frac{4^a}{\ln 4}\right) = \frac{64}{2\ln 2} = \frac{32}{\ln 2}$

27. $\int_{0}^{1} \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \lim_{t\to 0^+} \int_{t}^{1} (\ln x)^2 \frac{dx}{x} = \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{(\ln x)^3}{3}\right]_{t}^{1} = \lim_{t\to 0^+} \left[-\frac{(\ln t)^3}{3}\right] = +\infty$

Portanto, a integral dada é divergente.

29. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4x^2+4x+5} = \lim_{a\to -\infty} \int_{a}^{-1/2} \frac{dx}{(2x+1)^2+4} + \lim_{b\to +\infty} \int_{-1/2}^{b} \frac{dx}{(2x+1)^2+4}$

$= \lim_{a\to -\infty} \frac{1}{4}\ \operatorname{tg}^{-1}\left(x + \frac{1}{2}\right)\Big]_{a}^{-1/2} + \lim_{b\to +\infty} \frac{1}{4}\ \operatorname{tg}^{-1}\left(x + \frac{1}{2}\right)\Big]_{-1/2}^{b}$

$= -\frac{1}{4} \lim_{a\to -\infty} \operatorname{tg}^{-1}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} \lim_{b\to +\infty} \operatorname{tg}^{-1}\left(b + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\pi\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{4}\pi$

31. Como $x \in [0, 1]$, $1 + x^2 \le 2$. Portanto, pelo Teorema 5.6.8

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{x+x^3} = \lim_{t\to 0^+} \int_{t}^{1} \frac{dx}{x(1+x^2)} \ge \lim_{t\to 0^+} \int_{t}^{1} \frac{dx}{2x} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{2}\ln|x|\Big]_{t}^{1} = -\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{2}\ln t = +\infty$$

Logo, a integral dada é divergente.

33. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{2x}}{2x} & \text{se } x \neq 0 \\ -1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(a) $\lim_{x\to 0}(1 - e^{2x}) = 0$ e $\lim_{x\to 0} 2x = 0$. Pela regra de L'Hôpital $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1-e^{2x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2e^{2x}}{2} = -1$

Como $\lim_{x\to 0} f(x) = -1 = f(0)$ então f é contínua em 0.

(b) $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-e^{2x}}{2x} - (-1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{2x} + 2x}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2e^{2x}+2}{4x} = \lim_{x\to 0} \frac{-4e^{2x}}{4} = -1$

Os numeradores e denominadores aproximam-se de zero; logo, usamos a regra de L'Hôpital duas vezes.

35. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{2x} - e^{-2x}} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x \to 0}(e^{x} - e^{-x}) = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0}(e^{2x} - e^{-2x}) = 0$. Pela regra de L'Hôpital

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{2x} - e^{-2x}} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x} + e^{-x}}{2e^{2x} + 2e^{-2x}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Mas $f(0) = 1$. Portanto, f não é contínua em 0.

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{2x} - e^{-2x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{-x} - e^{-3x}}{1 - e^{-4x}} = 0$

37. (a) Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{senh} x \, dx = +\infty$, $\int_0^{+\infty} \operatorname{senh} x \, dx$, e então $\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{senh} x \, dx$, é divergente

(b) $\lim\limits_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} \operatorname{senh} x \, dx = \lim\limits_{r \to +\infty} \Big[\cosh x\Big]_{-r}^{r} = \lim\limits_{r \to +\infty} [\cosh r - \cosh(-r)] = \lim\limits_{r \to +\infty} [\cosh r - \cosh r] = \lim\limits_{r \to +\infty} 0 = 0.$

39. $f(x) = \cos x$; $a = 0$; $n = 6$

$f'(x) = -\operatorname{sen} x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \operatorname{sen} x$, $f^{(4)}(x) = \cos x$, $f^{(5)}(x) = -\operatorname{sen} x$, $f^{(6)}(x) = -\cos x$

$f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $\dfrac{f''(0)}{2!} = \dfrac{-1}{2}$, $\dfrac{f'''(0)}{3!} = 0$, $\dfrac{f^{(4)}(0)}{4!} = \dfrac{1}{24}$, $\dfrac{f^{(5)}(0)}{5!} = 0$, $\dfrac{f^{(6)}(0)}{6!} = \dfrac{-1}{72}$

$P_6(x) = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{24}x^4 - \dfrac{1}{720}x^6$

Como $f^{(7)}(x) = \operatorname{sen} x$, então $R_6(x) = \dfrac{1}{5040} \operatorname{sen} \xi \, x^7$ onde ξ está entre 0 e x.

41. $f(x) = x^{-1/2}$; $a = 9$; $n = 4$

$f'(x) = -\dfrac{1}{2}x^{-3/2}$, $f''(x) = \dfrac{3}{4}x^{-5/2}$, $f'''(x) = -\dfrac{15}{8}x^{-7/2}$, $f^{(4)}(x) = \dfrac{105}{16}x^{-9/2}$

$f(9) = \dfrac{1}{3}$, $f'(9) = \dfrac{-1}{2 \cdot 27} = -\dfrac{1}{54}$, $\dfrac{f''(9)}{2!} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4 \cdot 3^5} = \dfrac{1}{648}$, $\dfrac{f'''(9)}{3!} = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{-15}{8 \cdot 3^7} = -\dfrac{5}{34.992}$,

$$\frac{f^{(4)}(9)}{4!} = \frac{1}{24} \cdot \frac{105}{16 \cdot 3^9} = \frac{35}{2.519.424}$$

$P_4(x) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{54}(x - 9) + \dfrac{1}{648}(x - 9)^2 - \dfrac{5}{34.992}(x - 9)^3 + \dfrac{35}{2.519.424}(x - 9)^4$

Como $f^{(5)}(x) = -\dfrac{945}{32}x^{-11/2}$, então $R_4(x) = \dfrac{1}{120}\left(-\dfrac{945}{32}\xi^{-11/2}\right)(x - 9)^5 = -\dfrac{63}{256}\xi^{-11/2}(x - 9)^5$

onde ξ está entre 9 e x.

43. $\lim\limits_{x \to 0}(e^{x^2} - \cos x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0} x^4 = 0$. Pela regra de L'Hôpital

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{2xe^{x^2} + \operatorname{sen} x}{4x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{4x^2e^{x^2} + 2e^{x^2} + \cos x}{12x^2} = +\infty$$

Como $\lim\limits_{x \to 0}(2xe^{x^2} + \operatorname{sen} x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0} 4x^3 = 0$, aplicamos a regra de L'Hôpital novamente.

45. Seja A unidades de área a área da região limitada por $y^2 = \dfrac{x^2}{4-x}$ e $x = b$ onde $0 < b < 4$ e $x = 4$ é a assíntota vertical. Seja $u = \sqrt{4-x}$; então $x = 4 - u^2$ e $dx = -2u\,du$.

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\frac{\xi_i}{\sqrt{4-\xi_i}}\Delta_i x = 2\int_0^b \frac{x}{\sqrt{4-x}}dx = 2\int_2^{\sqrt{4-b}} \frac{4-u^2}{u}(-2u\,du) = 4\int_2^{\sqrt{4-b}}(u^2-4)\,du$$

$$= 4\left[\frac{1}{3}u^3 - 4u\right]_2^{\sqrt{4-b}} = \frac{4}{3}(4-b)^{3/2} - 16\sqrt{4-b} - 4\left(\frac{8}{3} - 8\right). \quad \lim_{b\to r} A = -4\left(\frac{8}{3} - 8\right) = \frac{64}{3}.$$

Logo, atribuímos $\frac{64}{3}$ para se representar a medida da área da região dada.

47. Seja A unidades de área a área da região limitada por $y = e^{-x}$, pelo eixo x, pelo eixo y, e $x = b$ $(b > 0)$. Então,

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} e^{-\xi_i}\Delta_i x = \int_0^b e^{-x}dx = -e^{-x}\Big]_0^b = 1 - e^{-b}; \quad \lim_{b\to+\infty} A = 1$$

Logo, atribuímos 1 para representar a medida da área da região dada.

49. $f(x) = \begin{cases} 0,4e^{-0,4x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

(a) $P([2,3]) = \int_2^3 f(x)\,dx = \int_2^3 0,4e^{-0,4x}dx = -e^{-0,4x}\Big]_2^3 = -e^{-1,2} + e^{-0,8} = 0,148$

(b) $P((-\infty,3]) = \int_{-\infty}^3 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 0\,dx + \int_0^3 0,4e^{-0,4x}dx = -e^{-0,4x}\Big]_0^3 = -e^{-1,2} + 1 = 0,699$

(c) $P([10,+\infty)) = \int_{10}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b 0,4e^{-0,4x}dx = \lim_{b\to+\infty} -e^{-0,4x}\Big]_0^b = \lim_{b\to+\infty}(-e^{-0,4b} + e^{-4}) = 0,018$

51. Seja V o valor atual de todo rendimento futuro. Seja $u = 1.000t - 300$ e $dv = e^{-0,08t}dt$. Então, $du = 1.000\,dt$ e $v = -\dfrac{1}{0,08}e^{-0,08t}$. Assim,

$$V = \int_0^{+\infty}(1.000t - 300)e^{-0,08t}dt = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1.000t - 300}{0,08}e^{-0,08t} + \int 12.500e^{-0,08t}dt\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[-\left(\frac{1.000t - 300}{0,08} - \frac{12.500}{0,08}\right)e^{-0,08t}\right]_0^b = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1.000b - 12.200}{0,08e^{0,08t}} + 152.500\right) = 152.500$$

CAPÍTULO DOZE

SEQÜÊNCIAS E SÉRIES INFINITAS DE TERMOS CONSTANTES

EXERCÍCIOS 12.1 Seqüências

1. $a_n = \frac{n+1}{2n-1}$. $a_1 = \frac{1+1}{2-1} = 2$, $a_2 = \frac{2+1}{4-1} = 1$, $a_3 = \frac{3+1}{6-1} = \frac{4}{5}$, $a_4 = \frac{4+1}{8-1} = \frac{5}{7}$.

   $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$. Portanto, $\{a_n\}$ é convergente e seu limite é $\frac{1}{2}$.

3. $a_n = \frac{n^2+1}{n}$. $a_1 = \frac{1+1}{1} = 2$, $a_2 = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$, $a_3 = \frac{9+1}{3} = \frac{10}{3}$, $a_4 = \frac{16+1}{4} = \frac{17}{4}$.

   $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n} = \lim_{n\to+\infty}\left(n + \frac{1}{n}\right) = +\infty$. Portanto, $\{a_n\}$ é divergente.

5. $a_n = \frac{3-2n^2}{n^2-1}$. a_1 não está definida, $a_2 = \frac{3-8}{4-1} = -\frac{5}{3}$, $a_3 = \frac{3-18}{9-1} = -\frac{15}{8}$, $a_4 = \frac{3-32}{16-1} = -\frac{29}{15}$.

   $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3-2n^2}{n^2-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3}{n^2}-2}{1-\frac{1}{n^2}} = -2$. Portanto, $\{a_n\}$ é convergente e seu limite é -2.

7. $a_n = \frac{\ln n}{n^2}$. $a_1 = \frac{\ln 1}{1} = 0$, $a_2 = \frac{\ln 2}{4}$, $a_3 = \frac{\ln 3}{9}$, $a_4 = \frac{\ln 4}{16}$. Seja $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. Pela regra de L'Hôpital

   $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$. Pelo Teorema 12.1.3 $\lim_{n\to+\infty} f(n) = 0$ qdo n é um inteiro positivo. Portanto, $\{a_n\}$ é convergente e seu limite é 0.

9. $a_n = \text{tgh } n$. $a_1 = \text{tgh } 1 \approx 0,762$, $a_2 = \text{tgh } 2 \approx 0,964$, $a_3 = \text{tgh } 3 \approx 0,995$, $a_4 = \text{tgh } 4 \approx 0,999$.

   $$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \text{tgh } n = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-2n}}{1+e^{-2n}} = 1$$

   Portanto $\{a_n\}$ é convergente e seu limite é 1.

11. $a_n = \frac{n}{n+1} \text{sen } \frac{n\pi}{2}$. $a_1 = \frac{1}{1+1} \text{sen } \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{2}{2+1} \text{sen } \pi = 0$, $a_3 = \frac{3}{4} \text{sen } \frac{3}{2}\pi = -\frac{3}{4}$, $a_4 = \frac{4}{5} \text{sen } 2\pi = 0$.

    Como $|a^n| \geq \frac{1}{2}$ se n for impar e $a_n = 0$. Se n for par, $\lim_{n\to+\infty} a_n$ não existe. Portanto, $\{a_n\}$ é divergente.

Aviso: O Teorema 12.1.3 não diz que se $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ não existe, então $\lim_{n\to+\infty} f(n)$ não existe. Para verificar, considere $a_n = f(n) = \text{sen } n\pi$ e $f(x) = \text{sen } \pi x$.

13. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}-n}$, $a_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$, $a_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$, $a_3 = \dfrac{1}{\sqrt{10}-3}$, $a_4 = \dfrac{1}{\sqrt{17}-4}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}+n}{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}+n}{1} = +\infty$. Portanto, (a_n) é divergente.

15. $a_n = \left(1+\dfrac{1}{3n}\right)^n$, $a_1 = 1+\dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3} \approx 1,333$, $a_2 = \left(1+\dfrac{1}{6}\right)^2 = \dfrac{49}{36} \approx 1,361$, $a_3 = \left(1+\dfrac{1}{9}\right)^3 = \dfrac{1.000}{729} \approx 1,372$,

$a_4 = \left(1+\dfrac{1}{12}\right)^4 = \dfrac{28.561}{20.736} \approx 1,377$. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{3n}\right)^{3n}\right]^{1/3} = e^{1/3}$ (Equação 7.5.6).

Logo, (a_n) é convergente e seu limite é $e^{1/3} \approx 1,396$.

17. $a_n = r^{1/n}$, $r > 0$. $a_1 = r$, $a_2 = \sqrt{r}$, $a_3 = \sqrt[3]{r}$, $a_4 = \sqrt[4]{r}$. $\ln \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln r}{n} = 0$

e então $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = e^0 = 1$. Portanto, (a_n) é convergente e seu limite é 1.

19. $a_n = \dfrac{n}{c^n}$, $c > 1$. $a_1 = \dfrac{1}{c}$, $a_2 = \dfrac{2}{c^2}$, $a_3 = \dfrac{3}{c^3}$, $a_4 = \dfrac{4}{c^4}$. Seja $f(x) = \dfrac{x}{c^x}$. Pela regra de L'Hôpital

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{c^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{c^x \ln c} = 0$. Pelo Teorema 12.1.3 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Assim, (a_n) é convergente e seu limite é 0.

21. Para provar $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n-1} = 0$, devemos mostrar que para qualquer $\epsilon > 0$ há um número $N > 0$ tal que

$$\left|\frac{3}{n-1} - 0\right| < \epsilon \text{ para qualquer inteiro } n > N \qquad (1)$$

Agora, $\left|\dfrac{3}{n-1}\right| = \dfrac{3}{n-1}$, e $\dfrac{3}{n-1} < \epsilon$ é equivalente a $n > 1 + \dfrac{3}{\epsilon}$. Escolhemos $N = 1 + \dfrac{3}{\epsilon}$ e obtemos (1).

23. Para provar $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{8n}{2n+3} = 4$, devemos mostrar que para qualquer $\epsilon > 0$ há um número $N > 0$ tal que

$$\left|\frac{8n}{2n+3} - 4\right| < \epsilon \text{ para qualquer inteiro } n > N \qquad (1)$$

$\left|\dfrac{8n}{2n+3} - 4\right| = \dfrac{12}{2n+3}$. Queremos $\dfrac{12}{2n+3} < \epsilon$; $\dfrac{2n+3}{12} > \dfrac{1}{\epsilon}$; $n > \dfrac{6}{\epsilon} - \dfrac{3}{2}$. Escolhemos $N = \dfrac{6}{\epsilon} - \dfrac{3}{2}$ e obtemos (1).

25. Para provar $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2}{5n^2+1} = \dfrac{2}{5}$, devemos mostrar que para qualquer $\epsilon > 0$ há um número $N > 0$ tal que

$$\left|\frac{2n^2}{5n^2+1} - \frac{2}{5}\right| < \epsilon \text{ para todo inteiro } n > N \qquad (1)$$

$\left|\dfrac{2n^2}{5n^2+1} - \dfrac{2}{5}\right| = \dfrac{2}{5(5n^2+1)}$. Queremos $\dfrac{2}{5(5n^2+1)} < \epsilon$; $\dfrac{5(5n^2+1)}{2} > \dfrac{1}{\epsilon}$; $5n^2+1 > \dfrac{2}{5\epsilon}$; $n^2 > \dfrac{2-5\epsilon}{25\epsilon}$.

Assim, escolhemos $N = \dfrac{1}{5}\sqrt{\dfrac{2-5\epsilon}{\epsilon}}$ e temos (1).

27. $(a_n) = \left\{\frac{n^2}{n-3}\right\}$ e $(b_n) = \left\{\frac{n^2}{n+4}\right\}$ são ambos divergentes mas $(c_n) = \left\{\frac{n^2}{n-3} - \frac{n^2}{n+4}\right\}$ é convergente (com limite 7), pois $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{1-(3/n)} = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{1+(4/n)} = +\infty$, mas

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(n+4) - n^2(n-3)}{(n-3)(n-4)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{7n^2}{(n-3)(n-4)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{7}{[1-(3/n)][1-4/n)]} = 7$$

29. Se $r = 0$, $(nr^n) = (0)$ e $\lim_{n\to+\infty} 0 = 0$. Agora suponha $0 < |r| < 1$, e seja $f(x) = xr^x = \frac{x}{r^{-x}}$.

Como $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} r^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^x = +\infty$, aplicamos a regra de L'Hôpital e temos

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{r^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(-\ln r)r^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{r^x}{-\ln r} = 0$$

Logo, $\lim_{n\to+\infty} nr^n = 0$ e então a seqüência é convergente e seu limite é 0.

31. Para provar $\lim_{n\to+\infty} a_n^2 = L^2$ devemos mostrar que para qualquer $\epsilon > 0$ há um número $N > 0$ tal que

$$|a_n^2 - L^2| = |a_n - L||a_n + L| < \epsilon \text{ para qualquer inteiro } n > N \qquad (1)$$

Como $\lim_{n\to+\infty} a^n = L$, então há um número N_1 tal que, para todo inteiro $n > N_1$

$$|a_n - L| < 1; \quad -1 < a_n - L < 1; \quad 2L - 1 < a_n + L < 2L + 1; \quad |a_n + L| < 2|L| + 1$$

Há também um número N_2 tal que $|a^n - L| < \frac{\epsilon}{2|L|+1}$ para qualquer inteiro $n > N_2$. Logo,

$|a_n^2 - L^2| = |a_n - L||a_n + L| < \frac{\epsilon}{2|L|+1}\cdot(2|L|+1) = \epsilon$ para todo inteiro $n > N = \max(N_1, N_2)$.

EXERCÍCIOS 12.2 Seqüências Monótonas e Limitadas

1. $a_n = \frac{3n-1}{4n+5} = \frac{3}{4} - \frac{19/4}{4n+5}$ pela divisão longa. Como $\frac{19/4}{4n+5}$ é decrescente, a_n é crescente.

3. $a_n = \frac{1-2n^2}{n^2} = \frac{1}{n^2} - 2$. Como $\frac{1}{n^2}$ é decrescente a^n é decrescente.

5. $a_n = \cos\frac{1}{3}n\pi$. $a_1 = \cos\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$, $a_2 = \cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$, $a_3 = \cos\pi = -1$, $a_4 = \cos\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2}$. Assim, $a_2 > a_3$ e $a_3 < a_4$. Para alguns valores de n, $a_n > a_{n+1}$, e para alguns valores de n, $a_n < a_{n+1}$. Assim, a seqüência não é monótona.

7. $a_n = \frac{1}{n + \operatorname{sen} n^2}$. $a_1 = \frac{1}{1+\operatorname{sen} 1} \approx 0{,}543$, $a_2 = \frac{1}{2+\operatorname{sen} 4} \approx 0{,}804$, $a_3 = \frac{1}{3+\operatorname{sen} 9} \approx 0{,}293$. Assim, $a_1 < a_2$ e $a_2 > a_3$. Para alguns valores de n, $a_n > a_{n+1}$, e para alguns valores de n, $a_n < a_{n+1}$. Portanto, a seqüência é monótona.

9. $a_n = \frac{5^n}{1+5^{2n}} = \frac{1}{5^n + 5^{-n}}$. Seja $f(x) = \frac{1}{5^x + 5^{-x}}$. Então, $f'(x) = -\frac{\ln 5(5^x - 5^{-x})}{(5^x+5^{-x})^2} < 0$ para $x > 0$. Logo, $f(x)$ é decrescente para $x > 0$ de modo que a_n seja decrescente para n inteiros positivos.

11. $a_n = \frac{n!}{3^n}$. $\frac{a_{n+1}}{a^n} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} / \frac{n!}{3^n} = \frac{(n+1)n!}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n!} = \frac{n+1}{3} > 1$ se $n > 2$. Logo, a seqüência é crescente após os dois primeiros termos.

13. $a_n = \frac{n^n}{n!}$. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} / \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)^n(n+1)}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n > 1$. Logo, a_n é crescente.

15. $a_n = \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)} / \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} = \frac{n+1}{2n+1} < 1$

Portanto, a seqüência é decrescente.

17. Se $\{a_n\}$ for uma seqüência decrescente limitada, então $\{-a_n\}$ será uma seqüência crescente limitada e, portanto, será convergente pela parte do Teorema 12.2.6, já provado. Assim, há um número L tal que $\lim\limits_{n \to +\infty} (-a_n) = L$. Então, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = -L$ de modo que $\{a_n\}$ seja convergente.

19. $a_n = \frac{n^2+3}{n+1}$. Como $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2+3}{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n + (3/n)}{1 + (1/n)} = +\infty$ a seqüência não é limitada.

21. No Exercício 1 mostramos que a seqüência $\{a_n\} = \left\{\frac{3n-1}{4n+5}\right\}$ é crescente. Além disso, $0 < a_n < \frac{3}{4}$ para todos os inteiros positivos n.

Assim, a seqüência é limitada e monótona, e então, pelo Teorema 12.2.6, ela é convergente.

23. $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$. $\frac{a_{n+1}}{a^n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)(2n+2)} / \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$. Logo, a seqüência é decrescente. Além disso, $0 < a_n < 1$ para todos os inteiros positivos n.

Assim, a seqüência é limitada e monótona, e então, pelo Teorema 2.2.6, ela é convergente.

25. No Exercício 9 mostramos que a seqüência $\{a_n\} = \left\{\frac{5^n}{1 + 5^{2n}}\right\}$ é decrescente; e $0 < a_n < 1$.

Assim, a seqüência é limitada e monótona, e então, pelo Teorema 12.2.6, ela é convergente.

27. No Exercício 15 $\{a_n\} = \left\{\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}\right\}$ mostramos que é decrescente; e $0 < a_n < 1$.

Assim, a seqüência é limitada e monótona e então, pelo Teorema 12.2.6, ela é convergente.

29. $a_n = \frac{n^2}{2^n}$. $\frac{a_{n+1}}{a^n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} / \frac{n^2}{2^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 < 1$ qdo. $1 + \frac{1}{n} < \sqrt{2} \approx 1,4$; $n \geq 3$. Portanto, após os três primeiros termos, a seqüência é decrescente. Além disso, $0 < a_n < a_3$.

Assim, a seqüência é limitada e monótona e então, pelo Teorema 12.2.6, ela é convergente.

31. A seqüência $1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, \ldots$ é, claramente, limitada (por 0 e 1), convergente (por 0) mas não-monótona.

EXERCÍCIOS 12.3 Séries Infinitas de Termos Constantes

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$. $s_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

$s_2 = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}$; $s_3 = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{7}\right) = \frac{3}{7}$

$s_4 = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{4}{9}$.

$s_n = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1}\right) + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1}$

Como $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$, a série é convergente e sua soma é $\frac{1}{2}$.

3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{(3n+1)(3n-2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)$. $s_1 = \frac{5}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4}$;

$s_2 = \frac{5}{3}\left[\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right)\right] = \frac{5}{3}\left(1 - \frac{1}{7}\right) = \frac{10}{7}$; $s_3 = \frac{5}{3}\left[\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right)\right] = \frac{5}{3}\left(1 - \frac{1}{10}\right) = \frac{3}{2}$

$s_4 = \frac{5}{3}\left[\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{13}\right)\right] = \frac{5}{3}\left(1 - \frac{1}{13}\right) = \frac{20}{13}$.

$s_n = \frac{5}{3}\left[\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{3n-5} - \frac{1}{3n-2}\right) + \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)\right] = \frac{5}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{5n}{3n+1}$

Como $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{5}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{5}{3}\cdot 1 = \frac{5}{3}$, a série é convergente e sua soma é $\frac{5}{3}$.

5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{n}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} [\ln n - \ln(n+1)]$. $s_1 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$;

$s_2 = (\ln 1 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) = -\ln 3$; $s_3 = (\ln 1 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + (\ln 3 - \ln 4) = -\ln 4$

$s_4 = (\ln 1 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + (\ln 3 - \ln 4) + (\ln 4 - \ln 5) = -\ln 5$

$s_n = (\ln 1 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + \cdots + [\ln(n-1) - \ln n] + [\ln n - \ln(n+1)] = -\ln(n+1)$

Como $\lim_{n\to+\infty} s_n = -\infty$, a série é divergente.

7. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{5^{n-1}}$. $s_1 = u_1 = 2$; $s_2 = s_1 + u_2 = 2 + \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$; $s_3 = s_2 + u_3 = \frac{12}{5} + \frac{2}{25} = \frac{62}{25}$; $s_4 = s_3 + u_4 = \frac{62}{25} + \frac{2}{125} = \frac{312}{125}$

$$s_n = 2\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \cdots + \frac{1}{5^{n-1}}\right) = 2\,\frac{1 - \frac{1}{5^n}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{2}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$$

Como $\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{5}{2}\cdot 1 = \frac{5}{2}$, a série é convergente e sua soma é $\frac{5}{2}$.

9. $s_n = \frac{2n}{3n+1}$, $u_n = s_n - s_{n-1} = \frac{2n}{3n+1} - \frac{2(n-1)}{3(n-1)+1} = \frac{2}{(3n-2)(3n+1)}$. Logo, a série é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(3n-2)(3n+1)}.$$

Como $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{3n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{3+(1/n)} = \frac{2}{3}$, a série é convergente e sua soma é $\frac{2}{3}$.

11. $s_n = \frac{1}{3^n}$. $u_1 = s_1 = \frac{1}{3}$. Se $n > 1$, $u_n = s_n - s_{n-1} = \frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^{n-1}} = -\frac{2}{3^n}$. Logo, a série é $\frac{1}{3} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{3^n}$.

Como $\lim_{n\to+\infty} s_n = 0$, a série é convergente e sua soma é 0.

13. $s_n = \ln(2n+1)$. $u_n = s_n - s_{n-1} = \ln(2n+1) - \ln(2n-1) = \ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)$. Logo, a série é

$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)$. Como $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$, a série é divergente.

15. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{3}{5} + \frac{5}{8} + \frac{7}{11} + \frac{9}{14} + \cdots$. Como $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{3n+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \frac{2}{3} \neq 0$, segue do Teorema 12.3.3 que a série é divergente.

17. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \cdots$ é uma série geométrica com $a = \frac{2}{3}$ e $r = \frac{2}{3} < 1$. Assim, ela é convergente e sua soma é $\frac{2/3}{1 - 2/3} = 2$.

19. $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{1}{n} = 0 + \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{1}{3} + \ln \frac{1}{4} + \cdots$. Como $\lim_{n\to+\infty} \ln \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} (-\ln n) = -\infty$, a série é divergente pelo Teorema 12.3.3.

21. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{3}{2^n} = \frac{3}{2} - \frac{3}{4} + \frac{3}{8} - \frac{3}{16} + \cdots$ é uma série geométrica com $a = \frac{3}{2}$ e $r = -\frac{1}{2}$. Como $|r| < 1$, a série é convergente. Sua soma é $\frac{3/2}{1-(-1/2)} = 1$.

23. $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n} = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \frac{1}{e^4} + \cdots$ é uma série geométrica com $a = \frac{1}{e}$ e $r = \frac{1}{e} < 1$. Assim, ela é convergente e sua soma é $\frac{\frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{1}{e-1}$.

25. $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos \pi n = \cos \pi + \cos 2\pi + \cos 3\pi + \cos 4\pi + \cdots = -1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$. Como $\lim_{n\to+\infty} u_n$ não existe, a série é divergente, pelo Teorema 12.3.3.

27. $0,272727\ldots = \frac{27}{100} + \frac{27}{10.000} + \frac{27}{1.000.000} + \cdots$ é uma série geométrica com $a = \frac{27}{100}$ e $r = \frac{1}{100} < 1$.

Assim, ela é convergente e sua soma é $\dfrac{\frac{27}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$.

29. $0,234\,234\,234\ldots = \frac{234}{1.000} + \frac{234}{1.000.000} + \frac{234}{1.000.000.000} + \cdots$ é uma série geométrica com $a = \frac{234}{1.000}$ e

$r = \frac{1}{1000} < 1$. Assim, ela é convergente e sua soma é $\dfrac{\frac{234}{1.000}}{1 - \frac{1}{1.000}} = \frac{234}{999} = \frac{26}{111}$. Portanto,

$$1,234\,234\,234\ldots = 1 + \frac{26}{111} = \frac{137}{111}$$

31. Seja S cm a distância percorrida pela ponta do pêndulo, antes de atingir o repouso. Então,

$$S = 56 + 56(0,93) + 56(0,93)^2 + \cdots + 56(0,93)^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} 56(0,93)^{n-1}$$

Essa é uma série geométrica com $a = 56$ e $r = 0,93$. Logo, $S = \frac{56}{1 - 0,93} = \frac{56}{0,07} = 800$.

Portanto, a distância percorrida pelo pêndulo é 800 cm = 8 m.

33. Seja S a distância percorrida pela bola de tênis, antes de chegar ao repouso. Então,

$$S = 100 + 100\left(\frac{11}{20}\right) + 100\left(\frac{11}{20}\right) + 100\left(\frac{11}{20}\right)^2 + \left(\frac{11}{20}\right)^2 + \cdots = 100 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} 100\left(\frac{11}{20}\right)^n$$

Temos uma série geométrica com $a = 5$ e $r = \frac{11}{20}$. Logo,

$$S = 100 + 2\cdot\frac{2\cdot 55}{1 - 11/20} = 100 + \frac{110}{9/20} = 100 + \frac{2200}{9} = \frac{3100}{9}$$

Portanto, a bola percorre $\frac{3100}{9}$ m ≈ 344,44 m antes de atingir o repouso.

35. Seja R o número de rotações da roda antes da bicicleta parar. Então,

$R = 200 + 200\left(\frac{4}{5}\right) + 200\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} 200\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$ é uma série geométrica com $a = 200$ e $r = \frac{4}{5}$.

Logo, $R = \frac{200}{1 - 4/5} = \frac{200}{1/5} = 1.000$. A roda completa 1.000 voltas antes da bicicleta parar.

EXERCÍCIOS 12.4 Quatro Teoremas sobre Séries Infinitas

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2} = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n}$. Pelo Teorema 12.4.1, a série dada diverge, já que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2n} = \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$. Pelo Teorema 12.4.2, a série dada diverge, já que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2^n}$ é uma série geométrica com $a = \frac{3}{2}$ e $r = \frac{1}{2} < 1$. Logo, a série é convergente e sua soma é $\frac{3/2}{1 - 1/2} = 3$.

7. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{3}\left(\frac{5}{7}\right)^n$ é uma série geométrica com $a = \frac{20}{21}$ e $r = \frac{5}{7} < 1$. Logo, a série é convergente e sua soma é $\frac{20/21}{1 - 5/7} = \frac{7}{2} \cdot \frac{20}{21} = \frac{10}{3}$.

9. $[\![\text{sen } \frac{5}{1}\pi]\!] = [\![0]\!] = 0$, $[\![\text{sen } \frac{5}{2}\pi]\!] = [\![0]\!] = 0$, $[\![\text{sen } \frac{5}{3}\pi]\!] = [\![-\frac{1}{2}\sqrt{3}]\!] = -1$, $[\![\text{sen } \frac{5}{4}\pi]\!] = [\![0]\!] = 0$, $[\![\text{sen } \frac{5}{5}\pi]\!] = [\![0,587]\!] = 0$, $[\![\text{sen } \frac{5}{6}\pi]\!] = [\![\frac{1}{2}\sqrt{3}]\!] = 0$, $[\![\text{sen } \frac{5}{7}\pi]\!] = [\![0,975]\!] = 0$, $[\![\text{sen } \frac{5}{8}\pi]\!] = [\![1]\!] = 1$. Se $n > 8$, então $0 < \frac{5}{n}\pi < \frac{1}{2}\pi$ e $0 < \text{sen } \frac{5}{n}\pi < 1$; logo $[\![\text{sen } \frac{5}{n}\pi]\!] = 0$. Portanto, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[\![\text{sen } \frac{5}{n}\pi + 3]\!]}{4^n} = -\frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^8} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{4^n}$. Temos uma série geométrica com $a = \frac{3}{4}$ e $r = \frac{1}{4} < 1$. Logo, a série dada é convergente e sua soma é $\frac{3/4}{1 - 1/4} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^8} = 1 - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^{16}} = \frac{63 \cdot 2^{10} + 1}{2^{16}}$.

11. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$. Pelo Teorema 12.4.4, a série dada diverge pois $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é a série harmônica divergente e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ é uma série geométrica convergente.

13. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$. Como essas séries geométricas convergem para $\frac{1/2}{1 - 1/2} = 1$ e $\frac{1/3}{1 - 1/3} = \frac{1}{2}$, respectivamente, a série inteira converge para $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ pelo Teorema 12.4.3.

15. $\sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-n} + e^n)$. $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} (e^{-n} + e^n) = +\infty$. A série diverge pelo Teorema 12.3.3.

17. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{3n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{6n} = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$. A série diverge pelo Teorema 12.4.2.

19. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{2^n} - \frac{2}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2^n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^n}$. Essas séries geométricas convergem para $\frac{3/2}{1 - 1/2} = 3$ e $\frac{2/3}{1 - 1/3} = 1$, respectivamente. Logo, pelo Teorema 12.4.3 a série dada converge para $3 - 1 = 2$.

21. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} + 2\right)$. $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n^2} + 2\right) = 2 \neq 0$. A série diverge pelo Teorema 12.3.3.

23. $\sum_{i=n}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ e $\sum_{i=n}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$ são séries harmônicas divergentes, mas vimos que $\sum_{i=n}^{+\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ é convergente, no Exemplo 12.3.2.

EXERCÍCIOS 12.5 Séries Infinitas de Termos Positivos

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$ é convergente por comparação com uma série geométrica: $\frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}$.

3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$ é convergente por comparação com uma série geométrica: $\frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{2^n}$ qdo. $n \geq 2$.

5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n+1}{2n^2+5}$ é divergente por uma comparação de limite com a série harmônica:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3n+1}{2n^2+5} / \frac{1}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{3+n^{-1}}{2+5n^{-2}} = \frac{3}{2} > 0$$

7. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2 n}{3^n}$ é convergente por comparação com uma série geométrica: $\frac{\cos^2 n}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}$.

9. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+4n}}$ é divergente por uma comparação de limite com a série harmônica:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+4n}} / \frac{1}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+4n^{-1}}} = 1 > 0$$

11. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$ é convergente por comparação com a série p $(p = 2)$:

$$\frac{n!}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{n^2+3n+2} < \frac{1}{n^2}$$

13. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{5n^2+3}$ é divergente por uma comparação de limite com a série harmônica:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{5n^2+3} / \frac{1}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{5n^2+3} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{5+3n^{-2}} = \frac{1}{5} > 0$$

15. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(2n)!}$ é convergente por comparação com uma série geométrica:

$$\frac{n!}{(2n)!} = \frac{1}{(2n)(2n-1)\cdots(n+1)} < \frac{1}{2^n}$$

17. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\operatorname{cosec} n|}{n}$ é divergente por comparação com a série harmônica: $\frac{|\operatorname{cosec} n|}{n} > \frac{1}{n}$.

19. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$ é convergente por uma comparação de limite com a série p $(p = 2)$:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}} / \frac{1}{n^2} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{n^2}{n^2-1}} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{1-n^{-2}}} = 1$$

21. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2n-\sqrt{n}}$ é divergente por comparação com uma série harmônica: $\frac{3}{2n-\sqrt{n}} > \frac{3}{2n}$.

23. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2+2}$ é convergente por uma comparação de limite com a série p ($p = \frac{3}{2}$):

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^2+2} \Big/ \frac{1}{n^{3/2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^{1/2}+2n^{-3/2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{-1}}{\frac{1}{2}n^{-1/2}-3n^{-5/2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}n^{1/2}-3n^{-3/2}} = 0$$

Como $\lim_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$ e $\lim_{n\to+\infty} (n^{1/2}+2n^{-3/2}) = +\infty$, usamos a regra de L'Hôpital.

25. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)!}$ é convergente por comparação com $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ (Exemplo 11.5.1):

$$\frac{(n+1)^2}{(n+2)!} = \frac{(n+1)^2}{n!(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{1}{n!} < \frac{1}{n!}$$

27. A série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}$ é divergente pois $\lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1}$ não existe. Se n for ímpar, então $s_n = 1$; e se n for par $s_n = 0$. Portanto, a seqüência de somas parciais $\{s_n\}$ tem um limitante superior de 1. Assim, o Teorema 12.5.1 não se aplica a uma série infinita de termos tanto positivos como negativos.

29. Como $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é convergente, $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$. Então, $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n b_n}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0$. Como $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente, segue do teste de comparação com limite que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ é convergente.

31. Como $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$, então existe um número $M > 0$ tal que $\frac{u_n}{v_n} > 1$ sempre que $n > M$ ou, equivalentemente, $u_n > v_n$. Como $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ é divergente, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente por comparação com $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.

EXERCÍCIOS 12.6 O Teste da Integral

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}$. Se $f(x) = \frac{1}{2x+1}$, então f é contínua, $f(x) > 0$, e f é decrescente para $x \geq 1$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x+1} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{2x+1} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2} \ln|2x+1| \Big]_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\ln|2b+1| - \frac{1}{2}\ln 3\right) = +\infty$$

Portanto, a série dada é divergente, pelo teste da integral.

3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^{3/2}}$. Se $f(x) = \frac{1}{(x+2)^{3/2}}$, então f será contínua, $f(x) > 0$, e f é decrescente para $x \geq 1$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)^{3/2}} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{(x+2)^{3/2}} = \lim_{b\to+\infty} \frac{-2}{(x+2)^{1/2}} \Big]_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{2}{(b+2)^{1/2}} + \frac{2}{3}\sqrt{3}\right] = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

Portanto, a série dada é convergente pelo teste da integral.

5. $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{4}{n^2-4}$. Se $f(x) = \frac{4}{x^2-4}$, então f será contínua, $f(x) > 0$, e f é decrescente para $x \geq 3$.

$$\int_3^{+\infty} \frac{4\,dx}{x^2-4} = \lim_{b\to+\infty} \int_3^b \frac{4\,dx}{x^2-4} = \lim_{b\to+\infty} \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\Big]_3^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\ln\left|\frac{b-2}{b+2}\right| - \ln\frac{1}{5}\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(\ln\left|\frac{1-2b^{-1}}{1+2b^{-1}}\right| - \ln\frac{1}{5}\right)$$

$= \ln 5$. Portanto, a série dada é convergente pelo teste da integral.

7. $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-5n}$. Se $f(x) = e^{-5x}$, então f é contínua, $f(x) > 0$ e f é decrescente para $x \geq 1$.

$$\int_1^{+\infty} e^{-5x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b e^{-5x}dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{5}e^{-5x}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{5}e^{-5b} + \frac{1}{5}e^{-5}\right) = \frac{1}{5}e^{-5}$$

Portanto, a série dada é convergente, pelo teste da integral.

9. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$. Se $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, então f é contínua e $f(x) > 0$ se $x > 1$. Além disso,

$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0$ se $x > e$, e portanto f é decrescente para todo $x \geq e$.

$$\int_e^{+\infty} \ln x \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\ln^2 x\right]_e^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln^2 b - \frac{1}{2}\right) = +\infty$$

Portanto, a série dada é divergente, pelo teste da integral. De outro modo,

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$ diverge, pela comparação com a série harmônica: $\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$.

11. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{tg}^{-1} n}{n^2+1}$. Se $f(x) = \frac{\text{tg}^{-1} x}{x^2+1}$, então f é contínua e $f(x) > 0$ para $x \geq 1$. Além disso,

$f'(x) = \frac{1-2x\,\text{tg}^{-1}x}{(x^2+1)^2} < 0$ se $x \geq 1$, e então f é decrescente para $x \geq 1$.

$$\int_1^{+\infty} \text{tg}^{-1}x \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{2}(\text{tg}^{-1}x)^2\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{2}(\text{tg}^{-1}b)^2 - \frac{1}{32}\pi^2\right] = \frac{1}{8}\pi^2 - \frac{1}{32}\pi^2 = \frac{3}{32}\pi^2$$

Portanto, a série dada é convergente, pelo teste da integral. De outro modo,

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{tg}^{-1} n}{n^2+1}$ converge pela comparação com a série p ($p = 2$): $\frac{\text{tg}^{-1} n}{n^2+1} < \frac{\frac{1}{2}\pi}{n^2}$.

13. $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-n}$ é convergente por uma comparação de limite com a série geométrica $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n/2}$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2e^{-n}}{e^{-n/2}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{e^{n/2}} = \left(\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{e^{n/4}}\right)^2 = \left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{4}e^{n/4}}\right)^2 = 0$$

Como $\lim_{n\to+\infty} e^{n/4} = +\infty$, aplicamos a regra de L'Hôpital.

15. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ é convergente por comparação com a série p ($p = 2$): $\frac{\ln n}{n^3} < \frac{1}{n^2}$, como $\ln n < n$.

17. $\sum_{n=1}^{+\infty} \text{cosech}\, n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{e^n + e^{-n}}$ é convergente por comparação com a série geométrica: $\frac{2}{e^n + e^{-n}} < \frac{2}{e^n}$.

19. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$ é convergente por comparação com a série p (p = 2): $\frac{e^{1/n}}{n^2} < \frac{e}{n^2}$.

21. $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{n+3}{n}$ é divergente por uma comparação de limite com a série harmônica:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln \frac{n+3}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+3) - \ln n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2}{n(n+3)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{1+\frac{3}{n}}$$

Como $\lim_{n\to+\infty} \ln \frac{n+3}{n} = \ln 1 = 0$ e $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, usamos a regra de L'Hôpital.

23. Se $p \le 0$, a série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ é divergente, por comparação com a série harmônica; suponha $p \ge 0$. Seja $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^p}$. f é contínua, $f(x) > 0$, e f é decrescente para $x \ge 2$.

Caso 1 $p \ne 1$. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \lim_{b\to+\infty} \int_2^b \frac{1}{(\ln x)^p} \cdot \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{-1}{(p-1)(\ln x)^{p-1}}\right]_2^b$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{-1}{(p-1)(\ln b)^{p-1}} + \frac{1}{(p-1)(\ln 2)^{p-1}}$$

Se $p > 1$, $\lim_{b\to+\infty} \frac{-1}{(p-1)(\ln b)^{p-1}} = 0$; se $p < 1$, $\lim_{b\to+\infty} \frac{-1}{(p-1)(\ln b)^{p-1}} = +\infty$. Portanto, pelo teste da integral $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $p < 1$.

Caso 2: $p = 1$. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)} = \lim_{b\to+\infty} \int_2^b \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \left[\ln|\ln x|\right]_2^b = \lim_{b\to+\infty} \ln|\ln b| - \ln(\ln 2) = +\infty$.

Logo, a série é divergente se $p = 1$.

25. Se $p \le 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^p}$ é divergente por comparação com a série harmônica $\frac{\ln n}{n^p} > \frac{1}{n}$. Se $p > 1$, q satisfaz $p > q > 1$. Então, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^p}$ é convergente por uma comparação de limite com $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^q}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^p} / \frac{1}{n^q} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^{p-q}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1/n}{(p-q)n^{p-q-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(p-q)n^{p-q}} = 0$$

Como $\lim_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$ e $\lim_{n\to+\infty} n^{p-q} = +\infty$, aplicamos a regra de L'Hôpital.

27. $\sum_{m=50}^{100} \frac{1}{m} = \sum_{m=50}^{100} \int_m^{m+1} \frac{1}{m}\, dx > \sum_{m=50}^{100} \int_m^{m+1} \frac{1}{x}\, dx = \sum_{m=50}^{100} [\ln(m+1) - \ln m] = \ln 101 - \ln 50 \approx 0{,}7032$

$\sum_{m=50}^{100} \frac{1}{m} = \sum_{m=50}^{100} \int_{m-1}^{m} \frac{1}{m}\, dx < \sum_{m=50}^{100} \int_{m-1}^{m} \frac{1}{x}\, dx = \sum_{m=50}^{100} [\ln m - \ln(m-1)] = \ln 100 - \ln 49 \approx 0{,}7134$

EXERCÍCIOS 12.7 Séries Alternadas

Nos Exercícios 1-13 usamos o teste das séries alternadas.

1. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n}$ converge, pois $\frac{1}{2(n+1)} < \frac{1}{2n}$ e $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n} = 0$.

3. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{3}{n^2+1}$ converge, pois $\frac{3}{(n+1)^2+1} < \frac{3}{n^2+1}$ e $\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{n^2+1} = 0$.

5. $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\ln n}$ converge, pois $\frac{1}{\ln(n+1)} < \frac{1}{\ln n}$ e $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n} = 0$.

7. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+2}$. Como $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{x^3+2}\right) = \frac{2x(x^3+2) - x^2(3x^2)}{(x^3+2)^2} = \frac{4x - x^4}{(x^3+2)^2} < 0$ se $x \geq 2$, a_n é decrescente. Também $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^3+2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{-1}}{1+2n^{-3}} = 0$. Assim, a série é convergente.

9. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n^2}$. Como $\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{x^2}\right) = \frac{x - (2x)\ln x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3} < 0$ para $x \geq 2$, a_n é decrescente.

Também, pela regra de L'Hôpital $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{-1}}{2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2} = 0$. Assim, a série converge.

11. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{3^n}{n^2}$ é divergente, pois $\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x}{x^2} = \left(\lim_{x\to+\infty}\frac{3^{x/2}}{x}\right)^2 = \left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}(\ln 3)3^{x/2}}{1}\right)^2 = +\infty$.

13. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{n}{2^n}$. Pela regra de L'Hôpital $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2^x\ln 2} = 0$. Também $\frac{n+1}{2^{n+1}} < \frac{n}{2^n}$ se e somente se $\frac{n+1}{n} < 2$, que é verdadeiro se $n > 1$. Logo, a série dada é convergente.

Nos Exercícios 15-21 usamos o Teorema 12.7.4.

15. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$. $|R_4| < |u_5| = \left|\frac{1}{5}\right| = \frac{1}{5}$

17. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^2}$. $|R_4| < |u_5| = \left|-\frac{1}{9^2}\right| = \frac{1}{81}$

19. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n^2}$. $|R_4| < |u_5| = \left|-\frac{1}{5^2}\right| = \frac{1}{25}$

21. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$. $|R_4| < |u_5| = \left|\frac{1}{6\ln 6}\right|$

Nos Exercícios 23-29 acrescentamos termos até vermos que o próximo termo será menor que $\frac{1}{2000}$. Não é necessário determinar, de antemão, o número de termos.

23. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \frac{1}{128} - \frac{1}{256} + \frac{1}{512} - \frac{1}{1024} = 0{,}333$. Com $|\text{erro}| < \frac{1}{2048}$.

25. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} - \frac{1}{720} = 0{,}632$. Com $|\text{erro}| < \frac{1}{5040}$.

27. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)^3} \approx \frac{1}{8} - \frac{1}{64} + \frac{1}{216} - \frac{1}{512} + \frac{1}{1000} - \frac{1}{1728} = 0{,}112$. Com $|\text{erro}| < \frac{1}{2744}$.

29. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n2^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} + \frac{1}{160} - \frac{1}{384} + \frac{1}{896} = 0{,}406$. Com $|\text{erro}| < \frac{1}{2048}$.

EXERCÍCIOS 12.8 Convergência Absoluta e Condicional, o Teste da Razão e o Teste da Raiz

1. $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ é uma série geométrica com $|r| = \left|-\frac{2}{3}\right| < 1$ e, portanto, é absolutamente convergente

3. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n!}$ é absolutamente convergente pelo teste da razão:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{2}{n+1}\right| = 0 < 1$$

5. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{n!}$ é absolutamente convergente pelo teste da razão:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^2}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = 0 < 1$$

7. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!}{2^{n+1}}$ é divergente, pelo teste da razão:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)!}{2^{n+2}}\cdot\frac{2^{n+1}}{n!}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2} = +\infty$$

9. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-2\,\text{sen}\,n}{n^3}$ é absolutamente convergente, pois $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|1-2\,\text{sen}\,n|}{n^2}$ é convergente, por comparação com a série p (p = 3): $\frac{|1-2\,\text{sen}\,n|}{n^3} \le \frac{3}{n^3}$.

11. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{n!}$ é absolutamente convergente pelo teste da razão:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{3^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{3}{n+1} = 0 < 1$$

13. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(\ln n)^2}$ é absolutamente convergente, pois foi mostrado que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$ é convergente, no Exercício 12.6.23 (p = 2).

15. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\text{sen}\,\pi n}{n}$ é absolutamente convergente, pois $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{\text{sen}\,\pi n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{0}{n} = 0.$

17. $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$ é absolutamente convergente pelo teste da raiz:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{(\ln n)^n}\right]^{1/n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n} = 0$$

19. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{n!}$ é divergente pelo teste da razão:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1$$

21. Se $|r| < 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n\,\text{sen}\,nt$ é absolutamente convergente para todos os valores de t, pois $\sum_{n=1}^{+\infty}|r^n\,\text{sen}\,nt|$ é convergente por comparação com uma série geométrica:

$$|r^n\,\text{sen}\,nt| = |r|^n|\text{sen}\,nt| \le |r|^n\cdot 1 = |r|^n$$

23. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é absolutamente convergente, então $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ é convergente. Pelo resultado do Exercício 12.4.9 com $a_n = b_n = |u_n|$ segue que $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ é convergente.

25. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1+(-1)^n}} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^5} + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{32} + \cdots$

(a) $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ciclos entre $\frac{1}{8}$ e 2; logo, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ não existe e o teste da razão falha.

(b) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u^n|} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1+(-1)^n}}\right)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{(1+(-1)^n)/n}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^0} = \frac{1}{2}$

Então, pelo teste da razão, a série é convergente.

27. Se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L > 1$ ou se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = +\infty$, então haverá um número $R > 1$ e um inteiro N tal que se $n > N$ então $\sqrt[n]{|u_n|} > R$. Logo, se $n > N$, $|u_n| > R^n > 1$ e a série diverge pelo Teorema 12.3.3.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 12

1. $a_n = \frac{3n}{n+2}$, $a_1 = \frac{3}{1+2} = 1$, $a_2 = \frac{6}{2+2} = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{9}{3+2} = \frac{9}{5}$, $a_4 = \frac{12}{4+2} = 2$. $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{1+2n^{-1}} = 3$.

3. $a_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$. $a_1 = \frac{1-1}{1+1} = 0$; $a_2 = \frac{4-1}{4+1} = \frac{3}{5}$, $a_3 = \frac{9-1}{9+1} = \frac{4}{5}$, $a_4 = \frac{16-1}{16+1} = \frac{15}{17}$. $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-n^{-2}}{1+n^{-2}} = 1$.

5. $a_n = 2 + (-1)^n$, $a_1 = 2 - 1 = 1$, $a_2 = 2 + 1 = 3$, $a_3 = 2 - 1 = 1$, $a_4 = 2 + 1 = 3$. $\lim_{n\to+\infty} a_n$ não existe.

7. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$. $a_1 = (1+1)^2 = 4$, $a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^4 = \frac{81}{16} \approx 5,06$, $a_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^6 = \frac{4096}{729} \approx 5,62$,

$a_4 = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^8 = \frac{390.625}{65.536} \approx 5,96$. $\lim_{n\to+\infty} a_n = \left[\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^2 = e^2 \approx 7,39$.

9. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{4^{n+1}}$. $s_1 = u_1 = \frac{3}{16}$, $s_2 = s_1 + u_2 = \frac{3}{16} + \frac{3}{64} = \frac{15}{64}$, $s_3 = s_2 + u_3 = \frac{15}{64} + \frac{3}{256} = \frac{63}{256}$, $s_4 = s_3 + u_4 = \frac{63}{256} + \frac{3}{1024} = \frac{255}{1024}$. $s_n = \frac{3}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{3}{4^4} + \cdots + \frac{3}{4^{n+1}} = \frac{3}{4^2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}\right) = \frac{3}{16} \cdot \frac{1-(\frac{1}{4})^n}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$.

Como $\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{4}$, a seqüência é convergente e sua soma é $\frac{1}{4}$.

11. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ é uma série geométrica com $a = \frac{3}{4}$ e $r = \frac{3}{4} < 1$. Assim, ela é convergente e sua soma é $\frac{3/4}{1 - 3/4} = 3$.

13. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n+1}$ é divergente, pois $\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-n^{-1}}{1+n^{-1}} = 1 \neq 0$.

15. $\sum_{n=1}^{+\infty} \text{sen}^n \frac{1}{3}\pi$ é uma série geométrica com $a = 1$ e $r = \text{sen}\,\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3} < 1$. Logo, é convergente e sua soma é $\dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}} = 4 + 2\sqrt{3}$.

17. $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \dfrac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{3n-1} - \dfrac{1}{3n+2}\right)$ por frações parciais.

$$s_n = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{3n-4} - \frac{1}{3n-1}\right) + \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2}\right)\right] = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2}\right)$$

Como $\lim_{n \to +\infty} s_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, a série é convergente e sua soma é $\frac{1}{6}$.

19. $[\![\text{sen}\,\frac{3}{1}\pi]\!] = [\![0]\!] = 0$, $[\![\text{sen}\,\frac{3}{2}\pi]\!] = [\![-1]\!] = -1$, $[\![\text{sen}\,\frac{3}{3}\pi]\!] = [\![0]\!] = 0$, $[\![\text{sen}\,\frac{3}{4}\pi]\!] = [\![\frac{1}{2}\sqrt{2}]\!] = 0$, $[\![\text{sen}\,\frac{3}{5}\pi]\!] = [\![0,587]\!] = 0$, $[\![\text{sen}\,\frac{3}{6}\pi]\!] = [\![1]\!] = 1$. Se $n > 6$, então $0 < \frac{3}{n}\pi < \frac{1}{2}\pi$ e $0 < \text{sen}\,\frac{3}{n}\pi < 1$, logo, $[\![\text{sen}\,\frac{3}{n}\pi]\!] = 0$.
Assim, $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{[\![\text{sen}\,\frac{3}{n}\pi + 2]\!]}{3^n} = -\dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^6} + \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2}{3^n}$. Temos uma série geométrica com $a = \frac{2}{3}$ e $r = \frac{1}{3} < 1$.
Logo, a série dada converge e sua soma é $-\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{729} + \dfrac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = -\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{729} + 1 = \dfrac{649}{729}$.

21. $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2}{n^2 + 6n}$ é convergente por comparação com uma série p $(p = 2)$: $\dfrac{2}{n^2 + 6n} < \dfrac{2}{n^2}$.

23. $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\dfrac{\pi}{2n^2 - 1}\right)$ é divergente, pois $\lim_{n \to +\infty} \cos\left(\dfrac{\pi}{2n^2 - 1}\right) = \cos 0 = 1 \neq 0$.

25. $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n!)}$ é convergente, pelo teste da razão:

$$\lim_{n \to +\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n \to +\infty}\left|\frac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2}\right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{4(n+\frac{1}{2})} = \frac{1}{4} < 1$$

27. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln \dfrac{1}{n}$ é divergente, pois $\lim_{n \to +\infty} \ln \dfrac{1}{n} = -\infty$.

29. $\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$ é convergente, pelo teste da integral: seja $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$. Para $x \geq 2$, f é contínua, decrescente, $f(x) > 0$ e $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{(\ln x)^2}\frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty}\left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^b = \lim_{b \to +\infty}\left[-\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2}\right] = \frac{1}{\ln 2}$.

31. $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{2}{5n} - \dfrac{3}{2n}\right)$ é divergente por comparação com a série harmônica: $\dfrac{2}{5n} - \dfrac{3}{2n} = -\dfrac{11}{10} \cdot \dfrac{1}{n}$.

33. $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{1 + 2\ln n}$ é divergente por comparação com a série harmônica: $\dfrac{1}{1 + 2\ln n} > \dfrac{1}{n + 2n} = \dfrac{1}{3n}$.

35. $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos n}{n^3}$ é absolutamente convergente, e então, convergente, por comparação com a série p $(p = 3)$: $\left|\dfrac{\cos n}{n^3}\right| < \dfrac{1}{n^3}$.

37. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n + \operatorname{sen} n}$ converge, por comparação com a série geométrica: $\frac{1}{2^n + \operatorname{sen} n} < \frac{1}{2^n - 2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}$.

39. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2}{3^n}$ é absolutamente convergente, pelo teste da razão:

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^2}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{3n^2} = \frac{1}{3} \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{3} < 1$$

41. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n+1)^{3/4}}$ é convergente, pelo teste das séries alternadas, mas $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{3/4}}$ é divergente por uma comparação de limite com a série p $(p = \frac{3}{4})$. Logo, a série dada é condicionalmente convergente.

43. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{10n}$ é divergente, pois $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{10n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)!}{10} = +\infty$.

45. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{3n}}{n^n}$ é absolutamente convergente, pelo teste da raiz: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2^{3n}}{n^n}\right)^{1/n}$ $= \lim_{n\to+\infty} \frac{2^3}{n} = 0$.

47. A série dada é $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ onde $c^n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{se n for um quadrado perfeito.} \\ \frac{1}{n^2} & \text{se n não for um quadrado perfeito.} \end{cases}$

Portanto, $\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|$ consiste em termos da forma $\frac{1}{n}$, onde n é um quadrado perfeito, cuja soma é $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2}$; e em termos da forma $\frac{1}{n^2}$, onde n não é um quadrado perfeito, cuja soma é menor que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Como cada soma é uma série p $(p = 2)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|$ é convergente e, portanto, a série dada é absolutamente convergente.

49. $1{,}3\,24\,24\,24\ldots = \frac{13}{10} + \left(\frac{24}{1.000} + \frac{24}{100.000} + \frac{24}{100.000.000} + \cdots\right)$ i é uma série geométrica com $a = \frac{24}{1.000}$ e $r = \frac{1}{100} < 1$. Assim, é convergente e sua soma é $\frac{13}{10} + \frac{\frac{24}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{13}{10} + \frac{24}{990} = \frac{437}{330}$.

51. Se S cm for a distância total percorrida pelo pêndulo, então $S = 18 + 18(\frac{4}{5}) + 18(\frac{4}{5})^2 + 18(\frac{4}{5})^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} 18(\frac{4}{5})^{n-1}$ será uma série geométrica com $a = 18$ e $r = \frac{4}{5} < 1$, e soma $S = \frac{18}{1 - \frac{4}{5}} = 90$.

Portanto, o pêndulo percorre 90 cm antes de ficar em repouso.

CAPÍTULO TREZE

SÉRIES DE POTÊNCIAS

EXERCÍCIOS 13.1 Introdução às Séries de Potências

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$. $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n+1}{n+2}\right||x| = |x|$

Portanto, a série de potências é absolutamente convergente se $|x| < 1$, ou seja, se $-1 < x < 1$. $x = 1$: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$ uma série harmônica divergente.

$x = -1$: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge pelo teste das séries alternadas.

Logo, o intervalo de convergência da série de potências dada é $[-1, 1)$.

3. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2-3}$. $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2-3}\cdot\frac{n^2-3}{x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n^2-3}{n^2+2n-2}\right||x| = |x|$

Portanto, a série de potências é absolutamente convergente se $|x| < 1$, ou seja, se $-1 < x < 1$

$x = \pm 1$: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\pm 1)^n}{n^2-3}$ é absolutamente convergente por uma comparação de limite com a série p

$(p = 2)$: $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2-3}/\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2-3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1-3n^{-2}} = 1$

Logo, o intervalo de convergência da série de potências dada é $[-1, 1]$.

5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{n^2}$. $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{2^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{2^n x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{2n^2}{n^2+2n+1}\right||x| = 2|x|$

Portanto, a série de potências é absolutamente convergente se $2|x| < 1$, ou seja, se $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$. $x = \pm\frac{1}{2}$: $\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{2^n(\pm\frac{1}{2})^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ é uma série p convergente $(p = 2)$.

Logo, o intervalo de convergência da série de potências dada é $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

7. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{3^n}$. $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)x^{n+1}}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{nx^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n+1}{3n}\right||x| = \frac{1}{3}|x|$

Portanto, a série de potências é absolutamente convergente se $\frac{1}{3}|x| < 1$, ou seja, se $-3 < x < 3$. $x = \pm 3$: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(\pm 3)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}(\pm 1)^n n$. Ambas as séries divergem, pois os termos não se aproximam de 0. Logo, o intervalo de convergência da série de potências dada é $(-3, 3)$

9. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$. $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\frac{(2n-1)!}{x^{2n-1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{2n(2n+1)}\right|x^2 = 0 < 1$ para todo x. A série de potências dada converge para todo x; seu intervalo de convergência é $(-\infty, +\infty)$

11. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x+3)^n}{2^n}$. $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x+3)^{n+1}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{(x+3)^n}\right| = \frac{1}{2}|x+3|$

A série de potências é absolutamente convergente se $\frac{1}{2}|x+3| < 1$; $|x+3| < 2$; $-2 < x+3 < 2$; $-5 < x < -1$.

$|x+3| = 2$: $\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n| = \sum_{n=0}^{+\infty}1$. Portanto, ambas as séries divergem.

Logo, o intervalo de convergência da série de potências dada é $(-5, -1)$.

13. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(2n-1)3^{2n-1}}$. $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(2n+1)3^{2n+1}}\cdot\frac{(2n-1)3^{2n-1}}{x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{2n-1}{9(2n+1)}\right||x| = \frac{1}{9}|x|$

Portanto, a série de potências é absolutamente convergente se $\frac{1}{9}|x| < 1$, ou seja, se $-9 < x < 9$.

$x = 9$: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 3^{2n}}{(2n-1)3^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{3}{2n-1}$ é convergente pelo teste das séries alternadas.

$x = -9$: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n 3^{2n}}{(2n-1)3^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{2n-1}$ diverge, por comparação com a série harmônica:

$\frac{3}{2n-1} > \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n}$. Logo, o intervalo da convergência da série de potências dada é $(-9, 9]$.

15. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}$. $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{(x-1)^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right||x-1| = |x-1|$

Portanto, a série de potências é absolutamente convergente se $|x-1| < 1$, isto é, se $0 < x < 2$.

$x = 0$: $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)$ é uma série harmônica divergente.

$x = 2$: $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ é convergente, pelo teste das séries alternadas.

Logo, o intervalo de convergência da série de potências dada é $(0, 2]$.

17. $\sum_{n=0}^{+\infty}(\operatorname{senh} 2n)x^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{2n} - e^{-2n})x^n$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{e^{2(n+1)} - e^{-2(n+1)}}{e^{2n} - e^{-2n}}\right|\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{e^{2n+2}(1 - e^{-4n-4})}{e^{2n}(1 - e^{-4n})}\right||x| = e^2|x|$$

Assim, a série de potências é absolutamente convergente se $e^2|x| < 1$, isto é, se $-\frac{1}{e^2} < x <$

$x = \pm\frac{1}{e^2}$: $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(\pm 1)^n(1 - e^{-4n})$ é divergente, pois $\lim_{n\to+\infty}(1 - e^{-4n}) = 1 \neq 0$.

Portanto, o intervalo de convergência da série de potências dada é $\left(-\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e^2}\right)$.

19. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n(\ln n)^2}$. $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)[\ln(n+1)]^2}\cdot\frac{n(\ln n)^2}{x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}\left|\frac{\ln n}{\ln n + \ln(1+1/n)}\right||x|$

$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+1/n}\cdot\frac{1}{1+[\ln(1+1/n)/\ln n]}|x| = |x|$

Portanto, a série de potências é absolutamente convergente se $|x| < 1$, isto é, se $-1 < x < 1$.

$x = \pm 1$: $-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(\pm 1)^{n+1}}{n(\ln n)^2}$ é absolutamente convergente, pelo Exercício 12.6.23 com $p = 2$.

Logo, o intervalo de convergência da série de potências dada é $[-1, 1]$.

21. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{5^n}(x-1)^n$. $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^2(x-1)^{n+1}}{5^{n+1}}\cdot\frac{5^n}{n^2(x-1)^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{5}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2|x-1| = \frac{1}{5}|x-1|$

Logo, a série de potências é absolutamente convergente se $\frac{1}{5}|x-1| < 1$; $|x-1| < 5$; $-4 < x < 6$

$|x-1| = 5$: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{5^n}(\pm 5)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(\pm 1)^n n^2$ diverge, pois $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.

Logo, o intervalo de convergência da série de potências dada é $(-4, 6)$.

23. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n(x-5)^n}{n+1}$. $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\ln(n+1)(x-5)^{n+1}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{\ln n(x-5)^n}\right|$

$= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{\ln n + \ln(1+1/n)}{\ln n}\right||x-5| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1+1/n}{1+2/n}\left[1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right]|x-5| = |x-5|$

Assim, a série de potências é absolutamente convergente se $|x-5| < 1$, isto é, se $4 < x < 6$

$x = 6$: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n+1}$ diverge, por comparação com a série harmônica $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+1}$.

$x = 4$: $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n+1}$ converge, pelo teste das séries alternadas $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1} = 0$ e

$\frac{d}{dx}\frac{\ln x}{x+1} = \frac{1+x-\ln x}{(x+1)^2} < 0$ para $x \leq 4$; logo, os termos são decrescentes.

Então, o intervalo de convergência da série de potências dada é $[4, 6)$.

25. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}x^{2n+1}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)(2n+2)}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\right|\left|\frac{x^{2n+3}}{x^{2n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{2n+1}{2n+2}\right|x^2 = x^2$$

Portanto, a série de potências é absolutamente convergente se $x^2 < 1$, isto é, se $-1 < x < 1$

$x = \pm 1$: $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$ converge pelo teste das séries alternadas: como

$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{2n+1}{2n+2}\right| < 1$, u_n é decrescente. Além disso,

$$\frac{1}{u_n} = \frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1} = (1+1)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n-1}\right) > 1 + \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)$$

Como $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{u_n} = +\infty$ por comparação com $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n}$, então $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Logo, o intervalo de convergência da série de potências dada é $[-1, 1]$.

27. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!\,x^n}{n^n}$. $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!\,x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)\,n^n}{(n+1)^{n+1}}\right||x| = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n|x|$

$= \lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^{-1}|x| = \left[\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1}|x| = e^{-1}|x|$

Logo, a série de potências é absolutamente convergente se $e^{-1}|x| < 1$, isto é, se $-e < x < e$

$x = \pm e$: $\sum_{n=1}^{+\infty}(\pm 1)^n\frac{n!\,e^n}{n^n}$ diverge, pois $\lim_{n\to+\infty}\frac{n!\,e^n}{n^n} \neq 0$. De fato, como $\ln$ é crescente:

$$\ln n! = \sum_{k=2}^{n}\ln k = \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\ln k\,dx > \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\ln x\,dx = \int_1^n \ln x\,dx = \Big[x\ln x - x\Big]_1^n = n\ln n - n + 1$$

Portanto, $n! > \frac{n^n}{e^{n-1}}$ de modo que $\frac{n!\,e^n}{n^n} > e$.

Logo, o intervalo de convergência da série de potências dada é $(-e, e)$.

29. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+a)!}{n!\,(n+b)!}x^n$ onde a e b são inteiros positivos $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$

$= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1+a)!\,x^{n+1}}{(n+1)!\,(n+1+b)!}\cdot\frac{n!\,(n+b)!}{(n+a)!\,x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n+1+a}{(n+1)(n+1+b)}\right||x| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1+a/(n+1)}{n+1+b}|x| = 0 < 1$

para todo x. A série de potências converge para todo x; assim, o raio da convergência é $+\infty$.

31. Temos o raio da convergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n x^n$ igual a r. Seja $\bar{r}$ o raio de convergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n x^{2n}$.

(a) Se $|x_1| < \sqrt{r}$, então $|x_1^2| < r$, e portanto, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x_1^2)^n = \sum_{n=1}^{+\infty}u_n x_1^{2n}$ converge.

(b) Se $|x_2| > \sqrt{r}$, então $|x_2^2| > r$, e portanto, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x_2^2)^n = \sum_{n=1}^{+\infty}u_n x_2^{2n}$ diverge.

De **(a)** temos $\sqrt{r} \le \bar{r}$ e de **(b)** temos $\sqrt{r} \ge \bar{r}$. Logo, $\bar{r} = \sqrt{r}$.

33. Suponha que a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty}c_n x^n$ seja convergente $-a < x < a$.
Seja a série de potências absolutamente convergente se $x = a$. Então, a série $\sum_{n=0}^{+\infty}|c^n a^n|$ será convergente.

Qdo. $x = -a$, a série torna-se $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n c_n a^n$. Como $\sum_{n=0}^{+\infty}|(-1)^n c_n a^n| = \sum_{n=0}^{+\infty}|c_n a^n|$,

que é convergente, então a série $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n c_n a^n$ será absolutamente convergente.

EXERCÍCIOS 13.2 Derivação de Séries de Potências

1. (a) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$. $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 |x| = |x|$.

A série de potências é absolutamente convergente se $|x| < 1$; logo, seu raio de convergência é 1.

$x = \pm 1$: $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é uma série p convergente($p = 2$). Assim, o domínio de f é $[-1, 1]$.

(b) $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$. $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^n}{n+1}\cdot\frac{n}{x^{n-1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| |x| = |x|$

A série de potências é absolutamente convergente se $|x| < 1$; logo, o seu raio de convergência é 1.

(c) $f'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ que é divergente, pois é a série harmônica.

$f'(-1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ que é convergente pelo teste das séries alternadas.

Portanto, o domínio de f' é $[-1, 1)$.

3. (a) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$. $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}|x| = |x|$

A série de potências é absolutamente convergente se $|x| < 1$; logo, seu raio de convergência é 1.

$x = 1$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente, pois é a série p com $p = \frac{1}{2} < 1$.

$x = -1$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ é convergente pelo teste das séries alternadas.

Portanto, o domínio de f é $[-1, 1)$.

(b) $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}\, x^{n-1}$. $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\sqrt{n+1}\, x^{n+1}}{\sqrt{n}\, x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}|x| = |x|$

A série de potências é absolutamente convergente se $|x| < 1$; logo, seu raio de convergência 1.

(c) $f'(\pm 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\pm 1)^{n-1}\sqrt{n}$ que é divergente, pois $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n} \neq 0$.

Assim, o domínio de f é $(-1, 1)$.

5. (a) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$. $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\frac{(2n-1)!}{x^{2n-1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n(2n+1)}x^2 = 0 < 1$

A série de potências converge para todo x, seu raio de convergência é $+\infty$ e seu domínio é $(-\infty, +\infty)$.

(b) $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$. $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{2n}}{(2n)!}\cdot\frac{(2n-2)!}{x^{2n-2}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n)}x^2 = 0 < 1$

A série de potências para $f'(x)$ converge para todo x ; logo, seu raio de convergência é

(c) O domínio de f é $(-\infty, +\infty)$.

7. $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)(3x-1)^n$. $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+2)(3x-1)^{n+1}}{(n+1)(3x-1)^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+2}{n+1}|3x-1| = |3x-1|$

A série de potências é absolutamente convergente se $|3x-1| < 1$, isto é, se $0 < x < 2/3$.

Logo, o raio de convergência é $1/3$.

$3x - 1 = \pm 1$: $\sum_{n=1}^{+\infty}(\pm 1)^n(n+1)$ é divergente, pois $\lim_{n\to+\infty}(n+1) \neq 0$.

Logo, o domínio de f é $(0, 2/3)$.

(b) $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 3n(n+1)(3x-1)^{n-1}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{3(n+1)(n+2)(3x-1)^n}{3n(n+1)(3x-1)^{n-1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+2}{n}|3x-1| = |3x-1|$$

A série de potências é absolutamente convergente se $|3x-1| < 1$, isto é, se $0 < x < 2/3$.

Logo, o raio de convergência é $1/3$.

(c) Se $3x - 1 = \pm 1$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(\pm 1)^{n-1}3n(n+1)$ que é divergente, pois $\lim_{n\to+\infty} 3n(n+1) \neq 1$.

Logo, o domínio de f' é $(0, 2/3)$.

9. $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-1)^n}{n3^n}$. $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}\cdot\frac{n3^n}{(x-1)^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{3(n+1)}|x-1| = \frac{1}{3}|x-1|$

A série de potências é absolutamente convergente se $1/3|x-1| < 1$, isto é, se $-2 < x < 4$.

Logo, o raio de convergência é 3.

$x = 4$: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ é a série harmônica divergente.

$x = -2$: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ é convergente pelo teste das séries alternadas.

Portanto, o domínio de f é $[-2, 4)$.

(b) $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-1)^{n-1}}{3^n}$. $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x-1)^n}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{(x-1)^{n-1}}\right| = \frac{1}{3}|x-1|$

A série de potências é absolutamente convergente se $1/3|x-1| < 1$, isto é, se $-2 < x < 4$.

Logo, o raio de convergência é 3.

(c) $f'(-2) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3}$ que é divergente. Logo, o domínio de f' é $(-2, 4)$.

11. Usando o Exemplo 2 e derivando ambos os membros pelo Teorema 13.2.3, se $|x| < 1$ então

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}, \quad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}, \quad \frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$$

13. Usando a equação (2) e derivando ambos os membros pelo Teorema 12.2.3, se $|x| < 1$ então

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n, \quad -\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}(n+1)x^n, \quad \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)x^n$$

15. **(a)** Usando a equação (1) e substituindo x por 2x, temos

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \text{ se } |x| < 1, \quad \frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n \text{ se } |x| < \frac{1}{2}$$

(b) Derivando ambos os membros na última igualdade $\frac{2}{(1-2x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n 2^n x^{n-1}$ se $|x| < \frac{1}{2}$.

17. **(a)** Usando o Exemplo 3 e substituindo x por x^2 obtemos, para todo x,

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad e^{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

(b) Derivando ambos os membros na última igualdade, obtemos, para todo x,

$$2xe^{x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{n!} x^{2n-1}, \quad 2xe^{x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(n-1)!} x^{2n-1}, \quad xe^{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$$

19. Seja $x = \frac{1}{2}$ no resultado do Exemplo 4. Precisamos $R_n < \frac{1}{200.000}$ com precisão de até cinco casas decimais

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n!}. \quad \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{48} + \frac{1}{384} - \frac{1}{3840} + \frac{1}{46.080} = 0,60653 \text{ com } |\text{erro}| < \frac{1}{645.120}.$$

21. **(a)** $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^n}{n!} + \cdots\right)\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[2x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{2}{5!}x^5 + \cdots + \frac{2}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ para todo } x.$$

(b) $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right) + \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^n}{n!} + \cdots\right)\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[2 + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2}{4!}x^4 + \cdots + \frac{2}{(2n)!}x^{2n} + \cdots\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ para todo } x.$$

23. Seja $x = \frac{1}{2}$ no resultado do Exemplo 2.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 4; \quad \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 2; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = 2$$

25. **(a)** Do resultado do Exemplo 4, para todo x,

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n!}, \quad x^2e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{n+2}}{n!}$$

(b) Derivando ambos os membros na última equação e fazendo $x = 2$, para todo x,

$$2xe^{-x} - x^2e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(n+2)x^{n+1}}{n!}, \quad 4e^{-2} - 4e^{-2} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{(n+2)2^{n+1}}{n!}$$

$$0 = 4 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{(n+2)2^{n+1}}{n!}, \quad (-1)\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n 2^{n+1}\frac{n+2}{n!} = 4, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-2)^{n+1}\frac{n+2}{n!} = 4$$

27. Temos $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots + c_n x^n + \cdots$.

Como $f(0) = 1$, então $c_0 = 1$. Como $f'(x) = f(x)$ então,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{n-1} x^{n-1}$$

Portanto, se $n \geq 1$, $nc_n = c_{n-1}$, $c_n = \frac{c_{n-1}}{n}$. Então,

$c_1 = \frac{c_0}{1} = 1$; $c_2 = \frac{c_1}{2} = \frac{1}{2}$; $c_3 = \frac{c_2}{3} = \frac{1}{3!}$; $c_4 = \frac{c_3}{4} = \frac{1}{4!}$; ...; $c_n = \frac{1}{n!}$. Logo, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

29. Temos $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots + c_n x^n + \cdots$.

Portanto, $f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (-x)^n + c_0 - c_1 x + c_2 x^2 - c_3 x^3 + \cdots + (-1)^n c_n x^n + \cdots$.

Se n for uma função par, então $f(x) = f(-x)$. Igualando os termos ímpares correspondentes, obtemos

$$c_1 = -c_1, \quad c_3 = -c_3, \quad c_5 = -c_5, \quad \ldots, \quad c_{2n+1} = -c_{2n+1}$$

Portanto, $c_1 = 0$, $c_3 = 0$, $c_5 = 0$, ..., $c_{2n+1} = 0$. Logo, $c_n = 0$ qdo n é ímpar.

31. $y = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$. $2y = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{n!} x^n$ e $\frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot \frac{2^n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{n!}$.

Portanto, $\frac{dy}{dx} = 2y$, $\frac{dy}{dx} - 2y = 0$.

33. $y = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}$. $\frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{+\infty} (2n-1)\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-2)!} x^{2n-2}$.

$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} (2n-2)\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-2)!} x^{2n-3} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-3)!} x^{2n-3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{(2n-1)!} x^{2n-1} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}$

Portanto, $\frac{d^2y}{dx^2} = -y$, $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$.

35. $y = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$. $\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)(-1)^n \frac{2^n n!}{(2n+1)!} x^{2n}$.

$x\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)(-1)^n \frac{2^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (2n+1)(2n)(-1)^n \frac{2^n n!}{(2n+1)!} x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n n!}{(2n-1)!} x^{2n-1}$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-2)(n+1)(-1)^n \frac{2^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

Logo, $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = \sum_{n=0}^{+\infty} [-2(n+1) + (2n+1) + 1](-1)^n \frac{2^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1} = 0$.

EXERCÍCIOS 13.3 Integração de Séries de Potências

Nota: Se uma série de potências converge em um extremo, então ela é contínua nele.

1. $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ para todo x. Logo, $R = +\infty$ e $\int_0^x e^t dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{n!} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

3. Da equação (1) da Secção 13.2.1, $\frac{1}{4-x} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}x}\right) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(\tfrac{1}{4}x)^n$, $|\tfrac{1}{4}x| < 1$. Logo, $R = 4$ e

$$\int_2^x \frac{dt}{4-t} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_2^x (\tfrac{1}{4}t)^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{(\frac{1}{4}x)^{n+1}}{n+1} - \frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{n+1}\right] = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1} - 2^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n - 2^n}{4^n n}$$

Nota: Se cada termo em uma série de termos do mesmo sinal for menor do que a metade do termo precedente, o erro em uma aproximação por uma soma parcial será menor do que o último termo retido. Isso fica evidente ao compararmos o resto da série com uma série geométrica com $r = \frac{1}{2}$

5. (a) $\int_0^1 e^t dx = e^t\Big]_0^1 = e - 1 \approx 2,718 - 1 = 1,718$

(b) Do Exercício 1 com $x = 1$, $\int_0^1 e^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5.040} = 1,718$

com $|\text{erro}| < \frac{1}{5.040} = 0,0002$.

7. (a) $\int_2^3 \frac{dt}{4-t} = -\ln|4-t|\Big]_2^3 = -\ln 1 + \ln 2 = \ln 2 = 0,693$

(b) Do Exercício 3 com $x = 3$, $\int_2^3 \frac{dt}{4-t} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n - 2^n}{4^n n} = \frac{1}{4} + \frac{3^2 - 2^2}{4^2\cdot 2} + \frac{3^3 - 2^3}{4^3\cdot 3} + \cdots + \frac{3^{20} - 2^{20}}{4^{20}\cdot 20}$.

Como cada termo é menor que $\frac{3}{4}$ do precedente $|\text{erro}| < 3\left(\frac{3^{20} - 2^{20}}{4^{20}\cdot 20}\right) = 0,00048$.

9. $f(t) = \begin{cases}(e^t - 1)/t & \text{se } t \neq 0\\ 1 & \text{se } t = 0\end{cases} = \begin{cases}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{n!} - 1\right)/t & \text{se } t \neq 0\\ 1 & \text{se } t = 0\end{cases} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^{n-1}}{n!}$ para todo t; logo, $R = +\infty$ e

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x \frac{t^{n-1}}{n!}dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n\cdot n!}$$

11. $h(t) = \begin{cases}\operatorname{senh} t/t & \text{se } t \neq 0\\ 1 & \text{se } t = 0\end{cases} = \begin{cases}(e^t - e^{-t})/2t & \text{se } t \neq 0\\ 1 & \text{se } t = 0\end{cases} = \begin{cases}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)t^n}{n!}\right]/2t & \text{se } t \neq 0\\ 1 & \text{se } t = 0\end{cases}$

$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n2}}{(2n+1)!}$ para todo t; logo $R = +\infty$ e $\int_0^x h(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x \frac{t^{2n}\,dt}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$

13. $\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot n!} = \frac{1}{1\cdot 1!} + \frac{1}{2\cdot 2!} + \frac{1}{4\cdot 4!} + \frac{1}{5\cdot 5!} + \frac{1}{6\cdot 6!} + \frac{1}{7\cdot 7!} + \cdots$

$\approx 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{96} + \frac{1}{600} + \frac{1}{4320} = 1,318$ com $|\text{erro}| < \frac{1}{4320} = 0,0002$.

15. $\int_0^1 h(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n-1)!} \approx \frac{1}{1\cdot 1!} + \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} + \frac{1}{7\cdot 7!} = 1 + \frac{1}{18} + \frac{1}{600} + \frac{1}{35280} = 1,057$

com $|\text{erro}| < \frac{1}{35280} = 0,00003.$

17. Da equação da Secção 13.2.2 com x substituído por x^3

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^3} = \int_0^{1/2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{3n}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1}\Big]_0^{1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(3n+1)2^{3n+1}} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{4\cdot 2^4} + \frac{1}{7\cdot 2^7}$$

$= 0,485$ com $|\text{erro}| < \frac{1}{10\cdot 2^{10}} = 0,0001.$

19. Para todo x, $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, logo, $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$.

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}\Big]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)n!}$$

$$\approx \frac{1}{1\cdot 0!} - \frac{1}{3\cdot 1!} + \frac{1}{5\cdot 2!} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 4!} - \frac{1}{11\cdot 5!} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} = 0,747$$

com $|\text{erro}| < \frac{1}{13\cdot 6!} = \frac{1}{9360} = 0,0001.$

21. Se $|x| < 1$, $tg^{-1}x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; logo, $tg^{-1}x^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{2n+1}$.

$$\int_0^{1/2} tg^{-1}x^2\,dx = \int_0^{1/2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{2n+1}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(2n+1)(4n+3)}\Big]_0^{1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(4n+3)2^{4n+3}}$$

$\approx \frac{1}{1\cdot 3\cdot 2^3} - \frac{1}{2\cdot 7\cdot 2^7} = \frac{1}{24} - \frac{1}{2688} = 0,0417 - 0,0004 = 0,041$ com $|\text{erro}| < \frac{1}{5\cdot 11\cdot 2^{11}} = 0,00001.$

Note que um termo < 0,0005 afetou a décima terceira casa.

23. Do Exercício 13.2.21 $\text{senh}\,x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ para todo x; logo, $x\,\text{senh}\sqrt{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+3/2}}{(2n+1)!}$ se $x \geq 0$

$$\int_0^1 x\,\text{senh}\sqrt{x}\,dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+3/2}}{(2n+1)!}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+5/2}}{(n+5/2)(2n+1)!}\Big]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+5)(2n+1)!}$$

$\approx \frac{2}{5\cdot 1} + \frac{2}{7\cdot 6} + \frac{2}{9\cdot 120} + \frac{2}{11\cdot 5040} = 0,450$ com $|\text{erro}| < \frac{2}{11\cdot 5040} = 0,00004.$

25. $$\text{senh}\,x = \int_0^x \cosh t\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)(2n)!}\Big]_0^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

27. Da equação (9) da Secção 13.3.9, $tg^{-1}x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ se $|x| < 1$. Portanto, se $x = \frac{1}{4}$, temos

$$tg^{-1}\frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^3\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4}\right)^5\frac{1}{5} - \left(\frac{1}{4}\right)^7\frac{1}{7} + \cdots \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{192} + \frac{1}{5120} = 0,25000 - 0,00521 + 0,00020 = 0,2450$$

com $|\text{erro}| < \frac{1}{114.688} = 0,000009.$

29. $f(x) = \int_1^x f'(t)\,dt = \int_1^x \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(t-1)^n}{n!}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(t-1)^{n+1}}{(n+1)n!}\Big]_1^x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}$

$f\left(\frac{5}{4}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(\frac{1}{4})^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{(n+1)!\,4^{n+1}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2!\,4^2} - \frac{1}{3!\,4^3} + \frac{1}{4!\,4^4} - \cdots \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{32} + \frac{1}{384} = 0{,}221$

com $|\text{erro}| < \frac{1}{6144} = 0{,}0002$.

31. Da equação 13.2.3, $\frac{1}{1-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}$ se $|t| < 1$. Portanto, se $|x| < 1$,

$$\text{tgh}^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

33. Da equação da Secção 13.3.1, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ se $|x| < 1$.

Portanto, $\ln(1-t) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-t)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{n}$ se $|t| < 1$. Assim, se $|x| < 1$,

$\int_0^x -\ln(1-t)\,dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{n}\,dt;\ (1-t)\ln(1-t) + t\Big]_0^x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^{n+1}}{n(n+1)};\ x + (1-x)\ln(1-x) = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-1)n}$

35. Da equação da Secção 13.3.9, se $|x| < 1$, $\text{tg}^{-1} x = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$; $x\ \text{tg}^{-1} x = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n-1}$

$\int_0^x t\ \text{tg}^{-1} t\ t = \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{t^{2n}}{2n-1}\,dt;\ \frac{1}{2}\left[(t^2+1)\ \text{tg}^{-1} t - t\right]_0^x = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{t^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}\Big]_0^x$

$$\frac{1}{2}[(x^2+1)\ \text{tg}^{-1} x - x] = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}$$

37. Para $|x| < R$, seja $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + \cdots + c_n x^n + \cdots$.

$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + 5c_5 x^4 + \cdots + nc_n x^{n-1} + \cdots$

Como $f(0) = 0$, então $c_0 = 0$. Como $f'(0) = 1$, então $c_1 = 1 = 1/1!$.

$f''(x) = 2c_2 + 2\cdot 3c_3 + 3\cdot 4c_4 x^2 + 4\cdot 5c_5 x^3 + \cdots + n(n-1)c_n x^{n-2} + \cdots$

Como $f''(x) = -f(x)$,

$2c_2 = -c_0,\ 2\cdot 3c_3 = -c_1,\ 3\cdot 4c_4 = -c_2,\ 4\cdot 5c_5 = -c_3,\ \ldots,\ (n-1)nc_n = c_{n-2},\ \ldots$

$c_2 = -\frac{1}{2}c_0 = 0,\ c_3 = -\frac{1}{2\cdot 3}c_1 = -\frac{1}{2\cdot 3} = -\frac{1}{3!},\ c_4 = -\frac{1}{3\cdot 4}c_2 = 0,\ c_5 = -\frac{1}{4\cdot 5}c_3 = \left(-\frac{1}{4\cdot 5}\right)\left(-\frac{1}{3!}\right) = \frac{1}{5!},\ \ldots$

E assim, por indução, $c_{2n} = 0$ e $c_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$. Portanto, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$.

$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}\right|x^2 = 0 < 1$ para todo x, logo

$R = +\infty$.

EXERCÍCIOS 13.4 Série de Taylor

1. A série Maclaurin para $\cos x$ é $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ e $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}x^{n+1}$ onde ξ_n está entre 0 e x e $f^{(n+1)}(\xi_n)$ é um dos seguintes números: $\pm \operatorname{sen}\xi_n$ ou $\pm\cos\xi_n$. Em qualquer caso $|f^{(n+1)}(\xi_n)| \leq 1$. Assim, $0 \leq |R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ para todo x. Como $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ da equação (16) da Secção **13.4.16**, segue do teorema do "sanduíche" que $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$. Logo, a série dada de Maclaurin representa $\cos x$ para todo x.

3. A série de Maclaurin para $\cosh x$ é $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ e $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}x^{n+1}$ onde ξ_n está entre 0 e x e $f^{(n+1)}(\xi_n)$ é $\operatorname{senh}\xi_n$ ou $\cosh\xi_n$. Em qualquer caso, $|f^{(n+1)}(\xi_n)| \leq \cosh x$. Assim, $0 \leq |R_n| \leq \cosh x \cdot \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}$. Como $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ da equação da Secção 13.4.16, segue teorema do "sanduíche" que $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$. Logo, a série de Maclaurin dada representa $\cosh x$ para todo x.

5. (a) $\operatorname{senh} x = \frac{d}{dx}(\cosh x) = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2nx^{2n-1}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

(b) $\cosh x = \frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

7. Pelo Exemplo 3 da Secção 13.3.3 a série de Maclaurin para $\ln(x+1)$ é $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ para x em $(-1, 1]$.

Então, $\ln x = \ln\left[2\left(\frac{x-2}{2}+1\right)\right] = \ln 2 + \ln\left(\frac{x-2}{2}+1\right) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^n}{n2^n}$ para x em $(0, 4]$.

9.

n	0	1	2	3	4	5	n
$f^{(n)}(x)$	$\ln(x+1)$	$\frac{1}{x+1}$	$-\frac{1}{(x+1)^2}$	$\frac{2}{(x+1)^3}$	$-\frac{3!}{(x+1)^4}$	$\frac{4!}{(x+1)^5}$	$(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^n}$
$f^{(n)}(1)$	$\ln 2$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$-\frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{2^5}$	$(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{2^n}$

Logo, a série de Taylor de f em 1 é

$$\ln(x+1) = \ln 2 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2\cdot 2^2}(x-1)^2 + \frac{1}{3\cdot 3^3}(x-1)^3 - \frac{1}{4\cdot 2^4}(x-1)^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}(x-1)^n + \cdots$$

$$= \ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n2^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}\cdot\frac{n2^n}{(x-1)^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n}{2n+2}\right||x-1| = \frac{1}{2}|x-1|$$

Portanto, a série é absolutamente convergente se $\frac{1}{2}|x-1| < 1$, isto é, se $|x-1| < 2$. Logo, o raio de convergência é 2.

11.

n	0	1	2	3	4	n
$f^{(n)}(x)$	$x^{1/2}$	$\frac{1}{2}x^{-1/2}$	$-\frac{1}{2^2}x^{-3/2}$	$\frac{3}{2^3}x^{-5/2}$	$-\frac{3\cdot 5}{2^4}x^{-7/2}$	$(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n}x^{(1-2n)/2}$
$f^{n}(2^2)$	2	$\frac{1}{2^2}$	$-\frac{1}{2^2 2^3}$	$\frac{3}{2^3 2^5}$	$-\frac{3\cdot 5}{2^4 2^7}$	$(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n 2^{2n-1}}$

Assim, a série de Taylor de f em 4 é

$$\sqrt{x} = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{2^2 2^3 2!}(x-4)^2 + \frac{3}{2^3 2^5 3!}(x-4)^3 - \frac{3\cdot 5}{2^4 2^7 4!}(x-4)^4 + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2^5 2^9 5!}$$

$$+ \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n 2^{2n-1} n!}(x-4)^n + \cdots$$

$$= 2 + \frac{1}{4}(x-4) + 2\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\,4^n}(x-4)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)(2n-1)(x-4)^{n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)(2n+2)4^{n+1}}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)4^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)(x-4)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{2n-1}{4(2n+2)}\right||x-4| = \frac{1}{4}|x-4|$$

Portanto, a série é absolutamente convergente se $\frac{1}{4}|x-4| < 1$, isto é, se $|x-4| < 4$. Logo, o raio de convergência é 4.

13. $f(x) = \cos x$, $f'(x) = -\operatorname{sen} x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \operatorname{sen} x$, $f^{(4)}(x) = \cos x$. Portanto, a série de Taylor de f em $\frac{1}{3}\pi$ é

$$\cos x = \cos\tfrac{1}{3}\pi - \operatorname{sen}\tfrac{1}{3}\pi(x-\tfrac{1}{3}\pi) - \cos\tfrac{1}{3}\pi\frac{(x-\frac{1}{3}\pi)^2}{2!} + \operatorname{sen}\tfrac{1}{3}\pi\frac{(x-\frac{1}{3}\pi)^3}{3!} + \cos\tfrac{1}{3}\pi\frac{(x-\frac{1}{3}\pi)^4}{4!} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}(x-\tfrac{1}{3}\pi) - \frac{1}{4}(x-\tfrac{1}{3}\pi)^2 + \frac{1}{12}\sqrt{3}(x-\tfrac{1}{3}\pi)^3 + \frac{1}{48}(x-\tfrac{1}{3}\pi)^4 - \cdots$$

$|f^{(n+1)}(\frac{1}{3}\pi)/f^{(n)}(\frac{1}{3}\pi)|$ é também $\operatorname{tg}\frac{1}{3}\pi = \sqrt{3}$ ou $\operatorname{cotg}\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ e então $\leq \sqrt{3}$. Assim,

$$0 \leq \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\frac{1}{3}\pi)(x-\frac{1}{3}\pi)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{f^{(n)}(\frac{1}{3}\pi)(x-\frac{1}{3}\pi)^n}\right| \leq \left|\sqrt{3}\frac{1}{n+1}\right||x-\tfrac{1}{3}\pi|$$

Pelo teorema do "sanduíche" $\lim_{n\to+\infty}|u_{n+1}/u_n| = 0$ para todo x; logo, o raio de convergência é $+\infty$.

15.

n	0	1	2	3	4	5	6
$f^{(n)}(x)$	$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$	$\operatorname{sen} 2x$	$2\cos 2x$	$-2^2\operatorname{sen} 2x$	$-2^3\cos 2x$	$2^4\operatorname{sen} 2x$	$2^5\cos 2x$
$f^{(n)}(0)$	0	0	2	0	-2^3	0	2^5

Portanto, a série de Maclaurin de f é

$$\operatorname{sen}^2 x = 0 + 0x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 + \frac{2^5}{6!}x^6 + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$$

17. (a) $f(x) = \operatorname{tg} x$; $f'(x) = \sec^2 x$; $f''(x) = 2\sec^2 x \operatorname{tg} x$; $f'''(x) = 4\sec^2 x \operatorname{tg}^2 x + 2\sec^4 x$;

$f^{(4)}(x) = 8\sec^2 x \operatorname{tg}^3 x + 16\sec^4 x \operatorname{tg} x$; $f^{(5)} = 16\sec^2 x \operatorname{tg}^4 x + 88\sec^4 x \operatorname{tg}^2 x + 16\sec^6 x$

$f(0) = 0$; $f'(0) = 1$; $f''(0) = 0$; $f'''(0) = 2$; $f^{(4)}(0) = 0$; $f^{(5)}(0) = 16$

Logo, a série de Maclaurin de f é

$$\operatorname{tg} x = 0 + 1\cdot x + 0\cdot\frac{x^2}{2!} + 2\cdot\frac{x^3}{3!} + 0\cdot\frac{x^4}{4!} + 16\cdot\frac{x^5}{5!} + \cdots \approx x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$$

(b) $\sec^2 x = \frac{d}{dx}\operatorname{tg} x \approx 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4$

(c) $\ln|\sec x| = \int_0^x \operatorname{tg} t\,dt \approx \int_0^x \left(t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5\right)dt = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{45}x^6$

19. $58° = \left(\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{90}\pi\right)$ rad. Usando o resultado do Exercício 13 com $x = \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{90}\pi$, temos

$$\cos 58° = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(-\frac{1}{90}\pi\right) - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{90}\pi\right)^2 + \frac{1}{12}\sqrt{3}\left(-\frac{1}{90}\pi\right)^3 + \cdots \approx \frac{1}{2} + \frac{\pi}{180}\sqrt{3} - \frac{\pi^2}{32\,400} - \frac{\pi^3}{8.748.000}\sqrt{3} = 0{,}5299$$

com $|\text{erro}| < \frac{\pi^3}{8\,748\,000}\sqrt{3} = 0{,}00001$.

21.

n	0	1	2	3	4
$f^{(n)}(x)$	$x^{1/5}$	$\frac{1}{5}x^{-4/5}$	$-\frac{4}{5}x^{-7/5}$	$\frac{4\cdot 9}{5^3}x^{-14/5}$	$-\frac{4\cdot 9\cdot 14}{5^4}x^{-19/5}$
$f^{(n)}(2^5)$	2	$\frac{1}{5\cdot 2^4}$	$-\frac{4}{5^2 2^9}$	$\frac{4\cdot 9}{5^3 2^{14}}$	$-\frac{4\cdot 9\cdot 14}{5^4 2^{19}}$

Portanto, a série de Taylor para f em 32 é

$$\sqrt[5]{x} = 2 + \frac{1}{5\cdot 2^4}(x-32) - \frac{4}{5^2 2^9}\cdot\frac{(x-32)^2}{2} + \frac{4\cdot 9}{5^3 2^{14}}\cdot\frac{(x-32)^3}{6} - \frac{4\cdot 9\cdot 14}{5^4 2^{19}}\cdot\frac{(x-32)^4}{24} + \cdots$$

Usando essa série com $x = 30$, isto é, $x - 32 = -2$ temos

$$\sqrt[5]{30} = 2 - \frac{1}{5\cdot 2^3} - \frac{4}{5^2 2^7\cdot 2} - \frac{4\cdot 9}{5^2 2^{11}\cdot 6} - \frac{4\cdot 9\cdot 14}{5^4 2^{15}\cdot 24} + \cdots \approx 2 - 0{,}025 - 0{,}000625 - 0{,}000023 = 1{,}97435$$

com $|\text{erro}| < 0{,}000023$.

23. Da fórmula 13.3.8, $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right)$ se $|x| < 1$. Qdo. $x = -\frac{1}{9}$ temos

$$\ln\frac{8/9}{10/9} = \ln 0{,}8 \approx -2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9^3\cdot 3} + \frac{1}{9^5\cdot 5}\right) = -0{,}2231 \text{ com } |\text{erro}| < \frac{2}{9^5\cdot 5} = 0{,}000007.$$

25. Do Exemplo 13.2.3, $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$ para todo x. Portanto,

$$e^1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} \approx 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} + \frac{1}{11!} = 2{,}7182818$$

com $|\text{erro}| < \frac{1}{11!} = 2{,}5\cdot 10^{-8}$.

27. Para todo x, sen $x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$. Portanto,

$$\int_0^{1/2} \operatorname{sen} x^2\,dx = \int_0^{1/2}\left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{4!} - \cdots\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11\cdot 5!} - \cdots\right]_0^{1/2} \approx \frac{1}{3\cdot 8} - \frac{1}{42\cdot 128} = 0{,}042$$

com $|\text{erro}| < \frac{1}{1.320\cdot 2048} = 0{,}000004$.

29. Seja $f(x) = \ln(1 + \operatorname{sen} x)$; $f'(x) = \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$; $f''(x) = \frac{-\operatorname{sen} x(1 + \operatorname{sen} x) - \cos x(\cos x)}{(1 + \operatorname{sen} x)^2}$

$= \frac{-1 - \operatorname{sen} x}{(1 + \operatorname{sen} x)^2} = \frac{-1}{1 + \operatorname{sen} x}$. Então, $f(0) = \ln 1 = 0$; $f'(0) = 1$; $f''(0) = -1$.

Portanto, a série de Taylor para $\ln(1 + \operatorname{sen} x)$ em 0 é $x - \frac{x^2}{2} + \cdots$. Logo,

$$\int_0^{0,1} \ln(1 + \operatorname{sen} x)\,dx = \int_0^{0,1}\left(x - \frac{x^2}{2} + \cdots\right)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right]_0^{0,1} \approx \frac{1}{200} = 0{,}005 \text{ com } |\text{erro}| < \frac{1}{6.000}.$$

31. Do resultado do Exercício 13.4.1

$$g(x) = \begin{cases}(1 - \cos x)/x & \text{se } x \neq 0\\ 0 & \text{se } x = 0\end{cases} = \begin{cases}\left[1 - \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right)\right]/n & \text{se } x \neq 0\\ 0 & \text{se } x = 0\end{cases} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n)!} \text{ para todo } x.$$

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n)!}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\left.\frac{x^{2n}}{2n(2n)!}\right]_0^1 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n(2n)!} = \frac{1}{2\cdot 2!} - \frac{1}{4\cdot 4!} + \frac{1}{6\cdot 6!} - \cdots$$

$$\approx \frac{1}{4} - \frac{1}{96} = 0{,}240 \text{ com } |\text{erro}| < \frac{1}{4.320} = 0{,}0002.$$

33. Dividimos a seguinte identidade repetidamente por $x - 1$, usando divisão simétrica:

$$3x^4 - 17x^3 + 35x^2 - 32x + 17 = a_4(x-1)^4 + a_3(x-1)^3 + a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0$$

```
3   -17   35   -32   17 ( 1
      3   -14   21   -11
-----------------------
3   -14   21   -11  ( 6 = a0
      3   -11   10
-----------------
3   -11   10  (-1 = a1
      3   -8
-----------
3   -8  ( 2 = a2
      3
-----
3  (-5 = a3;  a4 = 3
```

EXERCÍCIOS 13.5 Série Binomial

1. $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}x^3 + \dots + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^n + \dots$$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2^n n!} x^n$$

A série é absolutamente convergente se $|x| < 1$; Assim, o raio de convergência é 1.

3. $f(x) = (4+x)^{-1/2} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{4}x)^{-1/2}$. Substituímos x por $\frac{1}{4}x$ no Exemplo 13.5.1 para obter

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x\right) + \frac{1\cdot 3}{2^2 2!}\left(\frac{1}{4}x\right)^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3 3!}\left(\frac{1}{4}x\right)^3 + \dots + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!}\left(\frac{1}{4}x\right)^n + \dots\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{8^n n!} x^n$$

A série converge absolutamente se $\frac{1}{4}|x| < 1$; $|x| < 4$. O raio da convergência é 4.

5. $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3} = (1-x^3)^{1/3}$

$$= 1 + \frac{1}{3}(-x^3) + \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{(-x^3)^2}{2!} + \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\frac{(-x^3)^3}{3!} + \dots + \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\cdots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)\frac{(-x^3)^n}{n!}$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-4)}{3^n n!} x^{3n}$$

A série é absolutamente convergente se $|x^3| < 1$; assim, o raio de convergência é 1.

7. $f(x) = (9+x^4)^{-1/2} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{9}x^4\right)^{-1/2}$. Substituindo x por $\frac{1}{9}x^4$ no Exemplo 13.5.1 para obter

$$f(x) = \frac{1}{3}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}x^4\right) + \frac{1\cdot 3}{2^2 2!}\left(\frac{1}{9}x^4\right)^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3 3!}\left(\frac{1}{9}x^4\right)^3 + \dots + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!}\left(\frac{1}{9}x^4\right)^n + \dots\right]$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{18^n n!} x^{4n}$$

A série converge absolutamente se $\frac{1}{9}x^4 < 1$; $|x| < \sqrt{3}$. O raio de convergência é $\sqrt{3}$.

9. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x}} = x^2(1+x)^{-1/2}$. Do Teorema 13.5.1, se $|x| < 1$,

$$f(x) = x^2\left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!}x^n\right] = x^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!}x^{n+2}$$

O raio de convergência da série é 1.

11. $\sqrt{24} = \sqrt{25-1} = 5\sqrt{1-\frac{1}{25}} = 5\left(1-\frac{1}{25}\right)^{1/2} = 5\left[1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{25}\right) + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}\left(-\frac{1}{25}\right)^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}\left(-\frac{1}{25}\right)^3 + \dots\right]$

$$\approx 5\left(1 - \frac{1}{50} - \frac{1}{5000} - \frac{1}{250.000}\right) = 4,899 \text{ com } |\text{erro}| < \frac{5}{250.000} = 0,00002.$$

13. $\sqrt[4]{630} = \sqrt[4]{625+5} = 5\left(1+\frac{1}{125}\right)^{1/4} = 5\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{125}\right)+\frac{\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}\right)}{2!}\left(\frac{1}{125}\right)^2+\cdots\right] = 5\left(1+\frac{1}{500}-\frac{3}{50.000}+\cdots\right)$

$\approx 5\left(1+\frac{1}{500}\right) = 5,010$ com $|\text{erro}| < \frac{5\cdot 3}{50.000} = 0,0003.$

15. $\frac{1}{\sqrt[3]{128}} = (125+3)^{-1/3} = \frac{1}{5}\left(1+\frac{3}{125}\right)^{-1/3} = \frac{1}{5}\left[1+\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{125}\right)+\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)}{2!}\left(\frac{3}{125}\right)^2+\cdots\right] \approx \frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{125}\right)$

$= 0,198$ com $|\text{erro}| < \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{15.625} = 0,00003.$

17. Na série no Exemplo 13.5.1 substituímos t^2 e obtemos

$$(1+t^2)^{-1/2} = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}t^{2n} \quad \text{se } |t|<1$$

Logo, se $|x|<1$,

$$\operatorname{senh}^{-1}x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \int_0^x\left[1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}t^{2n}\right]dt = x+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!(2n+1)}x^{2n+1}$$

O raio de convergência é 1.

19. (a) $\sqrt[4]{1+x} = (1+x)^{1/4} = 1+\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}\right)\frac{x^2}{2!}+\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{7}{4}\right)\frac{x^3}{3!}+\cdots = 1+\frac{1}{4}x+\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{3\cdot 7\cdot 11\cdots(4n-5)}{4^n n!}x^n$

(b) Substituindo x por x^2 obtemos $(1+x^2)^{1/4} = 1+\frac{1}{4}x^2+\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{3\cdot 7\cdot 11\cdots(4n-5)}{4^n n!}x^{2n}$.

(c) $\int_0^{1/2}(1+x^2)^{1/4}dx = \int_0^{1/2}\left(1+\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{32}x^4+\frac{7}{128}x^6-\cdots\right)dx = \left[x+\frac{1}{12}x^3-\frac{3}{160}x^5+\frac{1}{128}x^7-\cdots\right]_0^{1/2}$

$\approx \frac{1}{2}+\frac{1}{96}-\frac{3}{5.120} = 0,510$ com $|\text{erro}| < \frac{1}{16.384} = 0,00006.$

21. $\int_0^{1/3}\sqrt{1+x^3}\,dx = \int_0^{1/3}(1+x^3)^{1/2}dx = \int_0^{1/3}\left[1+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{x^6}{2!}+\cdots\right]dx = \left[x+\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{56}x^7+\cdots\right]_0^{1/3}$

$\approx \frac{1}{3}+\frac{1}{648} = 0.335$ com $|\text{erro}| < \frac{1}{56\cdot 3^7} = 0.000008.$

23. $\int_0^1\sqrt[3]{8+x^2}\,dx = \int_0^1 2\left(1+\frac{x^2}{8}\right)^{1/3}dx = 2\int_0^1\left[1+\frac{1}{3}\frac{x^2}{8}+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}\left(\frac{x^2}{8}\right)^2+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}{3!}\left(\frac{x^2}{8}\right)^3+\cdots\right]dx$

$= 2\int_0^1\left(1+\frac{x^2}{24}-\frac{x^4}{9\cdot 8^2}+\frac{5x^6}{81\cdot 8^3}-\cdots\right)dx = 2\left[x+\frac{x^3}{72}-\frac{x^5}{45\cdot 8^2}+\frac{5x^7}{567\cdot 8^3}-\cdots\right]_0^1$

$\approx 2\left[1+\frac{1}{72}-\frac{1}{45\cdot 8^2}\right] = 2,027$ com $|\text{erro}| < \frac{10}{567\cdot 8^3} = 0,00003.$

25. $\int_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \int_0^{1/2}(1+x^4)^{-1/2}dx = \int_0^{1/2}\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)x^4+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{(x^4)^2}{2!}+\cdots\right]dx$

$= \int_0^{1/2}\left(1-\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{8}x^8-\cdots\right)dx = \left[x-\frac{1}{10}x^5+\frac{1}{24}x^9-\cdots\right]_0^{1/2} \approx \frac{1}{2}-\frac{1}{320} = 0,497$

com $|\text{erro}| < \frac{1}{72\cdot 2^9} = 0,00008.$

27. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} = \int_0^{1/2} (1-x^3)^{-1/2} dx = \int_0^{1/2} \left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^3) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{(-x^3)^2}{2!} + \cdots\right] dx$

$= \int_0^{1/2} \left(1 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^6 + \cdots\right) dx = \left[x + \frac{1}{8}x^4 + \frac{3}{56}x^7 + \cdots\right]_0^{1/2} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{128} + \frac{3}{56 \cdot 2^7} = 0,508$

com $|\text{erro}| < \frac{3}{56 \cdot 2^7} = 0,0004.$

29. Na série do Exemplo 13.5.1 substituímos x por $-t^2$ e temos para $|t| < 1$.

$$t^p(1-t^2)^{-1/2} = t^p\left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n n!} t^{2n}\right] = t^p + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n n!} t^{2n+p}$$

$$\int_0^x t^p(1-t^2)^{-1/2} dt = \int_0^x \left[t^p + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n n!} t^{2n+p}\right] dt$$

$$= \left[\frac{t^{p+1}}{p+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n(2n+p+1)n!} t^{2n+p+1}\right]_0^x = \frac{x^{p+1}}{p+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n(2n+p+1)n!} x^{2n+p+1}$$

A série converge absolutamente se $|x| < 1$; portanto, o raio de convergência é 1.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 13

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$. $\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n \to +\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{x^n}\right| = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}}|x| = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{1 + 1/n}}|x| = |x|$.

Portanto, a série de potências é absolutamente convergente se $|x| < 1$, isto é, se $-1 < x < 1$.

$x = -1$: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ é convergente, pelo teste de séries alternadas.

$x = 1$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente, pois é a série p com $p = \frac{1}{2} < 1$.

Portanto, o intervalo de convergência é $[-1, 1)$.

3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{3^n n(n+1)}$. $\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n \to +\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)(n+2)} \cdot \frac{3^n n(n+1)}{x^n}\right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{3(n+2)}|x| = \frac{1}{3}|x|$

Portanto, a série de potências é absolutamente convergente se $|x| < 3$, isto é, se $-3 < x < 3$.

$x = \pm 3$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\pm 1)^n}{n^2 + n}$ é absolutamente convergente por comparação com a série p $(p = 2)$.

Portanto, o intervalo de convergência é $[-3, 3]$.

5. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{2^n}(x-3)^n$. $\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n \to +\infty} \left|\frac{(n+1)!(x-3)^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n!(x-3)^n}\right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{2}|x-3| = \begin{cases} +\infty & \text{se } x \neq 3 \\ 0 & \text{se } x = 3 \end{cases}$

Assim, a série é convergente somente se $x = 3$.

7. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{6^n}(x+1)^n$. $\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n \to +\infty} \left|\frac{(n+1)^2(x+1)^{n+1}}{6^{n+1}} \cdot \frac{6^n}{n^2(x+1)^n}\right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 |x+1| = \frac{1}{6}|x+1|$

Logo, a série de potências é absolutamente convergente se $|x+1| < 6$, isto é, se $-7 < x < 5$.

$x + 1 = \pm 6$: $\sum_{n=1}^{+\infty} (\pm 1)^n n^2$ é divergente pois $\lim_{n \to +\infty} n^2 \neq 0$.

Portanto, o intervalo de convergência é $(-7, 5)$.

9. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n2^n}$. $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}\cdot\frac{n2^n}{(x-1)^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2(n+1)}|x-1| = \frac{1}{2}|x-1|$.

Logo, a série de potências é absolutamente convergente se $\frac{1}{2}|x-1| < 1$, isto é, se $-1 < x < 3$.

$x = 3$: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ é convergente, pelo teste de séries alternadas.

$x = -1$: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-2)^n}{n2^n} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ é a série harmônica divergente.

Portanto, o intervalo de convergência é $(-1, 3]$.

11. $\sum_{n=0}^{+\infty}(\operatorname{sen} 2n)x^n$. Como $\operatorname{sen} 2n$ varia entre -1 e 1, os testes da razão e da raiz falham. No entanto, se $|x| < 1$, a série de potências é absolutamente convergente, por comparação com uma série geométrica $|(\operatorname{sen} 2n)x^n| < |x|^n$; enquanto se $|x| = 1$, a série diverge pois $\lim_{n\to+\infty}\operatorname{sen} 2n \neq 0$. Portanto, o intervalo de convergência é $(-1, 1)$.

13. $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}$. (a) $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\cdot\frac{2n}{x^{2n}}\right| = |x|$.

A série de potências é absolutamente convergente se $|x| < 1$. Logo, $R = 1$.

$x = \pm 1$: $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{2n}$ converge pelo teste das séries alternadas.

Portanto, o domínio de f é $[-1, 1]$.

(b) $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x^{2n-1}$. $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{x^{2n-1}}\right| = x^2$. Logo, $R = 1$.

(c) $f'(\pm 1) = \sum_{n=1}^{+\infty}\pm(-1)^n$ é divergente, pois $\lim_{n\to+\infty} 1 \neq 0$. Logo, o domínio de f' é $(-1, 1)$.

15. $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$ (a) $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{[(n+1)]!}\cdot\frac{(n!)^2}{x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{|x|}{(n+1)^2} = 0 < 1$

Portanto, $R = +\infty$, e o domínio de f é $(-\infty, +\infty)$.

(b) $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n!(n-1)!}$. $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^n}{(n+1)!n!}\cdot\frac{n!(n-1)!}{x^{n-1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{|x|}{(n+1)n} = 0 < 1$

Portanto, $R = +\infty$ e (c) o domínio de f' é $(-\infty, +\infty)$.

17. Usando a equação da Secção 13.2.4, onde $|\frac{1}{4}x| < 1$ de modo que $R = 4$,

$$\int_0^x \frac{dt}{t^2+16} = \frac{1}{16}\int_0^x \frac{dt}{1+(\frac{1}{4}t)^2} = \frac{1}{16}\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\tfrac{1}{4}t)^{2n}\right]dt = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(\frac{1}{4}x)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^{4n+4}(2n+1)}$$

19. $f(t) = \begin{cases}(\operatorname{sen} t)/t & \text{se } t \neq 0\\ 1 & \text{se } t = 0\end{cases} = \begin{cases}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} & \text{se } t \neq 0\\ 1 & \text{se } t = 0\end{cases} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}$ para todo t.

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}\text{ para todo } x;\quad R = +\infty.$$

Nota: Se uma série é alternada, | erro | < primeiro termo omitido; caso contrário, se cada termo for menor que a metade do precedente, | erro | < último termo retido.

21. Tomando $x = 3$ no Exercício 17,

$$\int_0^3 \frac{dt}{t^2+16} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{3}{4}\right)^{2n+1} \approx \frac{1}{4}\left[\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{3}{4}\right)^7+\frac{1}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^9-\frac{1}{11}\left(\frac{3}{4}\right)^{11}\right] = 0,1606 = 0,161$$

com $|\text{erro}| < \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{13}\left(\frac{3}{4}\right)^{13} = 0,0005$.

23. Tomando $x = \frac{1}{2}$ no Exercício 19,

$$\int_0^{1/2} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \approx \frac{1}{2}-\frac{1}{8\cdot 3\cdot 6} = 0,493 \quad \text{com } |\text{erro}| < \frac{1}{32\cdot 5\cdot 120} = 0,00005.$$

25. Do resultado do Exemplo 13.3.4 temos $\operatorname{tg}^{-1}x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ se $|x| < 1$. Portanto,

$$\operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{5} = \frac{1}{5}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7+\cdots \approx \frac{1}{5}-\frac{1}{375}+\frac{1}{15.625} = 0,1974 \quad \text{com } |\text{erro}| < \frac{1}{7\cdot 5^7} = 0,000002.$$

27. $$\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{125+5} = 5\left(1+\frac{1}{25}\right)^{1/3} = 5\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{25}\right)+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}\left(\frac{1}{25}\right)^2+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}{3!}\left(\frac{1}{25}\right)^3+\cdots\right]$$

$$\approx 5\left[1+\frac{1}{3\cdot 25}-\frac{1}{9\cdot 25^2}\right] = 5,0658 \quad \text{com } |\text{erro}| < \frac{5}{81\cdot 25^3} = 0,000004.$$

29. $3° = \frac{1}{60}\pi$. Como $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$ para todo x, então

$$\cos\frac{\pi}{60} = 1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{60}\right)^2+\frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{60}\right)^4-\cdots \approx 1-\frac{\pi^2}{7.200} = 0,9986 \quad \text{com } |\text{erro}| < \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{60}\right)^4 = 0,000003.$$

31. Da equação da Secção 13.3.8 e da Ilustração 13.3.2 com $y = \frac{5}{4}$, $x = \frac{(5/4)-1}{(5/4)+1} = \frac{1}{9}$,

$$\ln 5 = \ln 4 + \ln\frac{5}{4} = 2\ln 2 + 2\left[\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}\right)+\cdots\right] \approx 2(0,69315)+2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3\cdot 9^3}+\frac{1}{5\cdot 9^5}\right) = 1,6094$$

com $|\text{erro}| < \frac{2}{5\cdot 9^5} = 0,000007$. Se $y = 5$, $x = \frac{2}{3}$ e dez termos da série são necessários.

33. $$\int_0^{1/4}\sqrt{x}\,\operatorname{sen}x\,dx = \int_0^{1/4}x^{1/2}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right)dx = \int_0^{1/4}\left(x^{3/2}-\frac{x^{7/2}}{6}+\frac{x^{11/2}}{120}-\cdots\right)dx$$

$$= \left[\frac{2}{5}x^{5/2}-\frac{x^{9/2}}{27}+\frac{x^{13/2}}{60\cdot 13}-\cdots\right]_0^{1/4} \approx \frac{2}{5\cdot 2^5}-\frac{1}{27\cdot 2^9} = 0,0124 \quad \text{com } |\text{erro}| < \frac{1}{60\cdot 13\cdot 2^{13}} = 0,0000001.$$

35. $f(x) = a^x = e^{x\ln a}$. Como $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$ para todo x, então, para todo x,

$a^x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\ln a)^n x^n}{n!}$. O intervalo de convergência é $(-\infty, +\infty)$.

37. Usando $\operatorname{sen}u\cos v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u+v)+\operatorname{sen}(u-v)]$ e $\operatorname{sen}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ para todo x, temos

$$f(x) = \operatorname{sen}^3 x = \operatorname{sen}^2 x\operatorname{sen}x = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x)\operatorname{sen}x = \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}x\cos 2x) = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}x-\tfrac{1}{2}(\operatorname{sen}3x-\operatorname{sen}x)]$$

$$= \frac{3}{4}\operatorname{sen}x-\frac{1}{4}\operatorname{sen}3x = \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

O intervalo de convergência é $(-\infty, +\infty)$.

39.

n	0	1	2	3	4	5
$f^{(n)}(x)$	$\text{sen}\,3x$	$3\cos 3x$	$-3^2\,\text{sen}\,3x$	$-3^3\cos 3x$	$3^4\,\text{sen}\,3x$	$3^5\cos x$
$f^{(n)}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	0	-3	0	3^3	0	-3^5

$$\text{sen}\,3x = -3\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{3^3}{3!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^3-\frac{3^5}{5!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^5+\cdots = -(3x+\pi)+\frac{1}{3!}(3x+\pi)^3-\frac{1}{5!}(3x+5)^5+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(3x+\pi)^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

41. $f(x)=\ln x;\quad f'(x)=\frac{1}{x};\quad f''(x)=-\frac{1}{x^2};\quad f'''(x)=\frac{2}{x^3};\quad f^{(4)}(x)=-\frac{3!}{x^4};\quad f^{(5)}(x)=\frac{4!}{x^5}$

$f(-1)=\ln 1=0;\ f'(-1)=-1;\ f''(-1)=-1;\ f'''(-1)=-2;\ f^{(4)}(-1)=-3!;\ f^{(5)}(-1)=-4!$

$$\ln|x| = 0-(x+1)-\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{1}{3}(x+1)^3-\frac{1}{4}(x+1)^4-\frac{1}{5}(x+1)^5-\cdots = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+1)^n}{n}$$

43. $J_0(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!\,n!\,2^{2n}}$. $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{2n+2}}{(n+1)!(n+1)!\,2^{2n+2}}\cdot\frac{n!\,n!\,2^{2n}}{x^{2n}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{x^2}{4(n+1)^2}=0$

para todo x. Logo, J_0 converge para todo x.

$J_1(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!(n+1)!\,2^{2n+1}}$. $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{2n+3}}{(n+1)!(n+2)!\,2^{2n+3}}\cdot\frac{n!(n+1)!\,2^{2n+1}}{x^{2n+1}}\right|$

$=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^2}{4(n+2)(n+1)}=0$. Logo, J_1 converge para todo x.

45. $J_0'(x)=\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!\,n!\,2^{2n}}\right]=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2n x^{2n-1}}{n!\,n!\,2^{2n}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(n-1)!\,n!\,2^{2n-1}}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!\,2^{2n+1}}=-J_1(x)$

47. $y=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!(n+1)!\,2^{2n+1}};\quad \frac{dy}{dx}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!(n+1)!\,2^{2n+1}};\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)\frac{2n(2n+1)x^{2n-1}}{n!(n+1)!\,2^{2n+1}}$

$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-1)$

$$=x^2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n(2n+1)x^{2n-1}}{n!(n+1)!\,2^{2n+1}}+x\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!(n+1)!\,2^{2n+1}}+(x^2-1)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!(n+1)!\,2^{2n+1}}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n(2n+1)x^{2n+1}}{n!(n+1)!\,2^{2n+1}}+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)x^{2n+1}}{n!(n+1)!\,2^{2n+1}}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+3}}{n!(n+1)!\,2^{2n+1}}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!\,2^{n+1}}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!(n+1)!\,2^{2n+1}}[2n(2n+1)+(2n+1)-1]+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+3}}{n!(n+1)!\,2^{2n+1}}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!(n+1)!\,2^{2n+1}}[4n(n+1)]+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+3}}{n!(n+1)!\,2^{2n+1}}$$

$$=0+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!(n+1)!\,2^{2n+1}}[2^2n(n+1)]-\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(n-1)!\,n!\,2^{2n-1}}$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(n-1)!\,n!\,2^{2n-1}}-\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(n-1)!\,n!\,2^{2n-1}}=0$$

Então, $y=J_1(x)$ é uma solução da equação diferencial.

CAPÍTULO QUATORZE

VETORES NO PLANO E EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS

EXERCÍCIOS 14.1 Vetores no Plano

1. $\|\langle 3, 4\rangle\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

3. $\|\langle e, -\frac{1}{2}\rangle\| = \sqrt{e^2 + (-\frac{1}{2})^2} = \sqrt{e^2 + \frac{1}{4}}$

5. (a) $\langle 1, -1\rangle$. $\operatorname{tg}\theta = \frac{-1}{1} = -1$; $\theta = \frac{7}{4}\pi$ (b) $\langle -3, 0\rangle$. $\operatorname{tg}\theta = \frac{0}{-3} = 0$; $\theta = \pi$

   (c) $\langle 5, 2\rangle$. $\operatorname{tg}\theta = \frac{2}{5} = 0.4$; $\theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) \approx 0,38$

7. $P = (3, 7)$; $Q = (5, 4)$. $V(\overrightarrow{PQ}) = \langle 5 - 3, 4 - 7\rangle = \langle 2, -3\rangle$.

9. $P = (-5, -3)$; $Q = (0, 3)$. $V(\overrightarrow{PQ}) = \langle 0 + 5, 3 + 3\rangle = \langle 5, 6\rangle$.

11. $P = (2, 5)$; $Q = (1, 6)$; $R = (-3, 2)$; $S = (x, y)$. Como $V(\overrightarrow{RS}) = V(\overrightarrow{PQ})$, então

    $\langle x + 3, y - 2\rangle = \langle 1 - 2, 6 - 5\rangle = \langle -1, 1\rangle$ logo $x + 3 = -1$; $x = -4$ e $y - 2 = 1$; $y = 3$. Assim, $S = (-4, 3)$.

13. $P = (0, 3)$; $Q = (5, -2)$; $R = (7, 0)$; $S = (x, y)$. Como $V(\overrightarrow{RS}) = V(\overrightarrow{PQ})$, então

    $\langle x - 7, y - 0\rangle = \langle 5 - 0, -2 - 3\rangle = \langle 5, -5\rangle$ logo $x - 7 = 5$; $x = 12$ e $y = -5$. Assim, $S = (12, -5)$.

15. (a) $\langle 2, 4\rangle + \langle -3, 5\rangle = \langle 2 - 3, 4 + 5\rangle = \langle -1, 9\rangle$ (b) $\langle -3, 0\rangle + \langle 4, -5\rangle = \langle -3 + 4, 0 - 5\rangle = \langle 1, -5\rangle$

17. (a) $\langle -3, -4\rangle - \langle 6, 0\rangle = \langle -3 - 6, -4 - 0\rangle = \langle -9, -4\rangle$ (b) $\langle 1, e\rangle - \langle -3, 2e\rangle = \langle 1 + 3, e - 2e\rangle = \langle 4, -e\rangle$

19. $A = \langle 2, 4\rangle$, $B = \langle 4, -3\rangle$, $C = \langle -3, 2\rangle$. (a) $A + B = \langle 2, 4\rangle + \langle 4, -3\rangle = \langle 6, 1\rangle$

    (b) $\|C - B\| = \|\langle -3, 2\rangle - \langle 4, -3\rangle\| = \|\langle -7, 5\rangle\| = \sqrt{(-7)^2 + 5^2} = \sqrt{49 + 25} = \sqrt{74}$

    (c) $\|7A - B\| = \|7\langle 2, 4\rangle - \langle 4, -3\rangle\| = \|\langle 14, 28\rangle - \langle 4, -3\rangle\| = \|\langle 10, 31\rangle\| = \sqrt{10^2 + 31^2} = \sqrt{100 + 961} = \sqrt{1.061}$

21-23. $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ e $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$

21. (a) $5\mathbf{A} = 5(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) = 10\mathbf{i} + 15\mathbf{j}$ (b) $-6\mathbf{B} = -6(4\mathbf{i} - \mathbf{j}) = -24\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

(c) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) + (4\mathbf{i} - \mathbf{j}) = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ (d) $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| = \|6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}\| = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

23. (a) $\|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\| = \|2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}\| + \|4\mathbf{i} - \mathbf{j}\| = \sqrt{2^2 + 3^2} + \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{13} + \sqrt{17}$

(b) $5\mathbf{A} - 6\mathbf{B} = 5(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) - 6(4\mathbf{i} - \mathbf{j}) = 10\mathbf{i} + 15\mathbf{j} - 24\mathbf{i} + 6\mathbf{j} = -14\mathbf{i} + 21\mathbf{j}$

(c) $\|5\mathbf{A} - 6\mathbf{B}\| = \|-14\mathbf{i} + 21\mathbf{j}\| = \sqrt{(-14)^2 + 21^2} = \sqrt{196 + 441} = \sqrt{637} = 7\sqrt{13}$

(d) $\|5\mathbf{A}\| - \|6\mathbf{B}\| = 5\|\mathbf{A}\| - 6\|\mathbf{A}\| = 5\sqrt{2^2 + 3^2} - 6\sqrt{4^2 + (-1)^2} = 5\sqrt{13} - 6\sqrt{17}$

25. (a) $5\mathbf{A} - 2\mathbf{B} - 2\mathbf{C} = 5(-4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) - 2(-\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) - 2(5\mathbf{i} - \mathbf{j}) = (-20\mathbf{i} + 10\mathbf{j}) + (2\mathbf{i} - 6\mathbf{j}) + (-10\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$

$= (-20 + 2 - 10)\mathbf{i} + (10 - 6 + 2)\mathbf{j} = -28\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

(b) $\|5\mathbf{A} - 2\mathbf{B} - 2\mathbf{C}\| = \sqrt{(-28)^2 + 6^2} = \sqrt{784 + 36} = \sqrt{820} = 2\sqrt{205}$

27-31. Seja $\mathbf{U}$ o vetor unitário requerido

27. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (8\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) + (3\mathbf{i} - \mathbf{j}) = 11\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$; $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| = \sqrt{11^2 + 4^2} = \sqrt{121 + 16} = \sqrt{137}$; $\mathbf{U} = \dfrac{11}{\sqrt{137}}\mathbf{i} + \dfrac{4}{\sqrt{137}}\mathbf{j}$

29. (a) $r = \|3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$; $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} = 5(\frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j})$; $\mathbf{U} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$

(b) $r = \|2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}\| = 2\|\mathbf{i} + \mathbf{j}\| = 2\sqrt{1^2 + 1^2} = 2\sqrt{2}$; $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} = 2\sqrt{2}(\frac{1}{2}\sqrt{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\mathbf{j}) = 2\sqrt{2}(\cos\frac{1}{4}\pi\mathbf{i} + \text{sen}\,\frac{1}{4}\pi\mathbf{j})$

$\mathbf{U} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\mathbf{j}$

31. (a) $r = \|-4\mathbf{i} + 4\sqrt{3}\mathbf{j}\| = \sqrt{(-4)^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16 + 48} = \sqrt{64} = 8$

$-4\mathbf{i} + 4\sqrt{3}\mathbf{j} = 8(-\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{j}) = 8(\cos\frac{2}{3}\pi\mathbf{i} + \text{sen}\,\frac{2}{3}\pi\mathbf{j})$; $\mathbf{U} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{j}$

(b) $r = \|-16\mathbf{i}\| = 16\|\mathbf{i}\| = 16$; $-16\mathbf{i} = 16(-\mathbf{i} + 0\mathbf{j}) = 16(\cos\pi\mathbf{i} + \text{sen}\,\pi\mathbf{j})$; $\mathbf{U} = -\mathbf{i}$

33. $\mathbf{A} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$; $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$; $\mathbf{C} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$; $\mathbf{C} = h\mathbf{A} + k\mathbf{B}$. Portanto,

$$5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} = h(-2\mathbf{i} + \mathbf{j}) + k(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) = (-2h + 3k)\mathbf{i} + (h - 2k)\mathbf{j}$$

Assim, $\begin{matrix} -2h + 3k = 5 \\ h - 2k = -5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} h = 2 \\ k = 3 \end{matrix}$.

35. $\mathbf{A} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$; $\mathbf{B} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$; $\mathbf{C} = 7\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$. Se $\mathbf{C} = h\mathbf{A} + k\mathbf{B}$, então

$$7\mathbf{i} - 5\mathbf{j} = h(\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) + k(-2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = (h - 2k)\mathbf{i} + (-2h + 4k)\mathbf{j}$$

Portanto, $\begin{matrix} h - 2k = 7 \\ -2h + 4k = -5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -2h + 4k = -14 \\ -2h + 4k = -5 \end{matrix}$. Como esse sistema não tem solução, $\mathbf{C}$ não pode ser escrito na forma $h\mathbf{A} + k\mathbf{B}$.

37. Escolha os eixos de modo que a representação posicional da força de 60 N esteja ao longo do eixo x. Então, o vetor $\mathbf{A} = \langle 60, 0\rangle$ representa essa força. Seja o vetor $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2\rangle$ o representante da força 80 N. Então, $b_1 = 80\cos 30° \approx 69,3$ e $b_2 = 80 \operatorname{sen} 30° = 40$. A força resultante é $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \langle 60, 0\rangle + \langle 69,3; 40\rangle = \langle 129,3; 40\rangle$.

(a) $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| = \sqrt{(129,3)^2 + (40)^2} \approx 135,3$

(b) Se θ for o ângulo entre $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ então $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{40}{129,3} \approx 0,309$; $\theta \approx 17°$.

39. Desenhe uma figura semelhante a figura 14.1.14. Seja $a = \|\mathbf{A}\| = 112$, $b = \|\mathbf{B}\| = 84$, $c = \|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| = 16$

Da lei dos co-senos, $\cos\theta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{112^2 + 162^2 - 84^2}{2 \cdot 112 \cdot 162} = 0,874$; $\theta \approx 29,0°$.

41. (a) orientação: $360° - \operatorname{sen}^{-1}(96/400) = 360° - 13,9° = 346,1°$ (b) $v = \sqrt{400^2 - 96^2} = 388,3$ (km/h)

43. (a) orientação: $\operatorname{tg}^{-1}\dfrac{0,8}{1,5} = 28,1°$ (b) $v = \sqrt{1,5^2 + ,8^2} = 1,7$ (c) em $\dfrac{1}{1,5}$ h ele se desloca $\dfrac{0,8}{1,5} = 0,5$

45. Seja $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2\rangle$. Então, $0\mathbf{A} = 0\langle a_1, a_2\rangle = \langle 0a_1, 0a_2\rangle = \mathbf{0}$ e $c\mathbf{0} = c\langle 0, 0\rangle = \langle c0, c0\rangle = \langle 0, 0\rangle = \mathbf{0}$.

47. Seja $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2\rangle$. Então, $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \langle a_1, a_2\rangle + \langle 0, 0\rangle = \langle a_1 + 0, a_2 + 0\rangle = \langle a_1, a_2\rangle = \mathbf{A}$. Também

$$1\mathbf{A} = 1\langle a_1, a_2\rangle = \langle 1a_1, 1a_2\rangle = \langle a_1, a_2\rangle = \mathbf{A}$$

49. Seja $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2\rangle$. Então,

$$(cd)\mathbf{A} = (cd)\langle a_1, a_2\rangle = \langle (cd)a_1, (cd)a_2\rangle = \langle c(da_1), c(da_2)\rangle = c\langle da_1, da_2\rangle = c(d\mathbf{A})$$

51. (a) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \langle 2, -5\rangle + (\langle 3, 1\rangle + \langle -4, 2\rangle) = \langle 2, -5\rangle + \langle -1, 3\rangle = \langle 1, -2\rangle$

(b) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = (\langle 2, -5\rangle + \langle 3, 1\rangle) + \langle -4, 2\rangle = \langle 5, -4\rangle + \langle -4, 2\rangle = \langle 1, -2\rangle$

53. (a) Seja $\mathbf{A} = \langle 3, -2\rangle$ e $\mathbf{B} = \langle -6, 4\rangle$. Como $\mathbf{B} = -2\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ é um múltiplo escalar de $\mathbf{A}$. Logo, as representações de dois vetores são paralelas. Assim, as representações posicionais dos dois vetores são colineares.

(b) Seja $\mathbf{C} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Se $\mathbf{C} = c\mathbf{A} + d\mathbf{B}$ então $\mathbf{i} + \mathbf{j} = c(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) + d(-6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = (3c - 6d)\mathbf{i} + (-2c + 4d)\mathbf{j}$.

$$\begin{aligned} 3c - 6d &= 1 \\ -2c + 4d &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 6c - 2d &= 2 \\ 6c - 2d &= -3 \end{aligned}$$

Como esse sistema não tem solução, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ não são uma base.

55. Temos $\mathbf{A} = \mathbf{V}(\overrightarrow{PQ})$, $\mathbf{B} = \mathbf{V}(\overrightarrow{QR})$, $\mathbf{C} = \mathbf{V}(\overrightarrow{RS})$. Como $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{RS}$ são lados de um triângulo, S é o mesmo que o ponto P. Da Figura 14.1.13 vemos que $\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{QR}) = \mathbf{V}(\overrightarrow{PR})$. Logo,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{QR}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{RS}) = \mathbf{V}(\overrightarrow{PR}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{RS}) = \mathbf{V}(\overrightarrow{PS}) = \mathbf{0}$$

EXERCÍCIOS 14.2 Produto Escalar

1. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \langle -1, 2\rangle \cdot \langle -4, 3\rangle = (-1)(-4) + (2)(3) = 4 + 6 = 10$

3. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (2\mathbf{i} - \mathbf{j})\cdot(\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) = (2)(1) + (-1)(3) = 2 - 3 = -1$

5. $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle \cdot \langle 1, 0\rangle = (1)(1) + (0)(0) = 1$; $\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle \cdot \langle 0, 1\rangle = (0)(0) + (1)(1) = 1$

$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \langle 1, 0\rangle \cdot \langle 0, 1\rangle = (1)(0) + (0)(1) = 0$

7. Seja $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2\rangle$, $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2\rangle$, $\mathbf{C} = \langle c_1, c_2\rangle$. Então,

$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \langle a_1, a_2\rangle \cdot \langle b_1 + c_1, b_2 + c_2\rangle = a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) = (a_1b_1 + a_2c_2) + (a_2b_2 + a_2c_2)$

$= (a_1b_1 + a_2b_2) + (a_1c_1 + a_2c_2) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$

9. Seja $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2\rangle$. Então, $\mathbf{0}\cdot\mathbf{A} = \langle 0, 0\rangle \cdot \langle a_1, a_2\rangle = (0)(a_1) + (0)(a_2) = 0$.

11. $\mathbf{A} = \langle 4, 3\rangle$; $\mathbf{B} = \langle -1, -1\rangle$. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 4 - 3 = 1$; $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{16 + 9} = 5$; $\|\mathbf{B}\| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$.

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|} = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{10}\sqrt{2}$$

13. $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$; $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 20 - 36 = -16$; $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{25 + 144} = 13$; $\|\mathbf{B}\| = \sqrt{16 + 9} = 5$.

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|} = \frac{-16}{(13)(5)} = -\frac{16}{65}$$

15. $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$; $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + k\mathbf{j}$. Queremos encontrar K tal que $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|\cos\frac{1}{4}\pi$, isto é, tal que

$6 + 2k = \sqrt{13}\sqrt{4 + k^2}(\frac{1}{2}\sqrt{2})$; $72 + 48k + 8k^2 = 52 + 3k^2$; $5k^2 - 48k - 20 = 0$; $(5k + 2)(k - 10) = 0$

$$k = -\tfrac{2}{5} \text{ ou } k = 10$$

17. $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} - k\mathbf{j}$ e $\mathbf{B} = k\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$, onde K é um escalar.

(a) $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são ortogonais $\iff \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0 \iff 5k - 6k = 0 \iff k = 0$

(b) $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são paralelos se e somente se houver um escalar a não-nulo tal que

$$a\mathbf{A} = \mathbf{B};\quad a(5\mathbf{i} - k\mathbf{j}) = k\mathbf{i} + 6\mathbf{j};\quad 5a = k \quad\text{e}\quad -ak = 6;\quad -5a^2 = 6$$

Essa equação não tem solução real.

19. $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$; $\mathbf{B} = \mathbf{i} + k\mathbf{j}$. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 5 + 2k$, $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$, $\|\mathbf{B}\| = \sqrt{1 + k^2}$.

$\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|} = \cos\frac{1}{3}\pi$; $\frac{5 + 12k}{13\sqrt{1 + k^2}} = \frac{1}{2}$; $4(25 + 120k + 144k^2) = (13)^2(1 + k^2)$; $407k^2 + 480k - 69 = 0$

$k = \frac{-240 \pm \sqrt{85.683}}{407}$. Como $5 + 2k$ deve ser positivo, então $k = \frac{-240 + \sqrt{85.683}}{407}$.

21. Para a parábola $y = x^2$, $y' = 2x$. Logo, uma normal à parábola no ponto $(2,4)$ tem uma inclinação de $-\frac{1}{4}$. Assim, $\operatorname{tg}\theta = -\frac{1}{4}$. Os vetores unitários requeridos são $\pm(\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j})$, isto é

$-\frac{4}{\sqrt{17}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{17}}\mathbf{j}$ e $\frac{4}{\sqrt{17}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{17}}\mathbf{j}$ ou, equivalentemente $-\frac{4}{17}\sqrt{17}\,\mathbf{i} + \frac{1}{17}\sqrt{17}\,\mathbf{j}$ e $\frac{4}{17}\sqrt{17}\,\mathbf{i} - \frac{1}{17}\sqrt{17}\,\mathbf{j}$.

23. $\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$. A inclinação de uma representação posicional de A é a_2/a_1. Logo, a inclinação de representante posicional de qualquer vetor ortogonal a A é $-a_1/a_2$. Dois vetores com essa propriedade são $\pm(a_2\mathbf{i} - a_1\mathbf{j})$. O módulo desses vetores é $\sqrt{a_2^2 + a_1^2} = \|\mathbf{A}\|$. Logo, os vetores unitários requeridos são $\pm\frac{1}{\|\mathbf{A}\|}(a_2\mathbf{i} - a_1\mathbf{j})$.

25. $\mathbf{A} = -8\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$; $\mathbf{B} = 7\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (-8)(7) + 4(-6) = -80$, $\|\mathbf{B}\| = \sqrt{7^2 + 6^2} = \sqrt{85}$.

(a) A projeção escalar de A sobre B é $\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|} = -\frac{80}{\sqrt{85}}$.

(b) A projeção vetorial de A sobre B é $\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|^2} = -\frac{80}{85}(7\mathbf{i} - 6\mathbf{j}) = -\frac{112}{17}\mathbf{i} + \frac{90}{17}\mathbf{j}$.

27. A componente de $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ na direção de $\mathbf{B} = 7\mathbf{i} + \mathbf{j}$ é $\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|} = \frac{35 - 6}{\sqrt{49 + 1}} = \frac{29}{\sqrt{50}} = \frac{29}{50}\sqrt{50}$.

29. $\mathbf{F} = 8(\cos \frac{1}{3}\pi\mathbf{i} + \text{sen } \frac{1}{3}\pi\mathbf{j}) = 4\mathbf{i} + 4\sqrt{3}\mathbf{j}$.

(a) Se W_1 J for o trabalho realizado por F para mover um objeto ao longo do eixo x, da origem ao ponto $(6, 0)$, então $W_1 = \mathbf{F}\cdot\langle 6, 0\rangle = \langle 4, 4\sqrt{3}\rangle\cdot\langle 6, 0\rangle = 24$.

(b) Se W_2 J for o trabalho realizado por F para mover um objeto ao longo do eixo y, da origem ao ponto $(0, 6)$, então $W_2 = \mathbf{F}\cdot\langle 0, 6\rangle = \langle 4, 4\sqrt{3}\rangle\cdot\langle 0, 6\rangle = 24\sqrt{3}$.

31. $\mathbf{F} = 9(\cos \frac{2}{3}\pi\mathbf{i} + \text{sen } \frac{2}{3}\pi\mathbf{j}) = -\frac{9}{2}\mathbf{i} + \frac{9}{2}\sqrt{3}\,\mathbf{j}$.

Se W J for o trabalho realizado por F para mover um objeto da origem a $(-4, -2)$, então,

$$W = \mathbf{F}\cdot\langle -4, -2\rangle = \langle -\tfrac{9}{2}, \tfrac{9}{2}\sqrt{3}\rangle\cdot\langle -4, -2\rangle = 18 - 9\sqrt{3} \approx 2,41$$

33. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{A} + (\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) + \mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} + 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}$

35. Escolha os vértices do triângulo na origem e os pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$.

O ponto médio do segmento 0A é $M(\frac{1}{2}a_1, \frac{1}{2}a_2)$ e o ponto médio do segmento $0B$ é $N(\frac{1}{2}b_1, \frac{1}{2}b_2)$.

$\mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) = \langle b_1 - a_1, b_2 - a_2\rangle$ e $\mathbf{V}(\overrightarrow{MN}) = \langle \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}a_1, \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{2}a_2\rangle = \frac{1}{2}\langle b_1 - a_1, b_2 - a_2\rangle = \frac{1}{2}\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})$

Assim, o segmento MN é paralelo ao segmento AB. Como, $\|\mathbf{V}(\overrightarrow{MN})\| = \frac{1}{2}\|\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})\|$, então $|\overline{MN}| = \frac{1}{2}|\overline{AB}|$

37. Se A e B forem dois vetores paralelos não-nulos, então $\mathbf{B} = k\mathbf{A}$. Se α for a medida em radianos do ângulo entre eles, $\cos\alpha = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|} = \frac{\mathbf{A}\cdot(k\mathbf{A})}{\|\mathbf{A}\|\|k\mathbf{A}\|} = \frac{k(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})}{|k|\|\mathbf{A}\|^2} = \frac{k\|\mathbf{A}\|^2}{|k|\|\mathbf{A}\|^2} = \pm 1$. Assim, $\alpha = 0$ ou π.

Por outro lado, se $\alpha = 0$ então $\cos\alpha = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|} = 1$. Portanto,

$$\left(\frac{\mathbf{A}}{\|\mathbf{A}\|} - \frac{\mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|}\right)^2 = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}{\|\mathbf{A}\|^2} - 2\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|} + \frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|^2} = 1 - 2 + 1 = 0;\ \text{logo, } \frac{\mathbf{A}}{\|\mathbf{A}\|} - \frac{\mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|} = 0;\ \mathbf{B} = \frac{\|\mathbf{B}\|}{\|\mathbf{A}\|}\mathbf{A}.$$

Assim, há um escalar $k = \|\mathbf{B}\|/\|\mathbf{A}\|$ tal que $\mathbf{B} = k\mathbf{A}$ e portanto, A e B são paralelos. Analogamente, se $\alpha = \pi$, então $\cos\alpha = -1$ e $\mathbf{B} = -(\|\mathbf{B}\|/\|\mathbf{A}\|)\mathbf{A}$ e, novamente A e B são paralelos.

EXERCÍCIOS 14.3 Funções com Valores Vetoriais e Equações Paramétricas

1. $\mathbf{R}(t) = \frac{1}{t}\mathbf{i} + \sqrt{4-t}\,\mathbf{j}$. O domínio de $\mathbf{R}$ é $\{t \mid t \neq 0 \text{ e } t \leq 4\} = (-\infty, 0) \cup (0, 4]$.

3. $\mathbf{R}(t) = (\text{sen}^{-1} t)\mathbf{i} + (\cos^{-1} t)\mathbf{j}$. O domínio de sen^{-1} e $\cos^{-1}$ é o intervalo fechado $[-1, 1]$. Portanto, o domínio de R é $[-1, 1]$.

5. $\mathbf{R}(t) = \sqrt{t^2 - 9}\,\mathbf{i} + \sqrt{t^2 + 2t - 8}\,\mathbf{j}$. O domínio é $\{t \mid t^2 - 9 \geq 0 \text{ e } t^2 + 2t - 8 \geq 0\}$. $t^2 - 9 \geq 0$ se $t \leq -3$ ou $t \geq 3$. $t^2 + 2t - 8 = (t+4)(t-2) \geq 0$ se $t \leq -4$ ou $t \geq 2$. Portanto, o domínio de R é o conjunto de todos os números reais que não estejam no intervalo aberto $(-4, 3)$.

7. $x = 3t,\ y = 2t^2$. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{4t}{3} = \dfrac{4}{3}t$; $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{\frac{4}{3}}{3} = \dfrac{4}{9}$.

9. $x = t^2 e^t,\ y = t \ln t$. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{\ln t + 1}{te^t(2+t)}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dfrac{e^t(2+t) - (\ln t + 1)[e^t(2+t) + te^t(2+t) + te^t]}{t^2e^{2t}(2+t)^2}}{te^t(2+t)} = \frac{(2+t) - (\ln t + 1)(t^2 + 4t + 2)}{t^3e^{2t}(2+t)^3}$$

11. $x = a\cos t,\ y = b\,\text{sen}\,t$. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{b\cos t}{-a\,\text{sen}\,t} = -\dfrac{b}{a}\text{cotg}\,t$. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{\frac{b}{a}\text{cosec}^2 t}{-a\,\text{sen}\,t} = -\dfrac{b}{a^2}\text{cosec}^3 t$.

13. $\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + (t+1)\mathbf{j}$. As equações paramétricas são $x = t^2,\ y = t + 1;\ y - 1 = t$. Assim, $x = (y-1)^2$.

15. $\mathbf{R}(t) = 3\cosh t\,\mathbf{i} + 5\,\text{senh}\,t\,\mathbf{j}$. As equações paramétricas são $x = 3\cosh t,\ y = 5\,\text{senh}\,t$. Como $\cosh^2 t - \text{senh}^2 t = 1$, obtemos a hipérbole $\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{y}{5}\right)^2 = 1;\ 25x^2 - 9y^2 = 225$.

17. $\mathbf{R}(t) = \sec t\,\mathbf{i} + \text{tg}\,t\,\mathbf{j}$; t em $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. As equações paramétricas são $x = \sec t,\ y = \text{tg}\,t$. Como $\sec^2 t - \text{tg}^2 t = 1$, obtemos $x^2 - y^2 = 1$. Como $\sec t \geq 1$ para t em $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, obtemos apenas o ramo direito da hipérbole; assim, uma equação é $x^2 - y^2 = 1,\ x \geq 1$.

19. $\mathbf{R}(t) = 4\cos t\,\mathbf{i} + 3\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j}$; t em $[0, 2\pi]$. As equações paramétricas são $x = 4\cos t,\ y = 3\,\text{sen}\,t$. Como $\cos^2 t + \text{sen}^2 t = 1$, obtemos a elipse $\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1;\ 9x^2 + 16y^2 = 144$.

21. $x = 2\,\text{sen}\,t,\ y = 5\cos t$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{D_t y}{D_t x} = \dfrac{-5\,\text{sen}\,t}{2\cos t} = -\dfrac{5}{2}\text{tg}\,t$. Qdo $t = \frac{1}{3}\pi$, $x = 2\,\text{sen}\,\frac{1}{3}\pi = \sqrt{3}$, e $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{5}{2}\sqrt{3}$ de modo que uma equação da reta tangente à elipse seja

$$y - \frac{5}{2} = -\frac{5}{2}\sqrt{3}(x - \sqrt{3});\quad 2y - 5 = -5\sqrt{3}\,x + 15;\quad 5\sqrt{3}x + 2y = 20$$

23. $x = 4t^2 - 4t,\ y = 1 - 4t^2$ (parábola). $D_t x = 8t - 4,\ D_t y = -8t$. Tomando $D_t y = 0$, obtemos $t = 0$. Qdo. $t = 0$, $D_t x = -4 \neq 0$ e $y = 1$; logo $y = 1$ é uma equação da reta tangente horizontal. Tomando $D_t x = 0$, obtemos $t = \frac{1}{2}$. Qdo. $t = \frac{1}{2}$, $D_t y = -4 \neq 0$ e $x = -1$; logo, $x = -1$ é uma equação da reta tangente vertical.

25. As equações paramétricas para a trocóide são $x = at - b\,\text{sen}\,t$, $y = a - b\cos t$. Como $\cos t \le 1$, se $a > b > 0$, $D_t x = a - b\cos t \ge a - b > 0$ e a trocóide não tem reta tangente vertical.

27. As equações paramétricas da ciclóide são $x = a(t - \text{sen}\,t)$ e $y = a(1 - \cos t)$. Se x estiver em $[0, 2\pi a]$ então t está em $[0, 2\pi]$. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{D_t y}{D_t x} = \dfrac{\text{sen}\,t}{1 - \cos t}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{D_t y'}{D_t x} = \frac{-\dfrac{1}{1-\cos t}}{a(1-\cos t)} = \frac{1}{a(1-\cos t)^2},\quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{D_t y''}{D_t x} = \frac{\dfrac{2\,\text{sen}\,t}{a(1-\cos t)^2}}{a(1-\cos t)} = \frac{2\,\text{sen}\,t}{a^2(1-\cos t)^3}$$

y tem seu valor máximo qdo. $\cos t = -1$. Então, $t = \pi$ e $\dfrac{dy}{dx} = 0$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{1}{4a}$, $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 0$.

29. Uma hipociclóide é a curva traçada por um ponto P sobre a circunferência de raio b que rola dentro de uma circunferência fixa de raio a, $a > b$. Veja a Figura 14.3.29. Como a medida do comprimento de arco AB é igual a medida do comprimento de arco BP, segue que $at = b\theta$, e então

$\theta = \dfrac{a}{b}t$, $\theta - t = \dfrac{a-b}{b}t$. Além disso, $|\overline{OQ}| = a - b$. Vemos, da figura, que $V(\overrightarrow{OP}) = V(\overrightarrow{OQ}) + V(\overrightarrow{QP})$

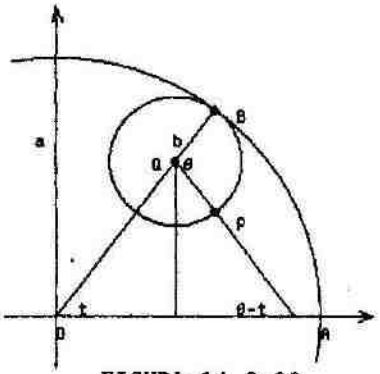


FIGURA 14.3.29

$$= [(a-b)\cos t\,\mathbf{i} + (a-b)\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j}] + b\cos(\theta - t)\,\mathbf{i} - b\,\text{sen}(\theta - t)\,\mathbf{j}$$

$$= \left[(a-b)\cos t + b\cos\frac{a-b}{b}t\right]\mathbf{i} + \left[(a-b)\,\text{sen}\,t - b\,\text{sen}\frac{a-b}{b}t\right]\mathbf{j}.$$

Logo, as equações paramétricas da hipociclóide são

$$x = (a-b)\cos t + b\cos\frac{a-b}{b}t \quad \text{e} \quad y = (a-b)\,\text{sen}\,t - b\,\text{sen}\frac{a-b}{b}t$$

31. As equações paramétricas da hipociclóide de quatro vértices são $x = a\cos^3 t$ e $y = a\,\text{sen}^3 t$
$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}\cos^2 t + a^{2/3}\text{sen}^2 t = a^{2/3}(\text{sen}^2 t + \cos^2 t) = a^{2/3}$. Uma equação é $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

33. As equações paramétricas de tratriz são $x = t - a\,\text{tgh}\dfrac{t}{a}$ e $y = a\,\text{sech}\dfrac{t}{a}$.

$\dfrac{dx}{dt} = 1 - \text{sech}^2\dfrac{t}{a} = \text{tgh}^2\dfrac{t}{a}$. Do método de Newton, o intercepto x da reta tangente é

$$x_1 = x - y/\frac{dy}{dx} = x - y\frac{dx/dt}{dy/dt} = \left(t - a\,\text{tgh}\frac{t}{a}\right) - \left(a\,\text{sech}\frac{t}{a}\right)\frac{\text{tgh}^2(t/a)}{-\text{sech}(t/a)\,\text{tgh}(t/a)} = t$$

35. A unidades de área é a área de um arco da ciclóide $x = a(t - \text{sen}\,t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

$$A = \int_{x=0}^{2\pi a} y\,dx = \int_{t=0}^{2\pi} a(1-\cos t)\,d[a(t - \text{sen}\,t)] = a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}[1 - 2\cos t + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2t)]dt = a^2\left[t - 2\,\text{sen}\,t + \tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{4}\text{sen}\,2t\right]_0^{2\pi} = 3\pi a^2$$

EXERCÍCIOS 14.4 Cálculo de Funções com Valores Vetoriais

1. $\lim_{t\to 2} R(t) = \left[\lim_{t\to 2}(3t-2)\right]i + \left[\lim_{t\to 2} t^2\right]j = 4i + 4j$

3. $\lim_{t\to \pi/2} R(t) = \left[\lim_{t\to \pi/2}(2\,\text{sen}\,t)\right]i + \left[\lim_{t\to \pi/2}\cos t\right]j = 2i + 0j = 2i$

5. $\lim_{t\to -1} R(t) = \left[\lim_{t\to -1} e^{t+1}\right]i + \left[\lim_{t\to -1}|t+1|\right]j = e^0 i + 0j = i$

7. $R(t) = e^{2t}i + \ln t\,j;\ R'(t) = 2e^{2t}i + \frac{1}{t}j;\ R''(t) = 4e^{2t}i - \frac{1}{t^2}j$

9. $R(t) = \text{tg}^{-1}t\,i + 2^t j;\ R'(t) = \frac{1}{1+t^2}i + 2^t(\ln 2)j;\ R''(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}i + 2^t(\ln 2)^2 j$

11. $R(t) = (t^2+4)^{-1}i + \sqrt{1-5t}\,j;\ R'(t) = -2t(t^2+4)^{-2}i - \frac{5}{2}(1-5t)^{-1/2}j$

$R''(t) = [-2(t^2+4)^{-2} + (-2t)(-4t)(t^2+4)^{-3}]i + \left[-\frac{5}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(1-5t)^{-3/2}(-5)\right]j$

$= (t^2+4)^{-3}[-2(t^2+4) + 8t^2]i - \frac{25}{4}(1-5t)^{-3/2}j = (6t^2-8)(t^2+4)^{-3}i - \frac{25}{4}(1-5t)^{-3/2}j$

13. $R(t) = 5\,\text{sen}\,2t\,i - \sec 4t\,j;\ R'(t) = 10\cos 2t\,i - 4\sec 4t\ \text{tg}\,4t\,j$

$R''(t) = -20\,\text{sen}\,2t\,i - 4(4\sec 4t\ \text{tg}^2 4t + 4\sec^3 4t)j = -20\,\text{sen}\,2t\,i - 16\sec 4t(\sec^2 4t - 1 + \sec^2 4t)j$

$= -20\,\text{sen}\,2t\,i + (16\sec 4t - 32\sec^3 4t)j$

15. $R(t) = (t-1)i + (2-t)j;\ \|R(t)\| = \sqrt{(t-1)^2 + (2-t)^2} = \sqrt{2t^2-6t+5}$

$$D_t\|R(t)\| = \frac{4t-6}{2\sqrt{2t^2-6t+5}} = \frac{2t-3}{\sqrt{2t^2-6t+5}}$$

17-19. $R(t) = (t^2+e^t)i + (t-e^{2t})j;\ Q(t) = (t^3+2e^t)i - (3t+e^{2t})j$

17. $D_t[R(t)+Q(t)] = D_t[(t^2+t^3+3e^t)i + (-2t-2e^{2t})j] = (2t+3t^2+3e^t)i + (-2-4e^{2t})j$ e

$D_tR(t) + D_tQ(t) = [(2t+e^t)i + (1-2e^{2t})j] + [(3t^2+2e^t)i - (3+2e^{2t})j]$

$= (2t+3t^2+3e^t)i + (-2-4e^{2t})j$

19. $D_t[R(t)\cdot Q(t)] = D_t[(t^2+e^t)(t^3+2e^t) - (t-e^{2t})(3t+e^{2t})]$

$= (2t+e^t)(t^3+2e^t) + (t^2+e^t)(3t^2+2e^t) - (1-2e^{2t})(3t+e^{2t}) - (t-e^{2t})(3+2e^{2t})$

$D_tR(t)\cdot Q(t) + R(t)\cdot D_tQ(t)$

$= [(2t+e^t)i + (1-2e^{2t})j]\cdot[(t^3+2e^t)i - (3t+e^{2t})j]$

$+ [(t^2+e^t)i + (t-e^{2t})j]\cdot[(3t^2+2e^t)i - (3+2e^{2t})j]$

$= [(2t+e^t)(t^3+2e^t) - (1-2e^{2t})(3t+e^{2t})] + [(t^2+e^t)(3t^2+2e^t) - (t-e^{2t})(3+2e^{2t})]$

Portanto, $D_t[R(t)\cdot Q(t)] = D_tR(t)\cdot Q(t) + R(t)\cdot D_tQ(t)$.

21. $R(t) = (2t^2-1)i + (t^2+3)j;\ R'(t) = 4ti + 2tj;\ R''(t) = 4i + 2j$

$R'(t)\cdot R''(t) = (4ti + 2tj)\cdot(4i + 2j) = 16t + 4t = 20t$

23. $\mathbf{R}(t) = e^{2t}\mathbf{i} + e^{-2t}\mathbf{j}$; $\mathbf{R}'(t) = 2e^{2t}\mathbf{i} - 2e^{-2t}\mathbf{j}$; $\mathbf{R}''(t) = 4e^{2t}\mathbf{i} + 4e^{-2t}\mathbf{j}$

$\mathbf{R}'(t)\cdot\mathbf{R}''(t) = (2e^{2t}\mathbf{i} - 2e^{-2t}\mathbf{j})\cdot(4e^{2t}\mathbf{i} + 4e^{-2t}\mathbf{j}) = 8e^{4t} - 8e^{-4t}$

25. Seja $\mathbf{R}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + g_1(t)\mathbf{j}$ e $\mathbf{Q}(t) = f_2(t)\mathbf{i} + g_2(t)\mathbf{j}$. Então,

$\mathbf{R}(t) + \mathbf{Q}(t) = [f_1(t)\mathbf{i} + g_1(t)\mathbf{j}] + [f_2(t)\mathbf{i} + g_2(t)\mathbf{j}] = [f_1(t) + f_2(t)]\mathbf{i} + [g_1(t) + g_2(t)]\mathbf{j}$

$D_t[\mathbf{R}(t) + \mathbf{Q}(t)] = [f_1'(t) + f_2'(t)]\mathbf{i} + [g_1'(t) + g_2'(t)]\mathbf{j}$

$= [f_1'(t)\mathbf{i} + g_1'(t)\mathbf{j}] + [f_2'(t)\mathbf{i} + g_2'(t)\mathbf{j}] = D_t\mathbf{R}(t) + D_t\mathbf{Q}(t)$

27. $\phi = h(t)$ e $\mathbf{G}(t) = \mathbf{F}(h(t)) = f(\phi)\mathbf{i} + g(\phi)\mathbf{j}$.

$D_t\mathbf{G}(t) = D_t[f(\phi)\mathbf{i} + g(\phi)\mathbf{j}] = [D_t f(\phi)]\mathbf{i} + [D_t g(\phi)]\mathbf{j} = [D_\phi f(\phi)D_t\phi]\mathbf{i} + [D_\phi g(\phi)D_t\phi]\mathbf{j}$

$= \{[D_\phi f(\phi)]\mathbf{i} + [D_\phi g(\phi)]\mathbf{j}\}D_t\phi = D_\phi[f(\phi)\mathbf{i} + g(\phi)\mathbf{j}]D_t\phi = [D_\phi\mathbf{G}(t)]D_t\phi$

29. Seja $\mathbf{R}'(t) = \operatorname{tg} t\,\mathbf{i} - \frac{1}{t}\mathbf{j}$. Então,

$\mathbf{R}(t) = \mathbf{i}\int \operatorname{tg} t\, dt - \mathbf{j}\int \frac{1}{t}\, dt = (\ln|\sec t| + C_1)\mathbf{i} - (\ln|t| + C_2)\mathbf{j} = \ln|\sec t|\mathbf{i} - \ln|t|\mathbf{j} + \mathbf{C}$

31. Seja $\mathbf{R}'(t) = e^{3t}\mathbf{i} + \frac{1}{t-1}\mathbf{j}$. Então, $\mathbf{R}(t) = \mathbf{i}\int e^{3t}dt + \mathbf{j}\int\frac{dt}{t-1} = \frac{1}{3}e^{3t}\mathbf{i} + \ln|t-1|\mathbf{j} + \mathbf{C}$.

33. Seja $\mathbf{R}'(t) = \ln t\,\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$. Então, $\mathbf{R}(t) = \mathbf{i}\int \ln t\, dt + \mathbf{j}\int t^2 dt = (t\ln t - t)\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{j} + \mathbf{C}$.

35. $\mathbf{R}(t) = \int \mathbf{R}'(t)dt = \mathbf{i}\int \operatorname{sen}^2 t\, dt + \mathbf{j}\int 2\cos^2 t\, dt = \frac{1}{4}(2t - \operatorname{sen} 2t)\mathbf{i} + \frac{1}{2}(2t + \operatorname{sen} 2t)\mathbf{j} + \mathbf{C}$

$\mathbf{R}(\pi) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{0} = \frac{1}{2}\pi\mathbf{i} + \pi\mathbf{j} + \mathbf{C}$; $\mathbf{C} = -\frac{1}{2}\pi\mathbf{i} - \pi\mathbf{j}$. Então, $\mathbf{R}(t) = \frac{1}{2}(t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t - \pi)\mathbf{i} + (t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t - \pi)\mathbf{j}$

37. $\mathbf{R}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$. $\mathbf{R}'(t) = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$. As equações paramétricas para R′ são $x = -\operatorname{sen}$ e $y = \cos t$; uma equação cartesiana é $x^2 + y^2 = \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t$; $x^2 + y^2 = 1$, a circunferência unitária $\mathbf{R}(t)\cdot\mathbf{R}'(t) = -\cos t\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t\cos t = 0$

A representação de $\mathbf{R}'(t_1)$ com seu ponto inicial em $\mathbf{R}(t_1)$ é ao longo da reta tangente à circunferência em $\mathbf{R}(t_1)$ enquanto que a representação posicional de $\mathbf{R}(t_1)$ é o raio da circunferência que é perpendicular à tangente.

39. $\mathbf{R}(t) = 3e^{2t}\mathbf{i} - 4e^{2t}\mathbf{j} = e^{2t}(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j})$ e $\mathbf{Q}(t) = 6e^{3t}\mathbf{j}$. $\mathbf{R}(t)$ tem a mesma direção que $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ e $\mathbf{Q}(t)$ tem a mesma direção que $\mathbf{j}$. Assim, $\alpha(t)$ é uma constante $D_t\alpha(t) = 0$.

41. $D_t[\mathbf{R}'(t)\cdot\mathbf{R}(t)] = \mathbf{R}''(t)\cdot\mathbf{R}(t) + \mathbf{R}'(t)\cdot\mathbf{R}'(t) = \mathbf{R}''(t)\cdot\mathbf{R}(t) + \|\mathbf{R}'(t)\|^2$

43. Do Teorema 14.4.8,

$$D_t\left[\frac{\mathbf{R}(t)}{f(t)}\right] = D_t[f(t)^{-1}\mathbf{R}(t)] = -f(t)^{-2}f'(t)\mathbf{R}(t) + f(t)^{-1}\mathbf{R}'(t) = \frac{f(t)\mathbf{R}'(t) - f'(t)\mathbf{R}(t)}{[f(t)]^2}$$

EXERCÍCIOS 14.5 Comprimento de Arco

L unidades é o comprimento de arco requerido.

1. $x = \frac{1}{2}t^2 + t,\ y = \frac{1}{2}t^2 - t;$ de $t = 0$ a $t = 1$.

$$L = \int_0^1 \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = \int_0^1 \sqrt{(t+1)^2 + (t-1)^2}\,dt = \int_0^1 \sqrt{2t^2 + 2}\,dt = \sqrt{2}\int_0^1 \sqrt{t^2 + 1}\,dt$$

$$= \sqrt{2}\left[\tfrac{1}{2}t\sqrt{t^2+1} + \tfrac{1}{2}\ln(t + \sqrt{t^2+1})\right]_0^1 = \sqrt{2}[\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})] = 1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})$$

3. $x = t^2 + 2t,\ y = t^2 - 2t;$ de $t = 0$ a $t = 2$.

$$L = \int_0^2 \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = \int_0^2 \sqrt{(2t+2)^2 + (2t-2)^2}\,t = \int_0^2 \sqrt{8t^2 + 8}\,dt = 2\sqrt{2}\int_0^2 \sqrt{t^2+1}\,dt$$

$$= 2\sqrt{2}\left[\tfrac{1}{2}t\sqrt{t^2+1} + \tfrac{1}{2}\ln(t + \sqrt{t^2+1})\right]_0^2 = \sqrt{2}[2\sqrt{5} + \ln(2+\sqrt{5})] = 2\sqrt{10} + \sqrt{2}\ln(2+\sqrt{5})$$

5. $R(t) = 2t^2\mathbf{i} + 2t^3\mathbf{j};$ de $t = 1$ a $t = 2$. $R'(t) = 4t\mathbf{i} + 6t^2\mathbf{j}$.

$$L = \int_1^2 \|R'(t)\|dt = \int_1^2 \sqrt{16t^2 + 36t^4}\,dt = 2\int_1^2 t\sqrt{4 + 9t^2}\,dt = \frac{2}{27}(4 + 9t^2)^{3/2}\Big]_1^2 = \frac{2}{27}[(40)^{3/2} - (13)^{3/2}]$$

7. $R(t) = 3e^{2t}\mathbf{i} - 4e^{2t}\mathbf{j};$ de $t = 0$ a $t = \ln 5$. $R'(t) = 6e^{2t}\mathbf{i} - 8e^{2t}\mathbf{j}$.

$$L = \int_0^{\ln 5} \|R'(t)\|dt = \int_0^{\ln 5} \sqrt{36e^{4t} + 64e^{4t}}\,dt = \int_0^{\ln 5} \sqrt{100e^{4t}}\,dt = 10\int_0^{\ln 5} e^{2t}dt = 5e^{2t}\Big]_0^{\ln 5}$$

$$= 5(e^{2\ln 5} - 1) = 5(5^2 - 1) = 120$$

9. $R(t) = e^t\cos t\,\mathbf{i} + e^t\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j};$ de $t = 0$ a $t = 1$. $R'(t) = (\cos t - \text{sen}\,t)e^t\mathbf{i} + (\text{sen}\,t + \cos t)e^t\mathbf{j}$.

$$L = \int_0^1 \|R'(t)\|dt = \int_0^1 \sqrt{(\cos^2 t - 2\cos t\,\text{sen}\,t + \text{sen}^2 t)e^{2t} + (\text{sen}^2 t + 2\,\text{sen}\,t\cos t + \cos^2 t)e^{2t}}\,dt$$

$$= \int_0^1 \sqrt{2(\cos^2 t + \text{sen}^2 t)e^{2t}}\,dt = \int_0^1 \sqrt{2}e^t dt = \sqrt{2}e^t\Big]_0^1 = \sqrt{2}(e - 1)$$

11. $R(t) = \text{tg}^{-1}t\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}\ln(t^2 + 1);$ de $t = 0$ a $t = 1$. $R'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}\mathbf{i} + \dfrac{t}{1+t^2}\mathbf{j}$.

$$L = \int_0^1 \|R'(t)\|dt = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{t}{1+t^2}\right)^2}\,dt = \int_0^1 \sqrt{\frac{1+t^2}{(1+t^2)^2}}\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln|t + \sqrt{1+t^2}|\Big]_0^1$$

$$= \ln(1 + \sqrt{2})$$

13. As equações paramétricas da hipociclóide de quatro vértices são $x = a\cos^3 t$ e $y = a\,\text{sen}^3 t$.

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{(-3a\cos^2 t\,\text{sen}\,t)^2 + (3a\,\text{sen}^2 t\cos t)^2}\,dt$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2\cos^2 t\,\text{sen}^2 t}\sqrt{\cos^2 t + \text{sen}^2 t}\,dt = 12a\int_0^{\pi/2} \text{sen}\,t\cos t\,dt = 6a\,\text{sen}^2 t\Big]_0^{\pi/2} = 6a$$

15. $x = 4\,\text{sen}\,2t,\ y = 4\cos 2t;$ de $t = 0$ a $t = \pi$.

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = \int_0^{\pi} \sqrt{(8\cos 2t)^2 + (-8\,\text{sen}\,2t)^2}\,dt = \int_0^{\pi} \sqrt{64\cos^2 2t + 64\,\text{sen}^2 2t}\,dt$$

$$= \int_0^{\pi} 8\sqrt{\cos^2 2t + \text{sen}^2 2t}\,dt = 8\int_0^{\pi} dt = 8t\Big]_0^{\pi} = 8\pi$$

17. $x = t - a\ \text{tgh}\,\frac{t}{a},\ y = a\ \text{sech}\,\frac{t}{a};$ de $t = -a$ a $t = 2a$. Seja $u = \frac{t}{a}$. Então,

$x = au - a\ \text{tgh}\,u$ e $u = a\ \text{sech}\,u$ de $u = -1$ a $u = 2$.

$$L = \int_{-1}^{2} \sqrt{(D_u x)^2 + (D_u y)^2}\,du = \int_{-1}^{2} \sqrt{(a - a\,\text{sech}^2 u)^2 + (-a\,\text{sech}\,u\ \text{tgh}\,u)^2}\,du$$

$$= a\int_{-1}^{2} \sqrt{(1 - \text{sech}^2 u)^2 + \text{sech}^2 u\ \text{tgh}^2 u}\,du = a\int_{-1}^{2} \sqrt{\text{tgh}^4 u + (1 - \text{tgh}^2 u)\ \text{tgh}^2 u}\,du = a\int_{-1}^{2} \sqrt{\text{tgh}^2 u}\,du$$

$$= a\int_{-1}^{2} |\ \text{tgh}\,u|\,du = a\int_{-1}^{0} -\ \text{tgh}\,u\,du + a\int_{0}^{2} \text{tgh}\,u\,du = -a\ln|\cosh u|\Big]_{-1}^{0} + a\ln|\cosh u|\Big]_{0}^{2}$$

$$= a\ln|\cosh(-1)| + a\ln|\cosh 2| = a[\ln\cosh 1 + \ln\cosh 2]$$

19. Se L unidades for a circunferência $r = 5\cos\theta$, então

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{r'^2 + r^2}\,d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{(-5\ \text{sen}\,\theta)^2 + (5\cos\theta)^2}\,d\theta = \int_0^{\pi} 5\sqrt{\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta}\,d\theta = 5\int_0^{\pi} d\theta = 5\theta\Big]_0^{\pi} = 5\pi$$

21. Se L unidades for a circunferência $r = a$, então

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r'^2 + r^2}\,d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{0^2 + a^2}\,d\theta = \int_0^{2\pi} a\,d\theta = a\theta\Big]_0^{2\pi} = 2\pi a$$

23. Se L unidades for o comprimento da cardióide inteira $r = 3\cos^2\frac{1}{2}\theta = \frac{3}{2}(1 + \cos\theta)$, então

$$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{r'^2 + r^2}\,d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{(-3\cos\tfrac{1}{2}\theta\ \text{sen}\tfrac{1}{2}\theta)^2 + 9\cos^4\tfrac{1}{2}\theta}\,d\theta = 2\int_0^{\pi} \sqrt{9\cos^2\tfrac{1}{2}\theta}\sqrt{\text{sen}^2\tfrac{1}{2}\theta + \cos^2\tfrac{1}{2}\theta}\,d\theta$$

$$= 6\int_0^{\pi} \cos\tfrac{1}{2}\theta\,d\theta = 12\ \text{sen}\tfrac{1}{2}\theta\Big]_0^{\pi} = 12$$

25. Se L unidades for o comprimento de arco da curva $r = e^{2\theta}$ de $\theta = 0$ a $\theta = 4$, então

$$L = \int_0^{4} \sqrt{r'^2 + r^2}\,d\theta = \int_0^{4} \sqrt{(2e2^{\theta})^2 + 4e^{4\theta}}\,d\theta = \int_0^{4} \sqrt{4e^{4\theta} + e^{4\theta}}\,d\theta = \sqrt{5}\int_0^{4} e^{2\theta}\,d\theta = \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\Big[e^{2\theta}\Big]_0^{4} = \tfrac{1}{2}\sqrt{5}(e^{8} - 1)$$

27. Se L unidades for o comprimento de arco da curva $r = a\,\text{sen}^3\frac{1}{3}\theta$ de $\theta = 0$ a $\theta = \theta_1$, então

$$L = \int_0^{\theta_1} \sqrt{r'^2 + r^2}\,d\theta = \int_0^{\theta_1} \sqrt{(a\,\text{sen}^2\tfrac{1}{3}\theta\cos\tfrac{1}{3}\theta)^2 + a^2\,\text{sen}^6\tfrac{1}{3}\theta}\,d\theta = a\int_0^{\theta_1} \sqrt{\text{sen}^4\tfrac{1}{3}\theta(\cos^2\tfrac{1}{3}\theta + \text{sen}^2\tfrac{1}{3}\theta)}\,d\theta$$

$$= a\int_0^{\theta_1} \text{sen}^2\frac{1}{3}\theta\,d\theta = \frac{1}{2}a\left[\theta - \frac{3}{2}\,\text{sen}\,\frac{2}{3}\theta\right]_0^{\theta_1} = \frac{1}{2}a\left(\theta_1 - \frac{3}{2}\,\text{sen}\,\frac{2}{3}\theta_1\right)$$

29. Usando metros, a trajetória do percevejo é uma ciclóide com equações paramétricas

$$x = 0{,}4(t - \text{sen}\,t) \quad \text{e} \quad y = 0{,}4(1 - \cos t)$$

Se a bicicleta percorre uma distância de 50π m e a circunferência do pneu é $0{,}8\pi$ m, então o número de revoluções feitas pelo percevejo é $\frac{50\pi}{0{,}8\pi} = 62{,}5$. Se L m for a distância percorrida pelo percevejo durante 62,5 voltas, então

$$L = 62{,}5\int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = 62{,}5\int_0^{2\pi} \sqrt{[0{,}4(1 - \cos t)]^2 + (0{,}4\ \text{sen}\,t)^2}\,dt$$

$$= 62{,}5(0{,}4)\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \text{sen}^2 t}\,dt = 25\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,dt = 25(2)\int_0^{2\pi} \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \cos t)}\,dt$$

$$= 50\int_0^{2\pi} \text{sen}\tfrac{1}{2}t\,dt = 50\Big[-2\cos\tfrac{1}{2}t\Big]_0^{2\pi} = -100(-1 - 1) = 200$$

EXERCÍCIOS 14.6 Os Vetores Unitários da Tangente e da Normal e o Comprimento de Arco como um Parâmetro

Usaremos a seguinte versão para a regra do quociente:

$$D_t \frac{f(t)}{\sqrt{g(t)}} = D_t(f(t)[g(t)]^{-1/2}) = f'(t)[g(t)]^{-1/2} - \tfrac{1}{2}f(t)[g(t)]^{-3/2}g'(t) = \frac{f'(t)g(t) - \frac{1}{2}f(t)g'(t)}{[g(t)]^{3/2}}$$

1. $x = \frac{1}{3}t^3 - t,\ y = t^2.\ R(t) = (\frac{1}{3}t^3 - t)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}.\ D_tR(t) = (t^2 - 1)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}.$

$$\|D_tR(t)\| = \sqrt{(t^2-1)^2 + 4t^2} = \sqrt{(t^2+1)^2} = t^2 + 1.\quad T(t) = \frac{D_tR(t)}{\|D_tR(t)\|} = \frac{t^2-1}{t^2+1}\mathbf{i} + \frac{2t}{t^2+1}\mathbf{j}$$

$$D_tT(t) = \frac{2t(t^2+1) - 2t(t^2-1)}{(t^2+1)^2}\mathbf{i} + \frac{2(t^2+1) - 2t(2t)}{(t^2+1)^2}\mathbf{j} = \frac{4t}{(t^2+1)^2}\mathbf{i} + \frac{2(1-t^2)}{(t^2+1)^2}\mathbf{j}$$

$$\|D_tT(t)\| = \sqrt{\frac{(4t)^2}{(t^2+1)^4} + \frac{4(1-t^2)^2}{(t^2+1)^4}} = \frac{2}{(t^2+1)^2}\sqrt{4t^2 + (1 - 2t^2 + t^4)} = \frac{2}{(t^2+1)^2}\sqrt{(t^2+1)^2} = \frac{2}{t^2+1}$$

$$N(t) = \frac{D_tT(t)}{\|D_tT(t)\|} = \left[\frac{4t}{(t^2+1)^2}\mathbf{i} + \frac{2(1-t^2)}{(t^2+1)^2}\mathbf{j}\right]\frac{t^2+1}{2} = \frac{2t}{t^2+1}\mathbf{i} + \frac{1-t^2}{t^2+1}\mathbf{j}$$

3. $R(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j}.\ D_tR(t) = e^t\mathbf{i} - e^{-t}\mathbf{j}.\ \|D_tR(t)\| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}.$

$$T(t) = \frac{D_tR(t)}{\|D_tR(t)\|} = \frac{e^t}{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}}\mathbf{i} - \frac{e^{-t}}{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}}\mathbf{j}$$

$$D_tT(t) = \frac{e^t(e^{2t} + e^{-2t}) - \frac{1}{2}e^t(2e^{2t} - 2e^{-2t})}{(e^{2t} + e^{-2t})^{3/2}}\mathbf{i} - \frac{-e^{-t}(e^{2t} + e^{-2t}) - \frac{1}{2}e^{-t}(2e^{2t} - 2e^{-2t})}{(e^{2t} + e^{-2t})^{3/2}}\mathbf{j}$$

$$= \frac{2e^{-t}}{(e^{2t} + e^{-2t})^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{2e^t}{(e^{2t} + e^{-2t})^{3/2}}\mathbf{j}$$

$$\|D_tT(t)\| = \sqrt{\frac{4e^{-2t} + 4e^{2t}}{(e^{2t} + e^{-2t})^3}} = \frac{2}{e^{2t} + e^{-2t}}.\quad N(t) = \frac{D_tT(t)}{\|D_tT(t)\|} = \frac{e^{-t}}{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}}\mathbf{i} + \frac{e^t}{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}}\mathbf{j}$$

5. $R(t) = 3\cos t\,\mathbf{i} + 3\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j}.\ D_tR(t) = -3\,\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + 3\cos t\,\mathbf{j}.\ \|D_tR(t)\| = \sqrt{9\,\text{sen}^2 t + 9\cos^2 t} = 3.$

$$T(t) = \frac{D_tR(t)}{\|D_tR(t)\|} = -\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}.\quad D_tT(t) = -\cos t\,\mathbf{i} - \text{sen}\,t\,\mathbf{j}.\quad \|D_tT(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \text{sen}^2 t} = 1.$$

$$N(t) = \frac{D_tT(t)}{\|D_tT(t)\|} = -\cos t\,\mathbf{i} - \text{sen}\,t\,\mathbf{j}$$

7. $x = \cos kt$ e $y = \text{sen}\,kt,\ k > 0.\ R(t) = \cos kt\,\mathbf{i} + \text{sen}\,kt\,\mathbf{j}.\ D_tR(t) = -k\,\text{sen}\,kt\,\mathbf{i} + k\cos kt\,\mathbf{j}.$

$$\|D_tR(t)\| = \sqrt{k^2\text{sen}^2 kt + k^2\cos^2 kt} = k\sqrt{\text{sen}^2 kt + \cos^2 kt} = k.\quad T(t) = \frac{D_tR(t)}{\|D_tR(t)\|} = -\text{sen}\,kt\,\mathbf{i} + \cos kt\,\mathbf{j}.$$

$$D_tT(t) = -k\cos kt\,\mathbf{i} - k\,\text{sen}\,kt\,\mathbf{j}.\quad \|D_tT(t)\| = \sqrt{k^2\cos^2 kt + k^2\text{sen}^2 kt} = k.$$

$$N(t) = \frac{D_tT(t)}{\|D_tT(t)\|} = -\cos kt\,\mathbf{i} - \text{sen}\,kt\,\mathbf{j}$$

9. $R(t) = \ln \cos t\,i + \ln \operatorname{sen} t\,j$; $0 < t < \frac{1}{2}\pi$. $D_tR(t) = -\dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\,i + \dfrac{\cos t}{\operatorname{sen} t}\,j$. $\|D_tR(t)\| = \sqrt{\operatorname{tg}^2 t + \operatorname{cotg}^2 t}$.

$$T(t) = \frac{D_tR(t)}{\|D_tR(t)\|} = -\frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 t + \operatorname{cotg}^2 t}}\,i + \frac{\operatorname{cotg} t}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 t + \operatorname{cotg}^2 t}}\,j = -(1 + \operatorname{cotg}^4 t)^{-1/2} i + (1 + \operatorname{tg}^4 t)^{-1/2} j$$

$$D_tT(t) = \frac{-2\operatorname{cotg}^3 t \operatorname{cosec}^2 t}{(1 + \operatorname{cotg}^4 t)^{3/2}}\,i - \frac{2\operatorname{tg}^3 t \sec^2 t}{(1 + \operatorname{tg}^4 t)^{3/2}}\,j = -\frac{2\operatorname{sen} t \cos^3 t}{(\operatorname{sen}^4 t + \cos^4 t)^{3/2}}\,i - \frac{2\operatorname{sen}^3 t \cos t}{(\operatorname{sen}^4 t + \cos^4 t)^{3/2}}\,j$$

$$\|D_tT(t)\| = \sqrt{\frac{4\operatorname{sen}^2 t \cos^6 t}{(\operatorname{sen}^4 t + \cos^4 t)^3} + \frac{4\operatorname{sen}^6 t \cos^2 t}{(\operatorname{sen}^4 t + \cos^4 t)^3}} = \frac{2\operatorname{sen} t \cos t}{\operatorname{sen}^4 t + \cos^4 t}$$

$$N(t) = \frac{D_tT(t)}{\|D_tT(t)\|} = -\frac{\cos^2 t}{\sqrt{\operatorname{sen}^4 t + \cos^4 t}}\,i - \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\sqrt{\operatorname{sen}^4 t + \cos^4 t}}\,j$$

11. $R(t) = t^2 i + e^t j$. $D_tR(t) = 2t\,i + e^t j$. $\|D_tR(t)\| = \sqrt{4t^2 + e^{2t}}$.

$$T(t) = \frac{D_tR(t)}{\|D_tR(t)\|} = \frac{2t}{\sqrt{4t^2 + e^{2t}}}\,i + \frac{e^t}{\sqrt{4t^2 + e^{2t}}}\,j.$$

$$D_tT(t) = \frac{2(4t^2 + e^{2t}) - \frac{1}{2}(2t)(8t + 2e^{2t})}{(4t^2 + e^{2t})^{3/2}}\,i + \frac{e^t(4t^2 + e^{2t}) - \frac{1}{2}e^t(8t + 2e^{2t})}{(4t^2 + e^{2t})^{3/2}}\,j$$

$$= \frac{2e^{2t}(1 - t)}{(4t^2 + e^{2t})^{3/2}}\,i + \frac{4te^t(t - 1)}{(4t^2 + e^{2t})^{3/2}}\,j$$

$$\|D_tT(t)\| = \sqrt{\frac{4e^{4t}(1 - t)^2 + 16t^2e^{2t}(t - 1)^2}{(4t^2 + e^{2t})^3}} = \sqrt{\frac{4e^{2t}(t - 1)^2}{(4t^2 + e^{2t})^2}} = \frac{2e^t|t - 1|}{4t^2 + e^{2t}}$$

$$N(t) = \frac{D_tT(t)}{\|D_tT(t)\|} = \frac{e^t(1 - t)}{|t - 1|\sqrt{4t^2 + e^{2t}}}\,i + \frac{2t(t - 1)}{|t - 1|\sqrt{4t^2 + e^{2t}}}\,j.$$ $t = 1$ resulta em um ponto de inflexão.

13. $R(t) = \operatorname{sen}^3 t\,i + \cos^3 t\,j$; $0 \le t < \frac{1}{2}\pi$. $D_tR(t) = 3\operatorname{sen}^2 t \cos t\,i - 3\cos^2 t \operatorname{sen} t\,j$.

$\|D_tR(t)\| = \sqrt{9\operatorname{sen}^4 \cos^2 t + 9\cos^4 t \operatorname{sen}^2 t} = 3\operatorname{sen} t \cos t$. $T(t) = \dfrac{D_tR(t)}{\|D_tR(t)\|} = \operatorname{sen} t\,i - \cos t\,j$.

$D_tT(t) = \cos t\,i + \operatorname{sen} t\,j$. $\|D_tT(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t} = 1$. $N(t) = \dfrac{D_tT(t)}{\|D_tT(t)\|} = \cos t\,i + \operatorname{sen} t\,j$

15. $R(t) = 4t\,i + 2t^2 j$. $D_tR(t) = 4i - 4t\,j$. $\|D_tR(t)\| = \sqrt{16 + 16t^2} = 4\sqrt{1 + t^2}$.

$$T(t) = \frac{D_tR(t)}{\|D_tR(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}\,i + \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}\,j$$

$$D_tT(t) = \frac{-\frac{1}{2}(2t)}{(1 + t^2)^{3/2}}\,i + \frac{1(1 + t^2) - \frac{1}{2}t(2t)}{(1 + t^2)^{3/2}}\,j = -\frac{t}{(1 + t^2)^{3/2}}\,i + \frac{1}{(1 + t^2)^{3/2}}\,j$$

$$\|D_tT(t)\| = \sqrt{\frac{1 + t^2}{(1 + t^2)^{3/2}}} = \frac{1}{1 + t^2}.\quad N(t) = \frac{D_tT(t)}{\|D_tT(t)\|} = -\frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}\,i + \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}\,j$$

17. $x = \frac{1}{27}[(27s + 8)^{2/3} - 4]^{3/2}$ e $y = \frac{1}{9}[(27s + 8)^{2/3} - 4]$.

$$D_sx = \frac{1}{18}[(27s + 8)^{2/3} - 4]^{1/2}\left[\frac{2}{3}(27s + 8)^{-1/3}(27)\right] = \frac{[(27s + 8)^{2/3} - 4]^{1/2}}{((27s + 8))^{1/3}}$$

$D_sy = \dfrac{2}{27}(27s + 8)^{-1/3}(27) = \dfrac{2}{(27s + 8)^{1/3}}$. Logo, $(D_sx)^2 + (D_sy)^2 = \dfrac{(27s + 8)^{2/3} - 4 + 4}{(27s + 8)^{2/3}} = 1$.

Nota: Como $s = 0$ qdo. $t = 0$, segue do Teorema 14.5.4 que $s = \int_0^t \|R'(u)\| du$.

19. $x = 2 + \cos t$, $y = 3 + \operatorname{sen} t$. $R(t) = (2 + \cos t)\mathbf{i} + (3 + \operatorname{sen} t)\mathbf{j}$. $R'(t) = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$.

$$s = \int_0^t \|R'(u)\| du = \int_0^t \sqrt{\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u}\, du = \int_0^t du = t$$

Assim, $x = 2 + \cos s$, $y = 3 + \operatorname{sen} s$ e $(D_s x)^2 + (D_s y)^2 = (-\operatorname{sen} s)^2 + \cos^2 s = 1$.

21. $y = x^{3/2}$. Seja $x = t$, $t \geq 0$. Então, $y = t^{3/2}$ e $R(t) = t\mathbf{i} + t^{3/2}\mathbf{j}$. $R'(t) = \mathbf{i} + \frac{3}{2}t^{1/2}\mathbf{j}$.

$$s = \int_0^t \|R'(u)\| du = \int_0^t \sqrt{1 + \tfrac{9}{4}u}\, du = \frac{1}{2}\int_0^t (4 + 9u)^{1/2} du = \frac{1}{27}(4 + 9u)^{3/2}\Big]_0^t = \frac{1}{27}(4 + 9t)^{3/2} - \frac{8}{27}$$

$(4 + 9t)^{3/2} = 27s + 8$; $t = \frac{1}{9}[(27s + 8)^{2/3} - 4]$. As equações paramétricas tendo s como parâmetro são

$$x = \frac{1}{9}(27s + 8)^{2/3} - 4] \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{27}[(27s + 8)^{2/3} - 4]^{3/2}$$

$$D_s x = 2(27s + 8)^{1/3} \quad \text{e} \quad D_s y = (27s + 8)[(27s + 8)^{2/3} - 4]^{1/2}$$

Portanto, $(D_s x)^2 + (D_s y)^2 = \dfrac{4}{(27s + 8)^{2/3}} + \dfrac{(27s + 8)^{2/3} - 4}{(27s + 8)^{2/3}} = 1$.

23. $R(t) = a\cos^3 t\,\mathbf{i} + a\operatorname{sen}^3 t\,\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$. $R'(t) = -3a\cos^2 t \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + 3a\operatorname{sen}^2 t \cos t\,\mathbf{j}$.

$$s = \int_0^t \|R'(u)\| du = \int_0^t \sqrt{9a^2\cos^4 u \operatorname{sen}^2 u + 9a^2 \operatorname{sen}^4 u \cos^2 u}\, du = \int \sqrt{9a^2\cos^2 u \operatorname{sen}^2 u(\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u)}\, du$$

$$= 3a\int_0^t \cos u \operatorname{sen} u\, du = \frac{3}{2}a\operatorname{sen}^2 u\Big]_0^t = \frac{3}{2}a\operatorname{sen}^2 t. \quad \operatorname{sen} t = \left(\frac{2s}{3a}\right)^{1/2}; \quad \cos t = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} = \left(\frac{3a - 2s}{3a}\right)^{1/2}.$$

$$x = a\cos^3 t = a\left(\frac{3a - 2s}{3a}\right)^{3/2} \quad \text{e} \quad y = \operatorname{sen}^3 t = a\left(\frac{2s}{3a}\right)^{3/2}. \quad D_s x = -\left(\frac{3a - 2s}{3a}\right)^{1/2} \quad \text{e} \quad D_s y = \left(\frac{2s}{3a}\right)^{1/2}.$$

Portanto, $(D_s x)^2 + (D_s y)^2 = \dfrac{3a - 2s}{3a} + \dfrac{2s}{3a} = 1$.

25. $x = e^t\cos t$, $y = e^t\operatorname{sen} t$. $x'(t) = e^t\cos t - e^t\operatorname{sen} t$, $y'(t) = e^t\operatorname{sen} t + e^t\cos t$.

$$s = \int_0^t \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}\, du = \int_0^t \sqrt{e^{2u}(\cos u - \operatorname{sen} u)^2 + e^{2u}(\operatorname{sen} u + \cos u)^2}\, du = \int_0^t \sqrt{2e^{2u}}\, du$$

$$= \int_0^t \sqrt{2}e^u\, du = \sqrt{2}e^u\Big]_0^t = \sqrt{2}(e^t - 1)$$

27. $R(t) = 3t^2\mathbf{i} + (t^3 - 3t)\mathbf{j}$. $D_t R(t) = 6t\mathbf{i} + (3t^2 - 3)\mathbf{j}$.

$\|D_t R(t)\| = \sqrt{36t^2 + 9t^4 - 18t^2 + 9} = \sqrt{9t^4 + 18t^2 + 9} = 3(t^2 + 1)$. $T(t) = \dfrac{D_t R(t)}{\|D_t R(t)\|} = \dfrac{2t}{t^2 + 1}\mathbf{i} + \dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\mathbf{j}$.

$R(2) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $T(2) = \frac{4}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j}$. O co-seno do ângulo entre $R(2)$ e $T(2)$ é dado por

$$\cos\theta = \frac{R(2)\cdot T(2)}{\|R(2)\|\|T(2)\|} = \frac{12\left(\frac{4}{5}\right) + 2\left(\frac{3}{5}\right)}{\sqrt{144 + 4(1)}} = \frac{\frac{48}{5} + \frac{6}{5}}{2\sqrt{37}} = \frac{27}{185}\sqrt{37}$$

EXERCÍCIOS 14.7 Curvatura

1. $R(t) = t^2 i + (2t+1)j$. $D_tR(t) = 2t i + 2j$. $\|D_tR(t)\| = \sqrt{4t^2+4} = 2\sqrt{t^2+1}$

$$T(t) = \frac{D_tR(t)}{\|D_tR(t)\|} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} i + \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} j. \quad D_tT(t) = \frac{1}{(t^2+1)^{3/2}} i - \frac{t}{(t^2+1)^{3/2}} j.$$

$$\frac{D_tT(t)}{\|D_tR(t)\|} = \frac{1}{2(t^2+1)^2} i - \frac{t}{2(t^2+1)^2} j. \quad K(t) = \left\|\frac{D_tT(t)}{\|D_tR(t)\|}\right\| = \sqrt{\frac{1}{4(t^2+1)^4} + \frac{t^2}{4(t^2+1)^4}} = \frac{1}{2(t^2+1)^{3/2}}.$$

Portanto, $K(1) = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{8}\sqrt{2}$ e $\rho(1) = 4\sqrt{2}$.

3. $R(t) = 2e^t i + 2e^{-t} j$. $D_tR(t) = 2e^t i - 2e^{-t} j$. $\|D_tR(t)\| = \sqrt{4e^{2t} + 4e^{-2t}} = 2\sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}$.

$$T(t) = \frac{D_tR(t)}{\|D_tR(t)\|} = \frac{e^t}{\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}} i - \frac{e^{-t}}{\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}} j$$

$$D_tT(t) = \frac{e^t(e^{2t}+e^{-2t}) - \frac{1}{2}e^t(2e^{2t} - 2e^{-2t})}{(e^{2t}+e^{-2t})^{3/2}} i - \frac{-e^{-t}(e^{2t}+e^{-2t}) - \frac{1}{2}e^{-t}(2e^{2t} - 2e^{-2t})}{(e^{2t}+e^{-2t})^{3/2}} j$$

$$= \frac{2e^{-t}}{(e^{2t}+e^{-2t})^{3/2}} i + \frac{2e^t}{(e^{2t}+e^{-2t})^{3/2}} j. \quad \frac{D_tT(t)}{\|D_tR(t)\|} = \frac{e^{-t}}{(e^{2t}+e^{-2t})^2} i + \frac{e^t}{(e^{2t}+e^{-2t})^2} j.$$

$$K(t) = \left\|\frac{D_tT(t)}{\|D_tR(t)\|}\right\| = \sqrt{\frac{e^{-2t}}{(e^{2t}+e^{-2t})^4} + \frac{e^{2t}}{(e^{2t}+e^{-2t})^4}} = \frac{1}{(e^{2t}+e^{-2t})^{3/2}}$$

Portanto, $K(0) = \frac{1}{2^{3/2}} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$ e $\rho(0) = 2\sqrt{2}$.

5. $x = \frac{1}{1+t}$, $y = \frac{1}{1-t}$. $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{(1+t)^2}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{(1-t)^2}$; $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2}{(1+t)^3}$, $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2}{(1-t)^3}$.

$$K(t) = \frac{\left|\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) - \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)\right|}{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{\left|\frac{-2}{(1+t)^2(1-t)^3} - \frac{2}{(1+t)^3(1-t)^2}\right|}{\left[\frac{1}{(1+t)^4} + \frac{1}{(1-t)^4}\right]^{3/2}}$$

$$= \frac{|-2(1+t)^4(1-t)^3 - 2(1+t)^3(1-t)^4|}{[(1-t)^4 + (1+t)^4]^{3/2}} = \frac{|-2(1+t)^3(1-t)^3[(1+t)+(1-t)]|}{(1-4t+6t^2-4t^3+1+4t+6t^2+4t^3+t^4)^{3/2}}$$

$$= \frac{4|(1+t)(1-t)|^3}{(2+12t^2+2t^4)^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}|1-t^2|^3}{(1+6t^2+t^4)^{3/2}}.$$ Portanto, $K(0) = \sqrt{2}$ e $\rho(0) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

7. $y = 2\sqrt{x}$. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2x^{3/2}}$

$$K = \frac{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{\frac{1}{2x^{3/2}}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3/2}} = \frac{1}{2(x+1)^{3/2}}$$

Em $(0, 0)$, $K = \frac{1}{2}$ e $\rho = 2$.

9. $y = e^x$. $\frac{dy}{dx} = e^x$; $\frac{d^2y}{dx^2} = e^x$

$$K = \frac{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{e^x}{(1+e^{2x})^{3/2}}$$

Em $(0, 1)$, $K = \frac{1}{(1+1)^{3/2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$ e $\rho = 2\sqrt{2}$.

11. $x = \operatorname{sen} y,\ \dfrac{dx}{dy} = \cos y;\ \dfrac{d^2x}{dy^2} = -\operatorname{sen} y.\ K = \dfrac{\left|\dfrac{d^2x}{dy^2}\right|}{\left[1 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)\right]^{3/2}} = \dfrac{|-\operatorname{sen} y|}{(1+\cos^2 y)^{3/2}} = \dfrac{|\operatorname{sen} y|}{(1+\cos^2 y)^{3/2}}.$

Em $(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\pi)$, $K = \dfrac{|\operatorname{sen} \frac{1}{6}\pi|}{(1+\cos^2 \frac{1}{6}\pi)^{3/2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{(1+\frac{3}{4})^{3/2}} = \dfrac{4}{7^{3/2}} = \dfrac{4}{49}\sqrt{7}$ e $\rho = \dfrac{7}{4}\sqrt{7}.$

13. $x = \sqrt{y-1},\ \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{2\sqrt{y-1}};\ \dfrac{d^2x}{dy^2} = \dfrac{-1}{4(y-1)^{3/2}}.\ K = \dfrac{\left|\dfrac{d^2x}{dy^2}\right|}{\left[1 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2\right]^{3/2}} = \dfrac{\dfrac{1}{4(y-1)^{3/2}}}{\left[1 + \dfrac{1}{4(y-1)}\right]^{3/2}} = \dfrac{2}{(4y-3)^{3/2}}.$

Em $(2, 5)$, $K = \dfrac{2}{17^{3/2}} = \dfrac{2}{289}\sqrt{17}$ e $\rho = \dfrac{17}{2}\sqrt{17}.$

15. $y = \operatorname{sen}^{-1} x,\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{x}{(1-x^2)^{3/2}}.$

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|} = \frac{\left(1 + \dfrac{1}{1-x^2}\right)^{3/2}}{\dfrac{|x|}{(1-x^2)^{3/2}}} = \frac{(1-x^2+1)^{3/2}}{|x|} = \frac{(2-x^2)^{3/2}}{|x|}$$

17. $4x^2 - 9y^2 = 16.\ 8x - 18\dfrac{dy}{dx} = 0;\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x}{9y}.\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{y - x\dfrac{dy}{dx}}{y^2} = \dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{y - \dfrac{4x^2}{9y}}{y^2} = \dfrac{4(9y^2-4x^2)}{81y^3} = \dfrac{4(-16)}{81y^3} = -\dfrac{64}{81y^3}.$

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|} = \frac{\left(1 + \dfrac{16x^2}{81y^2}\right)^{3/2}}{\dfrac{64}{81|y^3|}} = \frac{(16x^2+81y^2)^{3/2}}{576}$$

19. $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}.\ \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{2}y^{-1/2}D_x y = 0;\ D_x y = -\dfrac{y^{1/2}}{x^{1/2}} = -\dfrac{a^{1/2} - x^{1/2}}{x^{1/2}} = 1 - a^{1/2}x^{-1/2}.$

$D_x{}^2 y = \frac{1}{2}a^{1/2}x^{-3/2}.\ \rho = \dfrac{[1+(D_x y)^2]^{3/2}}{|D_x{}^2 y|} = \dfrac{[1+(-y^{1/2}x^{-1/2})^2]^{3/2}}{|\frac{1}{2}a^{1/2}x^{-3/2}|} = \dfrac{2(x+y)^{3/2}}{a^{1/2}}.$

21. $x = a(t - \operatorname{sen} t),\ y = a(1-\cos t).\ x' = a(1-\cos t),\ x'' = a \operatorname{sen} t;\ y' = a \operatorname{sen} t,\ y'' = a\cos t.$

$$\rho = \frac{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}}{|x'y'' - y'x''|} = \frac{[a^2(1-\cos t)^2 + a^2\operatorname{sen}^2 t]^{3/2}}{|a(1-\cos t)(a\cos t) - (a\operatorname{sen} t)(a \operatorname{sen} t)|}$$

$$= \frac{(a^2 - 2a^2\cos t + a^2\cos^2 t + a^2\operatorname{sen}^2 t)^{3/2}}{|a^2\cos t - a^2\cos^2 t - a^2\operatorname{sen}^2 t|} = \frac{[2a^2(1-\cos t)]^{3/2}}{|a^2(\cos t - 1)|} = \frac{2^{3/2}|a^3|(1-\cos t)^{3/2}}{a^2(1-\cos t)}$$

$$= 2^{3/2}|a|(1-\cos t)^{1/2} = 4|a|\left(\frac{1-\cos t}{2}\right)^{1/2} = 4|a \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}t|$$

23. $y = a\cosh\dfrac{x}{a}.\ \dfrac{dy}{dx} = \operatorname{senh}\dfrac{x}{a};\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{a}\cosh\dfrac{x}{a}.$

$$K = \frac{\left|\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{\left|\dfrac{1}{a}\cosh\dfrac{x}{a}\right|}{\left[1 + \operatorname{senh}^2\dfrac{x}{a}\right]^{3/2}} = \frac{\dfrac{1}{a}\cosh\dfrac{x}{a}}{\cosh^3\dfrac{x}{a}} = \frac{a}{a^2\cosh^2\dfrac{x}{a}} = \frac{a}{y^2}$$

Como $y = a\cosh\dfrac{x}{a}$ tem um mínimo absoluto em $(0, a)$, K tem um máximo absoluto nesse interva

25. $y = 6x - x^2$. $D_x y = 6 - 2x$; $D_x^2 y = -2$. $K = \dfrac{|D_x^2 y|}{[1 + (D_x)^2]^{3/2}} = \dfrac{|-2|}{[1 + (6 - 2x)^2]^{3/2}} = \dfrac{2}{[1 + 4(3 - x)^2]^{3/2}}$.

Como $1 + 4(3 - x^2)$ tem um mínimo absoluto em $(3, 9)$, K tem um máximo absoluto nesse intervalo.

27. $R(t) = (2t - 3)i + (t^2 - 1)j$. $x = 2t - 3$, $y = t^2 - 1$. $x' = 2$, $x'' = 0$, $y' = 2t$, $y'' = 2$.

$$K = \frac{|x'y'' - y'x''|}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{4}{(4 + 4t^2)^{3/2}} = \frac{1}{2(1 + t^2)^{3/2}}$$

$1 + t^2$ tem um mínimo absoluto qdo. $t = 0$ em $(-3, -1)$; logo, K tem um máximo absoluto nesse intervalo.

29. Do resultado do Exercício 9, o raio de curvatura para $y = e^x$ no ponto $(0, 1)$ é $2\sqrt{2}$. A circunferência de curvatura em $(0, 1)$ tem a mesma reta tangente que a curva. Para essa curva, $D_x y = e^x$. Portanto, em $(0, 1)$, a inclinação da tangente é 1. Assim, desejamos encontrar uma equação da circunferência tendo centro em (h, k), raio $2\sqrt{2}$ e uma reta tangente de inclinação 1 no ponto $(0, 1)$. Temos as equações $h^2 + (k - 1)^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$ e $\dfrac{k - 1}{h - 0} = -1$; $k = 1 - h$. Substituindo na primeira equação, obtemos $h^2 + h^2 = 8$; $h^2 = 4$, $h = \pm 2$. Como a circunferência de curvatura e a curva estão no mesmo lado que a reta tangente, vemos de um esboço, que $h < 0$. Logo, $h = -2$ e $k = 3$. Uma equação da circunferência de curvatura é

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 8; \quad x^2 + y^2 + 4x - 6y + 5 = 0$$

Uma solução alternativa, sem usar o Exercício 9 ou um esboço.

A circunferência de curvatura é a circunferência para a qual os valores y, y', y'' em $x = 0$ igualam-se àqueles da curva $y = e^x$. Seja uma equação da circunferência.

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$. Como $y = e^0 = 1$, temos $h^2 + (1 - k)^2 = r^2$.

$2(x - h) + 2(y - k)y' = 0$; $(x - h) + (y - k)y' = 0$. $y' = e^x = e^0 = 1$, logo, temos $-h + (1 - k) = 0$.

$1 + (y')^2 + (y - k)y'' = 0$. Como $y'' = e^x = e^0 = 1$, temos $1 + 1 + (1 - k) = 0$.

Portanto, $k = 3$, $h = -2$, $r^2 = 8$ e a equação é $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 8$.

31. $r = 4\cos 2\theta$. $\dfrac{dr}{d\theta} = -8\,\text{sen}\,2\theta$, $\dfrac{d^2r}{d\theta^2} = -16\cos 2\theta$.

Em $\theta = \dfrac{\pi}{12}$, $r = 4\cos\dfrac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}$, $\dfrac{dr}{d\theta} = -8\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{6} = -4$, $\dfrac{d^2r}{d\theta^2} = -16\cos\dfrac{\pi}{6} = -8\sqrt{3}$,

$$K = \frac{|(2\sqrt{3})^2 + 2(-4)^2 - (2\sqrt{3})(-8\sqrt{3})|}{[(2\sqrt{3})^2 + (-4)^2]^{3/2}} = \frac{|12 + 32 + 48|}{(12 + 16)^{3/2}} = \frac{92}{(28)^{3/2}} = \frac{23}{98}\sqrt{7}, \quad \rho = \frac{14}{23}\sqrt{7}$$

33. $r = a\sec^2\frac{1}{2}\theta$. $\dfrac{dr}{d\theta} = a\sec^2\frac{1}{2}\theta\ \text{tg}\,\frac{1}{2}\theta$, $\dfrac{d^2r}{d\theta^2} = a\sec^2\frac{1}{2}\theta\ \text{tg}^2\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}a\sec^4\frac{1}{2}\theta$. Em $\theta = \dfrac{2}{3}\pi$,

$r = a\sec^2\dfrac{\pi}{3} = 4a$; $\dfrac{dr}{d\theta} = a\sec^2\dfrac{\pi}{3}\ \text{tg}\,\dfrac{\pi}{3} = 4\sqrt{3}a$, $\dfrac{d^2r}{d\theta^2} = a\sec^2\dfrac{\pi}{3}\ \text{tg}^2\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{1}{2}a\sec^4\dfrac{\pi}{3} = 12a + 8a = 20a$,

$$K = \frac{|(4a)^2 - 2(4\sqrt{3}a)^2 - (4a)(20a)|}{[(4a)^2 + (4\sqrt{3}a)^2]^{3/2}} = \frac{|16a^2 + 96a^2 - 80a^2|}{(16a^2 + 48a^2)^{3/2}} = \frac{32a^2}{8^3|a|^3} = \frac{1}{16|a|}, \quad \rho = 16|a|$$

35. A circunferência de curvatura é a circunferência $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$ tal que y, y', y'' tenham os mesmos valores que aqueles sobre a curva. Diferenciando duas vezes em relação a x, obtemos $2(x - x_c) + 2(y - y_c)y' = 0$; $(x_c - x) + (y_c - y)y' = 0$

$$-1 - (y')^2 + (y_c - y)y'' = 0; \qquad (y_c - y)y' = 1 + (y')^2$$

Resolvendo para $x_c - x$ e $y_c - y$, obtemos

$$x_c = x - \frac{y'[1 + (y')^2]}{y''} \quad \text{e} \quad y_c = y + \frac{1 + (y')^2}{y''}$$

37. $y = x^4 - x^2$; $y' = 4x^3 - 2x$; $y'' = 12x^2 - 2$. Em $(0, 0)$, $y = 0$, $y' = 0$, $y'' = 2$, e temos

$$K = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{|-2|}{[1 + 0^2]^{3/2}} = 2, \quad \rho = \frac{1}{2}, \quad x_c = x - \frac{y'[1 + (y')^2]}{y''} = 0 - \frac{[1 + 0^2]}{-2} = 0,$$

$y_c = y + \dfrac{1 + (y')^2}{y''} = 0 + \dfrac{1 + 0}{-2} = -\dfrac{1}{2}$. O centro de curvatura está em $(0, -\frac{1}{2})$.

39. $y^2 = 4px$. $y = 2p^{1/2}x^{1/2}$, $y' = p^{1/2}x^{-1/2}$, $y'' = -\frac{1}{2}p^{1/2}x^{-3/2}$.

$$x_c = x - \frac{y'[1 + (y')^2]}{y''} = x - \frac{p^{1/2}[1 + px^{-1}]}{-\frac{1}{2}p^{1/2}x^{-3/2}} = x + 2x + p = 3x + p$$

$$y_c = y + \frac{1 + (y')^2}{y''} = 2p^{1/2}x^{1/2} + \frac{1 + px^{-1}}{-\frac{1}{2}p^{1/2}x^{-3/2}} = 2p^{1/2}x^{1/2} - 2p^{-1/2}x^{3/2} - 2p^{1/2}x^{1/2} = -2p^{-1/2}x^{3/2}$$

Portanto, o centro de curvatura é $(3x + 2p, -2p^{-1/2}x^{3/2}) = (3x + 2p, -\frac{1}{4}p^{-2}y^3)$.

41. $R(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + b\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j}$. Equações paramétricas da curva são $x = a\cos t$ e $y = b\,\text{sen}\,t$. Seguindo os mesmos passos que aqueles referidos na solução do Exercício 35, mas diferenciando com relação a t, obtemos o sistema $\begin{cases} x'(x_c - x) + y'(y_c - y) = 0 \\ x''(x_c - x) + y''(y_c - y) = (x')^2 + (y')^2 \end{cases}$ de modo que

$$x_c = x - \frac{y'[(x')^2 + (y')^2]}{x'y'' - y'x''}, \quad y_c = y + \frac{x'[(x')^2 + (y')^2]}{x'y'' - y'x''}$$

$$x' = -a\,\text{sen}\,t, \quad x'' = -a\cos t; \quad y' = b\cos t, \quad y'' = -b\,\text{sen}\,t$$

$$x'y'' - y'x'' = (-a\,\text{sen}\,t)(-b\,\text{sen}\,t) - (b\cos t)(-a\cos t) = ab$$

$$x_c = a\cos t - \frac{b\cos t(a^2\text{sen}^2 t + b^2\cos^2 t)}{ab} = \frac{a^2\cos t(1 - \text{sen}^2 t) - b^2\cos^3 t}{a} = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t$$

$$y_c = b\,\text{sen}\,t + \frac{(-a\,\text{sen}\,t)(a^2\text{sen}^2 t + b^2\cos^2 t)}{ab} = \frac{b^2\text{sen}\,t(1 - \cos^2 t) - a^2\text{sen}^3 t}{b} = \frac{b^2 - a^2}{b}\text{sen}^3 t$$

43. Uma equação de uma reta é $y = mx + b$. $y' = m$, $y'' = 0$. Em todo ponto (x, y), temos

$$K = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{0}{(1 + m^2)^{3/2}} = 0$$

EXERCÍCIOS 14.8 Movimento Plano

1. $x = t^2 + 4$ e $y = t - 2$. Assim, $R(t) = (t^2 + 4)i + (t - 2)j$.

(a) $V(t) = D_tR(t) = 2ti + j$ (b) $A(t) = D_tV(t) = 2i$

(c) $\|V(3)\| = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{37}$ (d) $\|A(3)\| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$

3. $x = 5\cos 2t$ e $y = 3\,\text{sen}\,2t$. Portanto, $R(t) = 5\cos 2t\,i + 3\,\text{sen}\,2t\,j$.

(a) $V(t) = D_tR(t) = -10\,\text{sen}\,2t\,i + 6\cos 2t\,j$ (b) $A(t) = D_tV(t) = -20\cos 2t\,i - 12\,\text{sen}\,2t\,j$

(c) $\|V(\frac{1}{4}\pi)\| = \|-10\,\text{sen}\frac{1}{2}\pi i + 6\cos\frac{1}{2}\pi j\| = \sqrt{(-10)^2 + 0^2} = 10$

(d) $\|A(\frac{1}{4}\pi)\| = \|-20\cos\frac{1}{2}\pi i - 12\,\text{sen}\frac{1}{2}\pi j\| = \sqrt{0^2 + (-12)^2} = 12$

5. $x = t$ e $y = \ln\sec t$. Portanto, $R(t) = ti + (\ln\sec t)j$.

(a) $V(t) = D_tR(t) = i + \text{tg}\,t\,j$ (b) $A(t) = D_tV(t) = \sec^2 t\,j$

(c) $\|V(\frac{1}{4}\pi)\| = \sqrt{1^2 + \text{tg}^2\frac{1}{4}\pi} = \sqrt{2}$ (d) $\|A(\frac{1}{4}\pi)\| = \sec^2(\frac{1}{4}\pi) = 2$

7. $x = \text{sen}\,t$ e $y = \text{tg}\,t$. Logo, $R(t) = \text{sen}\,t\,i + \text{tg}\,t\,j$.

(a) $V(t) = D_tR(t) = \cos t\,i + \sec^2 t\,j$ (b) $A(t) = D_tV(t) = -\text{sen}\,t\,i + 2\sec^2 t\,\text{tg}\,t\,j$

(c) $\left\|V\left(\frac{1}{6}\pi\right)\right\| = \left\|\cos\frac{1}{6}\pi i + \sec^2\frac{1}{6}\pi j\right\| = \left\|\frac{1}{2}\sqrt{3}i + \frac{4}{3}j\right\| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{91}{36}} = \frac{1}{6}\sqrt{91}$

(d) $\left\|A\left(\frac{1}{6}\pi\right)\right\| = \left\|-\text{sen}\,\frac{1}{6}\pi i + 2\sec^2\frac{1}{6}\pi\;\text{tg}\,\frac{1}{6}\pi j\right\| = \left\|-\frac{1}{2}i + 2\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)j\right\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{64}{27}} = \sqrt{\frac{283}{108}} = \frac{1}{18}\sqrt{849}$

9. $R(t) = (2t - 1)i + (t^2 + 1)j$

(a) $V(t) = D_tR(t) = 2i + 2tj$. $V(3) = 2i + 6j$ (c) $\|V(3)\| = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

(b) $A(t) = D_tV(t) = 2j$. $A(3) = 2j$ (d) $\|A(3)\| = 2$

11. $R(t) = e^t i + e^{2t} j$

(a) $V(t) = D_tR(t) = e^t i + 2e^{2t} j$. $V(\ln 2) = 2i + 8j$ (c) $\|V(\ln 2)\| = \sqrt{2^2 + 8^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$

(b) $A(t) = D_tV(t) = e^t i + 4e^{2t} j$. $A(\ln 2) = 2i + 16j$ (d) $\|A(\ln 2)\| = \sqrt{2^2 + 16^2} = \sqrt{260} = 2\sqrt{65}$

13. $R(t) = \cos 2t\,i - 3\,\text{sen}\,t\,j$

(a) $V(t) = D_tR(t) = -2\,\text{sen}\,2t\,i - 3\cos t\,j$. $V(\pi) = 3j$ (c) $\|V(\pi)\| = 3$

(b) $A(t) = D_tV(t) = -4\cos 2t\,i + 3\,\text{sen}\,t\,j$. $A(\pi) = -4i$ (d) $\|A(\pi)\| = 4$

15. $R(t) = 2(1 - \cos t)\,i + 2(1 - \text{sen}\,t)\,j$

(a) $V(t) = D_tR(t) = 2\,\text{sen}\,t\,i - 2\cos t\,j$. $V(\frac{5}{6}\pi) = i + \sqrt{3}\,j$ (c) $\|V(\frac{5}{6}\pi)\| = \sqrt{1 + 3} = 2$

(b) $A(t) = D_tV(t) = 2\cos t\,i + 2\,\text{sen}\,t\,j$. $A(\frac{5}{6}\pi) = -\sqrt{3}\,i + j$ (d) $\|A(\frac{5}{6}\pi)\| = \sqrt{3 + 1} = 2$

17. $V(t) = \frac{1}{(t-1)^2}\,i - (t+1)\,j$. $R(t) = i\int\frac{dt}{(t-1)^2} - j\int(t+1)\,dt = -\frac{1}{t-1}\,i - (\frac{1}{2}t^2 + t)\,j + C$

$R(0) = 3i + 2j = i + C$; $C = 2i + 2j$. $R(t) = \left(-\frac{1}{t-1} + 2\right)i + (-\frac{1}{2}t^2 - t + 2)\,j = \frac{2t-3}{t-1}\,i + (2 - t - \frac{1}{2}t^2)\,j$

19. $A(t) = e^{-t}i + 2e^{2t}j$. $V(t) = i\int e^{-t}dt + j\int 2e^{2t}dt = -e^{-t}i + e^{2t}j + C$

$V(0) = 2i + j = -i + j + C$; $C = 3i$. $V(t) = (3 - e^{-t})\,i + e^{2t}j$.

$R(t) = i\int(3 - e^{-t})\,dt + j\int e^{2t}dt = (3t + e^{-t})\,i + \frac{1}{2}e^{2t} + C$

$R(0) = 3j = i + \frac{1}{2}j + C$; $C = -i + \frac{5}{2}j$. $R(t) = (e^{-t} + 3t - 1)\,i + (\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{5}{2})\,j$

21–29. $R(t) = xi + yj$ é o vetor posição no tempo t e (x, y) é a posição.

21. $v_0 = 2500$, $\alpha = \frac{1}{4}\pi$. $R(t) = tv_0\cos\alpha\,i + (tv_0\,\text{sen}\,\alpha - \frac{1}{2}gt^2)\,j = (1250\sqrt{2}t)\,i + (1250\sqrt{2}t - 16t^2)\,j$

é o vetor posição em t s e $x = 1250\sqrt{2}t$, $y = 1250\sqrt{2}t - 16t^2$.

(a) Tomamos $y = 0$: $0 = 1250\sqrt{2}t - 16t^2 = t(1250\sqrt{2} - 16t)$. $t = \frac{1250}{16}\sqrt{2} = \frac{625}{8}\sqrt{2}$ representa o tempo de impacto. Logo, o número de centímetros correspondente $x\left(\frac{625}{8}\sqrt{2}\right) = \frac{625}{8}\sqrt{2}(1250\sqrt{2}) = \frac{390.625}{2}$.

(b) Tomamos $y' = 0$: $1250\sqrt{2} - 32t = 0$. $t = \frac{625}{16}\sqrt{2}$ indica o instante de tempo em que a altura é máxima, a qual, sendo expressa em centímetros é

$$y\left(\frac{625}{16}\sqrt{2}\right) = \frac{625}{16}\sqrt{2}(1250\sqrt{2} - 625\sqrt{2}) = \frac{625}{16}\sqrt{2}(625\sqrt{2}) = \frac{390.625}{8}$$

(c) $D_tR(t) = 1250\sqrt{2}i + (1250\sqrt{2} - 32t)\,j$. Assim, a velocidade no impacto é

$$D_tR\left(\frac{625}{8}\right) = 1250\sqrt{2}i + \left[1250\sqrt{2} - 32\left(\frac{625}{8}\sqrt{2}\right)\right]j = 1250\sqrt{2}i - 1250\sqrt{2}j$$

23. $y_0 = 96$, $v_0 = 1.600$, $\alpha = 30°$. Em t s, $R(t) = (t \cdot 1600 \cos 30°)\mathbf{i} + (96 + t \cdot 1.600 \operatorname{sen} 30° - 16t^2)$

$= 800\sqrt{3}t\,\mathbf{i} + (96 + 800t - 16t^2)\mathbf{j}$ e $x = 800\sqrt{3}t$, $y = 96 + 800t - 16t^2$.

Tomamos $y = 0$: $16t^2 - 800t - 96 = 0$. Como $t > 0$, $t = 25 + \sqrt{631} \approx 50,1$ é o tempo de vôo. O percurso é $x(25 + \sqrt{631}) = 20.000\sqrt{3} + 800\sqrt{1893} \approx 69.450$.

25. Em t s, $R(t) = v_0 \cos \alpha t\,\mathbf{i} + (v_0 \operatorname{sen} \alpha t - 16t^2)\mathbf{j}$ logo, $x = v_0 \cos \alpha t$ e $y = \operatorname{sen} \alpha t - 16t^2$.

Como o alcance é 2.000 m, então $x = 2.000$ e $y = 0$. Qdo. $y = 0$, $t = \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{16}$ e então

$$2000 = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{16}; \quad v_0^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 32.000 \ (1)$$

Como a altura máxima é 1.000 m, então $y = 1.000$ qdo $D_t y = 0$; $v_0 \operatorname{sen} \alpha - 32t = 0$;

$t = \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{32}$. Então, $\frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{32} - \frac{v_0 \operatorname{sen}^2 \alpha}{64} = 1.000$; $v_0^2 = 64.000$ (2)

De (1) e (2) obtemos $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Portanto, $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e então de (2) obtemos,

$v_0 2 = 80.000$; assim $v_0 = 200\sqrt{2} \approx 283$. Logo, a velocidade escalar na boca da arma é 283 m/s.

27. $v_0 = 60$, $\alpha = 60°$. $R(t) = t \cdot 60 \cos 60°\mathbf{i} + (5 + t \cdot 60 \operatorname{sen} 60° - 16t^2)\mathbf{j} = 30t\,\mathbf{i} + (5 + 30\sqrt{3}t - 16t^2)$

Em t s e $x = 30t$, $y = 5 + 30\sqrt{3}t - 16t^2$. A bola atinge o prédio qdo. $x = 25$, isto é,

qdo. $t = \frac{5}{6}$. Qdo. $t = \frac{5}{6}$, $y = 25\sqrt{3} - \frac{55}{9} \approx 37$. Como $y > 0$, a bola atinge o prédio

$$V(t) = D_t R(t) = 30\mathbf{i} + (30\sqrt{3} - 32t)\mathbf{j}; \quad V\left(\frac{5}{6}\right) = 30\mathbf{i} + \left(30\sqrt{3} - \frac{80}{3}\right)\mathbf{j}$$

Se θ graus for a direção da bola qdo ela atinge o prédio, então

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{30\sqrt{3} - \frac{80}{3}}{30} = \frac{9\sqrt{3} - 8}{9} \approx 0,8431; \quad \theta = 40,1°$$

29. $v_0 = 15$, $\alpha = 0°$, $y_0 = 60$. $R(t) = 15t \cos 0° + (60 + 15t \operatorname{sen} 0° - 16t^2)\mathbf{j} = 15t\,\mathbf{i} + (60 - 16t^2)\mathbf{j}$

em t s e $x = 15t$, $y = 60 - 16t^2$. Tomamos $y = 0$: $60 - 16t = 0$; $t^2 = \frac{15}{4}$; $t = \frac{1}{2}\sqrt{15}$ é o tempo de impacto. A distância entre a base do edifício e o ponto onde a bola cai, medida em metros, é $x(\frac{1}{2}\sqrt{15}) = 15(\frac{1}{2}\sqrt{15}) \approx 29,0$.

EXERCÍCIOS 14.9 Componentes Normal e Tangencial da Aceleração (Suplementar)

1. $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$. $\mathbf{V}(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$, $\mathbf{A}(t) = 2\mathbf{j}$. $\dfrac{ds}{dt} = \|\mathbf{V}(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}$, $A_T(t) = \dfrac{d^2s}{dt^2} = \dfrac{4t}{\sqrt{1+4t^2}}$.

   $A_N(t) = \sqrt{\|\mathbf{A}(t)\|^2 - [A_T(t)]^2} = \sqrt{4 - \dfrac{16t^2}{1+4t^2}} = \sqrt{\dfrac{4+16t^2}{1+4t^2} - \dfrac{16t^2}{1+4t^2}} = \sqrt{\dfrac{4}{1+4t^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{1+4t^2}}$

3. $\mathbf{R}(t) = (\cos t + t \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t - t\cos t)\mathbf{j}$; $t \geq 0$.

   $\mathbf{V}(t) = D_t\mathbf{R}(t) = (-\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t + t\cos t)\mathbf{i} + (\cos t - \cos t + t \operatorname{sen} t)\mathbf{j} = t\cos t\,\mathbf{i} + t\operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$

   $\mathbf{A}(t) = D_t\mathbf{V}(t) = (\cos t - t\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t + t\cos t)\mathbf{j}$

   $\|\mathbf{A}(t)\| = \sqrt{(\cos t - t\operatorname{sen} t)^2 + (\operatorname{sen} t + t\cos t)^2}$

   $= \sqrt{\cos^2 t - 2t\operatorname{sen} t\cos t + t^2\operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen}^2 t + 2t\operatorname{sen} t\cos t + t^2\cos^2 t}$

   $= \sqrt{(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) + t^2(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)} = \sqrt{1+t^2}$

   $D_t s = \|\mathbf{V}(t)\| = \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{t^2} = |t| = t$. $A_T = D_t^2 s = 1$.

   $A_N(t) = \sqrt{\|\mathbf{A}(t)\|^2 - [A_T(t)]^2} = \sqrt{(1+t^2) - 1} = \sqrt{t^2} = |t| = t$

5. $\mathbf{R}(t) = e^{-t}\mathbf{i} + e^t\mathbf{j}$; $t_1 = 0$. $\mathbf{V}(t) = -e^{-t}\mathbf{i} + e^t\mathbf{j}$. $\mathbf{A}(t) = e^{-t}\mathbf{i} + e^t\mathbf{j}$. $\mathbf{V}(0) = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$. $\mathbf{A}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$.

   $D_t s = \|\mathbf{V}(t)\| = \sqrt{e^{-2t} + e^{2t}}$. $A_T(t) = D_t^2 s = \dfrac{-e^{-2t} + e^{2t}}{\sqrt{e^{-2t} + e^{2t}}}$. $A_T(0) = \dfrac{-1+1}{\sqrt{1+1}} = 0$.

   $A_N(0) = \sqrt{\|\mathbf{A}(0)\|^2 - [A_T(0)]^2} = \sqrt{2 - 0} = \sqrt{2}$

7. $\mathbf{R}(t) = \operatorname{sen}^3 t\,\mathbf{i} + \cos^3 t\,\mathbf{j}$; $t_1 = \frac{1}{4}\pi$. $\mathbf{V}(t) = D_t\mathbf{R}(t) = 3\operatorname{sen}^2 t\cos t\,\mathbf{i} - 3\cos^2 t\operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$.

   $\mathbf{A}(t) = D_t\mathbf{V}(t) = (6\operatorname{sen} t\cos^2 t - 3\operatorname{sen}^3 t)\mathbf{i} + (6\cos t\operatorname{sen}^2 t - 3\cos^3 t)\mathbf{j}$

   $\mathbf{V}(\frac{1}{4}\pi) = 3(\frac{1}{2}\sqrt{2})^2(\frac{1}{2}\sqrt{2})\mathbf{i} - 3(\frac{1}{2}\sqrt{2})^2(\frac{1}{2}\sqrt{2})\mathbf{j} = \frac{3}{4}\sqrt{2}\,\mathbf{i} - \frac{3}{4}\sqrt{2}\,\mathbf{j}$

   $\mathbf{A}(\frac{1}{4}\pi) = [6(\frac{1}{2}\sqrt{2})(\frac{1}{2}\sqrt{2})^2 - 3(\frac{1}{2}\sqrt{2})^3]\mathbf{i} + [6(\frac{1}{2}\sqrt{2})(\frac{1}{2}\sqrt{2})^2 - 3(\frac{1}{2}\sqrt{2})^3]$

   $= (\frac{3}{2}\sqrt{2} - \frac{3}{4}\sqrt{2})\mathbf{i} + (\frac{3}{2}\sqrt{2} - \frac{3}{4}\sqrt{2})\mathbf{j} = \frac{3}{4}\sqrt{2}\,\mathbf{i} + \frac{3}{4}\sqrt{2}\,\mathbf{j}$

   $D_t s = \|\mathbf{V}(t)\| = \sqrt{9\operatorname{sen}^4 t\cos^2 t + 9\cos^4 t\operatorname{sen}^2 t} = 3\sqrt{\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)} = 3|\operatorname{sen} t\cos t|$

   $= \frac{3}{2}|\operatorname{sen} 2t| = \frac{3}{2}\operatorname{sen} 2t$ qdo. $\operatorname{sen} 2t > 0$. Então, $A_T(t) = D_t^2 s = 3\cos 2t$. $A_T(\frac{1}{4}\pi) = 3\cos\frac{1}{2}\pi = 0$.

   $A_N\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \sqrt{\left\|\mathbf{A}\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right\|^2 - \left[A_T\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right]^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)^2 - 0} = \sqrt{\frac{18}{16} + \frac{18}{16}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

9. $\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$; $t \geq 0$. $\mathbf{V}(t) = 2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$. $\mathbf{A}(t) = 2\mathbf{i} + 6t\mathbf{j}$. $D_t s = \|\mathbf{V}(t)\| = \sqrt{4t^2 + 9t^4} = t\sqrt{4 + 9t^2}$.

   $A_T(t) = D_t^2 s = \sqrt{4 + 9t^2} + \dfrac{t(18t)}{2\sqrt{4+9t^2}} = \dfrac{4 + 18t^2}{\sqrt{4+9t^2}}$. $A_N(t) = \sqrt{\|\mathbf{A}(t)\|^2 - [A_T(t)]^2}$

   $= \sqrt{(4 + 36t^2) - \dfrac{(4+18t^2)^2}{4+9t^2}} = \sqrt{\dfrac{16 + 180t^2 + 324t^4 - (16 + 144t^2 + 324t^4)}{4+9t^2}} = \sqrt{\dfrac{36t^2}{4+9t^2}} = \dfrac{6t}{\sqrt{4+9t^2}}$

   $K(t) = \dfrac{A_N(t)}{(D_t s)^2} = \dfrac{6t}{\sqrt{4+9t^2}} \cdot \dfrac{1}{t^2(4+9t^2)} = \dfrac{6}{t(4+9t^2)^{3/2}}$

11. $\mathbf{R}(t) = (2t+3)\mathbf{i} + (t^2-1)\mathbf{j}$. $\mathbf{V}(t) = 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$. $\mathbf{A}(t) = 2\mathbf{j}$. $D_t s = \|\mathbf{V}(t)\| = \sqrt{4+4t^2} = 2\sqrt{1+t^2}$.

$A_T(t) = D_t{}^2 s = \dfrac{2t}{\sqrt{1+t^2}}$. $A_N(t) = \sqrt{\|\mathbf{A}(t)\|^2 - [A_T(t)]^2} = \sqrt{4 - \dfrac{4t^2}{1+t^2}} = \sqrt{\dfrac{4+4t^2-4t^2}{1+t^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{1+t^2}}$

$K(t) = \dfrac{A_N(t)}{(D_t s)^2} = \dfrac{2}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \dfrac{1}{4(1+t^2)} = \dfrac{1}{2(1+2t^2)^{3/2}}$. $\mathbf{T}(t) = \dfrac{\mathbf{V}(t)}{\|\mathbf{V}(t)\|} = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{i} + \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{j}$.

$D_t\mathbf{T}(t) = \dfrac{-\frac{1}{2}(2t^2)}{(1+t^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \dfrac{(1+t^2) - \frac{1}{2}t(2t)}{(1+t^2)^{3/2}}\mathbf{j} = \dfrac{-t}{(1+t^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \dfrac{1}{(1+t^2)^{3/2}}\mathbf{j}$.

$\|D_t\mathbf{T}(t)\| = \sqrt{\dfrac{t^2}{(1+t^2)^3} + \dfrac{1}{(1+t^2)^3}} = \dfrac{1}{1+t^2}$. $\mathbf{N}(t) = \dfrac{D_t\mathbf{T}(t)}{\|D_t\mathbf{T}(t)\|} = \dfrac{-t}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{i} + \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{j}$.

$\mathbf{V}(2) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$. $\mathbf{A}(2) = 2\mathbf{j}$. $\mathbf{T}(2) = \dfrac{1}{\sqrt5}\mathbf{i} + \dfrac{2}{\sqrt5}\mathbf{j}$. $\mathbf{N}(2) = \dfrac{-2}{\sqrt5}\mathbf{i} + \dfrac{1}{\sqrt5}\mathbf{j}$. $\|\mathbf{V}(2)\| = \sqrt{4+16} = 2\sqrt5$.

$A_T(2) = \dfrac{4}{\sqrt5}$. $A_N(2) = \dfrac{2}{\sqrt5}$. $K(2) = \dfrac{1}{2\sqrt{125}} = \dfrac{1}{10\sqrt5}$.

13. $\mathbf{R}(t) = 5\cos 3t\,\mathbf{i} + 5\,\text{sen}\,3t\,\mathbf{j}$. $\mathbf{V}(t) = -15\,\text{sen}\,3t\,\mathbf{i} + 15\cos 3t\,\mathbf{j}$. $\mathbf{A}(t) = -45\cos 3t\,\mathbf{i} - 45\,\text{sen}\,3t\,\mathbf{j}$.

$D_t s = \|\mathbf{V}(t)\| = 15\sqrt{(-\text{sen}\,3t)^2 + \cos^2 3t} = 15$. $\mathbf{T}(t) = \dfrac{\mathbf{V}(t)}{\|\mathbf{V}(t)\|} = -\text{sen}\,3t\,\mathbf{i} + \cos 3t\,\mathbf{j}$.

$D_t\mathbf{T}(t) = -3\cos 3t\,\mathbf{i} - 3\,\text{sen}\,3t\,\mathbf{j}$. $\|D_t\mathbf{T}(t)\| = 3\sqrt{(-\cos 3t)^2 + \text{sen}^2 3t} = 3$.

$\mathbf{N}(t) = \dfrac{D_t\mathbf{T}(t)}{\|D_t\mathbf{T}(t)\|} = -\cos 3t\,\mathbf{i} - \text{sen}\,3t\,\mathbf{j}$. $A_T(t) = D_t{}^2 s = D_t(15) = 0$.

$A_N(t) = \sqrt{\|\mathbf{A}(t)\|^2 - [A_T(t)]^2} = \sqrt{\|\mathbf{A}(t)\|^2} = \|\mathbf{A}(t)\| = 45\sqrt{(-\cos 3t)^2 + \text{sen}^2 3t} = 45$

$K(t) = \dfrac{A_N(t)}{(D_t s)^2} = \dfrac{45}{225} = \dfrac{1}{5}$. $\mathbf{V}(\frac{1}{3}\pi) = -15\,\text{sen}\,\pi\,\mathbf{i} + 15\cos\pi\,\mathbf{j} = -15\mathbf{j}$. $\mathbf{A}(\frac{1}{3}\pi) = -45\cos\pi\,\mathbf{i} - 45\,\text{sen}\,\pi\,\mathbf{j} = 45\mathbf{i}$.

$\mathbf{T}(\frac{1}{3}\pi) = -\text{sen}\,\pi\,\mathbf{i} + \cos\pi\,\mathbf{j} = -\mathbf{j}$. $\mathbf{N}(\frac{1}{3}\pi) = -\cos\pi\,\mathbf{i} - \text{sen}\,\pi\,\mathbf{j} = \mathbf{i}$. $\|\mathbf{V}(\frac{1}{3}\pi)\| = 15$.

15. $\mathbf{R}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j}$. $\mathbf{V}(t) = e^t\mathbf{i} - e^{-t}\mathbf{j}$. $\mathbf{A}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j}$. $D_t s = \|\mathbf{V}(t)\| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}$.

$\mathbf{T}(t) = \dfrac{\mathbf{V}(t)}{\|\mathbf{V}(t)\|} = \dfrac{e^t}{\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}}\mathbf{i} - \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}}\mathbf{j}$

$D_t\mathbf{T}(t) = \dfrac{e^t(e^{2t}+e^{-2t}) - \frac{1}{2}e^t(2e^{2t} - 2e^{-2t})}{(e^{2t}+e^{-2t})^{3/2}}\mathbf{i} + \dfrac{-e^{-t}(e^{2t}+e^{-2t}) - \frac{1}{2}e^{-t}(2e^{2t} - 2e^{-2t})}{(e^{2t}+e^{-2t})^{3/2}}\mathbf{j}$

$= \dfrac{2e^{-t}}{(e^{2t}+e^{-2t})^{3/2}}\mathbf{i} + \dfrac{2e^t}{(e^{2t}+e^{-2t})^{3/2}}\mathbf{j}$. $\|D_t\mathbf{T}(t)\| = \sqrt{\dfrac{4e^{-2t}}{(e^{2t}+e^{-2t})^3} + \dfrac{4e^{2t}}{(e^{2t}+e^{-2t})^3}} = \dfrac{1}{e^{2t}+e^{-2t}}$

$\mathbf{N}(t) = \dfrac{D_t\mathbf{T}(t)}{\|D_t\mathbf{T}(t)\|} = \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}}\mathbf{i} + \dfrac{e^t}{\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}}\mathbf{j}$. $A_T(t) = D_t{}^2 s = \dfrac{e^{2t} - e^{-2t}}{\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}}$.

$A_N(t) = \sqrt{\|\mathbf{A}(t)\|^2 - [A_T(t)]^2} = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} - \dfrac{(e^{2t}-e^{-2t})^2}{e^{2t}+e^{-2t}}} = \sqrt{\dfrac{e^{4t} + 2 + e^{-4t} - (e^{4t} - 2 + e^{-4t})}{e^{2t}+e^{-2t}}}$

$= \dfrac{2}{\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}}$. $K(t) = \dfrac{A_N(t)}{(D_t s)^2} = \dfrac{2}{\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}} \cdot \dfrac{1}{e^{2t}+e^{-2t}} = \dfrac{2}{(e^{2t}+e^{-2t})^{3/2}}$.

$\mathbf{V}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$. $\mathbf{A}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. $\mathbf{T}(0) = \dfrac{1}{\sqrt2}\mathbf{i} - \dfrac{1}{\sqrt2}\mathbf{j}$. $\mathbf{N}(0) = \dfrac{1}{\sqrt2}\mathbf{i} + \dfrac{1}{\sqrt2}\mathbf{j}$.

$\|\mathbf{V}(0)\| = \sqrt2$. $A_T(0) = 0$. $A_N(0) = \sqrt2$. $K(0) = \dfrac{1}{\sqrt2}$.

17. $y = 4x^2$. (a) Seja $x = t$; então $y = 4t^2$. $R(t) = t\mathbf{i} + 4t^2\mathbf{j}$; $R(1) = \mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

(b) $V(t) = \mathbf{i} + 8t\mathbf{j}$; $V(1) = \mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ (c) $A(t) = 8\mathbf{j}$; $A(1) = 8\mathbf{j}$

(d) $D_t s = \|V(t)\| = \sqrt{1 + 64t^2}$. $A_T(t) = D_t^2 s = \dfrac{64t}{\sqrt{1 + 64t^2}}$; $A_T(1) = \dfrac{64}{\sqrt{65}} = \dfrac{64}{65}\sqrt{65}$.

(e) $A_N(t) = \sqrt{\|A(t)\|^2 - [A_T(t)]^2} = \sqrt{64 - \dfrac{4096t^2}{1 + 64t^2}} = \sqrt{\dfrac{64}{1 + 64t^2}}$; $A_N(1) = \sqrt{\dfrac{64}{65}} = \dfrac{8}{65}\sqrt{65}$.

19. $y^2 = 8x$. Seja $y = f(t)$ então $x = \frac{1}{8}[f(t)]^2$, e seja t_1 o valor de t em $(2, 4)$; logo, $f(t_1) = 4$.

$$R(t) = \tfrac{1}{8}[f(t)]^2\mathbf{i} + f(t)\mathbf{j}. \quad V(t) = D_tR(t) = \tfrac{1}{4}f(t)f'(t)\mathbf{i} + f'(t)\mathbf{j}.$$

$\|V(t)\| = k$, onde K é uma constante positiva. Portanto,

$$\frac{1}{16}[f(t)]^2[f'(t)]^2 + [f'(t)]^2 = k^2; \quad f'(t) = \frac{4k}{\sqrt{[f(t)]^2 + 16}}; \quad f'(t_1) = \frac{4k}{\sqrt{4^2 + 16}} = \frac{k}{\sqrt{2}}$$

não é possível achar uma fórmula explícita para $f(t)$.

$R(t_1) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$; $V(t_1) = \frac{1}{4}(4)\frac{k}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{k}{\sqrt{2}}\mathbf{j} = \frac{k}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{k}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$. $V(t) = \dfrac{kf(t)}{\sqrt{[f(t)]^2 + 16}}\mathbf{i} + \dfrac{4k}{\sqrt{[f(t)]^2 + 16}}\mathbf{j}$

$$A(t) = D_tV(t) = \frac{kf'(t)([f(t)]^2 + 16) - k[f(t)]^2f'(t)}{([f(t)]^2 + 16)^{3/2}}\mathbf{i} - \frac{4k\,f(t)f'(t)}{([f(t)]^2 + 16)^{3/2}}\mathbf{j}$$

$$= \frac{16k\,f'(t)}{([f(t)]^2 + 16)^{3/2}}\mathbf{i} - \frac{4k\,f(t)f'(t)}{([f(t)]^2 + 16)^{3/2}}\mathbf{j}. \quad A(t_1) = \frac{16k(k/\sqrt{2})}{(16 + 16)^{3/2}}\mathbf{i} - \frac{4k(4)(k/\sqrt{2})}{(16 + 16)^{3/2}}\mathbf{j} = \frac{k^2}{16}\mathbf{i} - \frac{k^2}{16}\mathbf{j}.$$

$$T(t_1) = \frac{V(t_1)}{\|V(t_1)\|} = \frac{V(t_1)}{k} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}. \quad A_T(t) = D_t^2s = D_t\|V(t)\| = D_t(k) = 0.$$

$$A_N(t_1) = \sqrt{\|A(t_1)\|^2 - (A_T)^2} = \|A(t_1)\| = \frac{k^2}{16}\|\mathbf{i} - \mathbf{j}\| = \frac{k^2}{16}\sqrt{2}$$

Da fórmula 14.9.5, $A(t_1) - (D_t^2s)T(t_1) = \dfrac{k^2}{16}\mathbf{i} - \dfrac{k^2}{16}\mathbf{j}$ tem a mesma direção que $N(t_1)$.

Esse também é o caso de $\mathbf{i} - \mathbf{j}$. Portanto, $N(t_1) = \dfrac{\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\|\mathbf{i} - \mathbf{j}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 14

1-17. $A = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$, $B = \mathbf{i} + 7\mathbf{j}$, $C = 9\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

1. $3B - 7A = 3(\mathbf{i} + 7\mathbf{j}) - 7(4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}) = 3\mathbf{i} + 21\mathbf{j} - 28\mathbf{i} + 42\mathbf{j} = -25\mathbf{i} + 63\mathbf{j}$

3. $\|3B - 7A\| = \|-25\mathbf{i} + 63\mathbf{j}\| = \sqrt{(-25)^2 + (63)^2} = \sqrt{625 + 3969} = \sqrt{4594}$

5. $\|3B\| - \|7A\| = 3\|B\| - 7\|A\| = 3\sqrt{1 + 49} - 7\sqrt{16 + 36} = 3\sqrt{50} - 7\sqrt{52} = 15\sqrt{2} - 14\sqrt{13}$

7. $(A - B)\cdot C = [(4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}) - (\mathbf{i} + 7\mathbf{j})]\cdot(9\mathbf{i} - 5\mathbf{j}) = (3\mathbf{i} - 3\mathbf{j})\cdot(9\mathbf{i} - 5\mathbf{j}) = 27 + 65 = 92$

9. $2A + B = 9\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$. $\|2A + B\| = \sqrt{9^2 + (-5)^2} = \sqrt{106}$. O vetor unitário requerido é $\dfrac{9}{\sqrt{106}}\mathbf{i} - \dfrac{5}{\sqrt{106}}\mathbf{j}$.

11. $A = hB + kC$. $4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} = h(\mathbf{i} + 7\mathbf{j}) + k(9\mathbf{i} - 5\mathbf{j}) = (h + 9k)\mathbf{i} + (7h - 5k)\mathbf{j}$; $h + 9k = 4$ e $7h - 5k = -6$.

Assim, $h = -\frac{1}{2}$ e $k = \frac{1}{2}$.

13. A projeção escalar de A sobre B é $\frac{A\cdot B}{\|B\|} = \frac{(4i-6j)\cdot(i+7j)}{\sqrt{1+49}} = \frac{-38}{\sqrt{50}} = -\frac{19}{5}\sqrt{2}$.

15. A projeção vetorial de A sobre B é

$$\frac{A\cdot B}{\|B\|^2}B = \frac{(4i-6j)\cdot(i+7j)}{1+49}(i+7j) = \frac{-38}{50}(i+7j) = -\frac{19}{25}i - \frac{133}{25}j$$

17. A componente de B na direção de A é $\frac{A\cdot B}{\|A\|} = \frac{(4i-6j)\cdot(i+7j)}{\sqrt{4^2+6^2}} = \frac{-38}{\sqrt{52}} = -\frac{19}{26}\sqrt{13}$.

19. $c = \sqrt{50^2 + 70^2 - 2\cdot 50\cdot 70\cos 120^\circ} = 104,40$ (b) $\operatorname{sen}\alpha = 70\operatorname{sen} 120N/104,4 = ,5807$, $\alpha = 35,50^\circ$

21. Se W J for o trabalho $W = \langle 30\cos\frac{3}{4}, 30\operatorname{sen}\frac{3}{4}\rangle\cdot\langle -2-3, 7-6\rangle = -150\cos\frac{3}{4} + 30\operatorname{sen}\frac{3}{4} = -89,30$

23. (a) Seja $R(t) = \frac{1}{t+1}i + \frac{\sqrt{t}-1}{t-1}j = f(t)i + g(t)j$. O domínio de f é o conjunto de todos os núme reais exceto −1 e o domínio de g é o conjunto de todos os números reais não-negativos exceto 1.

(b) $\lim_{t\to 1} R(t) = \left(\lim_{t\to 1}\frac{1}{t+1}\right)i + \left(\lim_{t\to 1}\frac{1}{\sqrt{t}+1}\right)j = \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j$ (c) $D_tR(t) = \frac{-1}{(t+1)^2}i + \frac{2t^{1/2}-t-1}{2t^{1/2}(t-1)^2}j$

25. $x = 9t^2 - 1$ e $y = 3t + 1$. Portanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3}{18t} = \frac{1}{6t} \quad \text{e} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{1}{6t^2}}{18t} = -\frac{1}{108t}$$

27. $x = 12 - t^2$ e $y = 12t - t^3$, $\frac{dx}{dt} = -2t$ e $\frac{dy}{dt} = 12 - 3t^2$.

Tomamos $\frac{dy}{dt} = 0$: $12 - 3t^2 = 0$; $t = \pm 2$; $y = \pm 16$ são retas tangentes horizontais.

Tomamos $\frac{dx}{dt} = 0$: $-2t = 0$; $t = 0$; $x = 12$ é a reta tangente vertical.

29. $R(t) = \ln(t^2-1)i - \frac{2}{t^3}j$. $R'(t) = \frac{2t}{t^2-1}i + \frac{6}{t^4}j$. $R''(t) = \frac{2(t^2-1)-4t^2}{(t^2-1)^2}i - \frac{24}{t^5}j = \frac{-2t^2-2}{(t^2-1)^2}i - \frac{24}{t^5}j$.

$R'(t)\cdot R''(t) = \left[\frac{2t}{t^2-1}i + \frac{6}{t^4}j\right]\cdot\left[\frac{-2t^2-2}{(t^2-1)^2}i - \frac{24}{t^5}j\right] = \frac{-4t^3-4t}{(t^2-1)^3} - \frac{144}{t^9} = -\frac{4t^{10}(t^2+1)+144(t^2-1)^3}{t^9(t^2-1)^3}$

31. $R(t) = (2-t)i + t^2j$. $R'(t) = -i + 2tj$. $L = \int_0^3 \|R'(t)\|dt = \int_0^3\sqrt{1+4t^2}dt = 2\int_0^3\sqrt{\frac{1}{4}+t^2}dt$

$= \left[t\sqrt{\frac{1}{4}+t^2} + \frac{1}{4}\ln\left(t+\sqrt{\frac{1}{4}+t^2}\right)\right]_0^3 = 3\sqrt{\frac{1}{4}+9} + \frac{1}{4}\ln\left(3+\sqrt{\frac{1}{4}+9}\right) - \frac{1}{4}\ln\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{37} + \frac{1}{4}\ln(6+\sqrt{37})$

33. (a) $x = a\operatorname{sen} t$ e $y = b\cos t$. $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t$; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, uma elipse.

(b) $s = 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{(D_tx)^2+(D_ty)^2}dt = 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\operatorname{sen}^2 t}\,dt = 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2(1-\operatorname{sen}^2 t)+b^2\operatorname{sen}^2 t}\,dt$

$= 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\operatorname{sen}^2 t}\,dt = 4\int_0^{\pi/2}a\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2 t}\,dt$ onde $k^2 = (a^2-b^2)/a^2 < 1$.

35. $y = \ln x$, onde $x > 0$. $y' = x^{-1}$, $y'' = -x^{-2}$. $K = \dfrac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \dfrac{|-x^{-2}|}{(1 + x^{-2})^{3/2}} = \dfrac{x}{(x^2 + 1)^{3/2}}$

$$D_x K = \frac{(x^2 + 1)^{3/2} - 3x^2(x^2 + 1)^{1/2}}{(x^2 + 1)^3} = \frac{x^2 + 1 - 3x^2}{(x^2 + 1)^{5/2}} = \frac{1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^{5/2}}$$

Tomamos $D_x K = 0$: $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Como $D_x > 0$ se $0 < x < \frac{1}{2}\sqrt{2}$ e $D_x < 0$ se $x > \frac{1}{2}\sqrt{2}$, então K tem um valor máximo absoluto qdo. $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Então,

$$y = \ln \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\ln 2 \quad \text{e} \quad K = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big/ \left(\frac{1}{2} + 1\right)^{3/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big/ \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{9}\sqrt{3}.$$

37. $x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t)$ e $y = a(\operatorname{sen} t - \cos t)$.

$x' = a(-\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t + t\cos t) = at\cos t$, e $y' = a(\cos t - \cos t + t \operatorname{sen} t) = at \operatorname{sen} t$.

$x'' = a(\cos t - t \operatorname{sen} t)$, e $y'' = a(\operatorname{sen} t + t\cos t)$.

$$\rho(t) = \frac{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}}{|x'y'' - y'x''|} = \frac{[a^2t^2\cos^2 t + a^2t^2\operatorname{sen}^2 t]^{3/2}}{|a^2t\cos t(\operatorname{sen} t + t\cos t) - a^2t\operatorname{sen} t(\cos t - t\operatorname{sen} t)|}$$

$$= \frac{[a^2t^2(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)]^{3/2}}{|a^2t^2(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)|} = \frac{|a^3t^3|}{a^2t^2} = |at|$$

39. $R(t) = 3t^2\mathbf{i} + (t^3 - 3t)\mathbf{j}$. $x = 3t^2$, $y = t^3 - 3t$. $x' = 6t$, $y' = 3t^2 - 3$. $x'' = 6$, $y'' = 6t$.

$$K(2) = \frac{|x'(2)y''(2) - y'(2)x''(2)|}{[x'(2)^2 + y'(2)^2]^{3/2}} = \frac{|12\cdot 12 - 9\cdot 6|}{[12^2 + 9^2]^{3/2}} = \frac{90}{(225)^{3/2}} = \frac{2}{75};\quad \rho(2) = \frac{75}{2}.$$

41. $R(t) = 3t\mathbf{i} + (4t - t^2)\mathbf{j}$. (a) $x = 3t$; $t = \frac{x}{3}$. $y = 4t - t^2 = 4\left(\frac{x}{3}\right) - \left(\frac{x}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}x - \frac{1}{9}x^2$; $9y = 12x - x^2$.

(b) $V(t) = 3\mathbf{i} + (4 - 2t)\mathbf{j}$; $A(t) = -2\mathbf{j}$ (c) $V(1) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$; $A(1) = -2\mathbf{j}$

43. $x = a\cos^3 t$ e $y = a\operatorname{sen}^3 t$. $\dfrac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t \operatorname{sen} t$ e $\dfrac{dy}{dt} = 3a\operatorname{sen}^2 t\cos t$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3a\operatorname{sen}^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\operatorname{sen} t} = -\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t.\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\operatorname{sen} t} = \frac{1}{3a}\sec^4 t\operatorname{cosec} t.$$

45. $R(t) = (e^t + e^{-t})\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} = 2\cosh t\,\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$. $V(t) = 2\operatorname{senh} t\,\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. $\|V(t)\| = 2\sqrt{\operatorname{senh}^2 + 1} = 2\cosh t$.

$$T(t) = \frac{V(t)}{\|V(t)\|} = \operatorname{tgh} t\,\mathbf{i} + \operatorname{sech} t\,\mathbf{j} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}\mathbf{i} + \frac{2}{e^t + e^{-t}}\mathbf{j}.\quad D_tT(t) = \operatorname{sech}^2 t\,\mathbf{i} - \operatorname{sech} t\ \operatorname{tgh} t\,\mathbf{j}.$$

$$\|D_tT(t)\| = \sqrt{\operatorname{sech}^4 t + \operatorname{sech}^2 t\ \operatorname{tgh}^2 t} = \sqrt{\operatorname{sech}^2(\operatorname{sech}^2 t + \operatorname{tgh}^2 t)} = \operatorname{sech} t.$$

$$N(t) = \frac{D_tT(t)}{\|D_tT(t)\|} = \operatorname{sech} t\,\mathbf{i} - \operatorname{tgh} t\,\mathbf{j} = \frac{2}{e^t + e^{-t}}\mathbf{i} - \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}\mathbf{j}$$

47. $R(t) = 4t\mathbf{i} + \frac{1}{3}(2t + 1)^{3/2}\mathbf{j}$. $D_tR(t) = 4\mathbf{i} + (2t + 1)^{1/2}\mathbf{j}$. $\|D_tR(t)\| = \sqrt{16 + 2t + 1} = \sqrt{2t + 17}$.

$$s = \int_0^t \sqrt{2u + 17}\,du = \tfrac{1}{3}(2t + 17)^{3/2} - \tfrac{1}{3}(17)^{3/2};\quad 3s + 17\sqrt{17} = (2t + 17)^{3/2};\quad 2t = (3s + 17\sqrt{17})^{2/3} - 17$$

As equações paramétricas são $x = 2(3s + 17\sqrt{17})^{2/3} - 34$ e $y = \frac{1}{3}[(3s + 17\sqrt{17})^{2/3} - 16]^{3/2}$.

49. $y(t) = v_0 \operatorname{sen}\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2 = -\frac{g}{2}\left(t^2 - \frac{2v_0}{g}\operatorname{sen}\alpha\, t + \frac{v_0^2\operatorname{sen}^2\alpha}{g^2}\right) + \frac{v_0^2\operatorname{sen}^2\alpha}{2g} = \frac{v_0^2\operatorname{sen}^2\alpha}{2g} - \frac{g}{2}\left(t - \frac{v_0\operatorname{sen}\alpha}{g}\right)^2$

Então, a altura máxima é $\frac{v_0^2\operatorname{sen}^2\alpha}{2g}$.

51. Seja o ABC um paralelogramo com $V(\overrightarrow{OA}) = V(\overrightarrow{CB}) = A$ e $V(\overrightarrow{OC}) = V(\overrightarrow{AB}) = C$. As representações posicionais dos pontos médios das diagonais OB e AC são

$\frac{1}{2}V(\overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}[V(\overrightarrow{OA}) + V(\overrightarrow{AB})] = \frac{1}{2}(A + C)$; $V(\overrightarrow{OA}) + \frac{1}{2}V(\overrightarrow{AC}) = A + \frac{1}{2}[V(\overrightarrow{OC}) - V(\overrightarrow{AC})] = A + \frac{1}{2}(C - A) = \frac{1}{2}(A + C)$

Assim, os dois pontos coincidem; então, as diagonais de um paralelogramo dividem-se ao meio.

53. Uma epiciclóide é a curva traçada por um ponto P em uma circunferência de raio b que está deslizando no lado externo de uma circunferência fixa de raio a. Veja a Figura 14.49. Como a medida do comprimento de arco AB é igual à medida de comprimento de arco BP, segue que $at = b\theta$, e então $\theta = \frac{a}{b}t$, $\theta + t = \frac{a+b}{b}$. Além disso, $|\overline{OQ}| = a + b$. Vemos da figura que $V(\overrightarrow{OP}) = V(\overrightarrow{OQ}) + V(\overrightarrow{QP})$

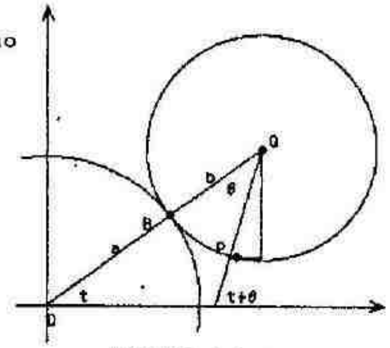


FIGURA 14.49

$$= [(a+b)\cos t\,\mathbf{i} + (a+b)\operatorname{sen} t\,\mathbf{j}] + [-b\cos(\theta + t)\,\mathbf{i} - b\operatorname{sen}(t + \theta)\,\mathbf{j}]$$

$$= \left[(a+b)\cos t - b\cos\frac{a+b}{b}t\right]\mathbf{i} + \left[(a+b)\operatorname{sen} t - b\operatorname{sen}\frac{a+b}{b}t\right]\mathbf{j}$$

Se $V(\overrightarrow{OP}) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, $x = (a+b)\cos t - b\cos\frac{a+b}{b}t$ e $y = (a+b)\operatorname{sen} t - b\operatorname{sen}\frac{a+b}{b}t$.

55. $R(t) = \cosh 2t\,\mathbf{i} + \operatorname{senh} 2t\,\mathbf{j}$. $V(t) = 2\operatorname{senh} 2t\,\mathbf{i} + 2\cosh 2t\,\mathbf{j}$. $A(t) = 4\cosh 2t\,\mathbf{i} + 4\operatorname{senh} 2t\,\mathbf{j}$.

$$\|V(t)\| = \sqrt{4\operatorname{senh}^2 2t + 4\cosh^2 2t} = 2\sqrt{\operatorname{senh}^2 2t + \cosh^2 2t} = 2\sqrt{\cosh 4t} = D_t s$$

$$A_T(t) = D_t^2 s = \frac{4\operatorname{senh} 4t}{\sqrt{\cosh 4t}}.\quad \|A(t)\| = \sqrt{16\cosh^2 2t + 16\operatorname{senh}^2 2t} = 4\sqrt{\cosh 4t}$$

$$A_N(t) = \sqrt{\|A(t)\|^2 - [A_T(t)]^2} = \sqrt{16\cosh 4t - \frac{16\operatorname{senh}^2 4t}{\cosh 4t}} = 4\sqrt{\frac{\cosh^2 4t - \operatorname{sen}^2 4t}{\cosh 4t}} = 4\sqrt{\frac{1}{\cosh 4t}} = \frac{4}{\sqrt{\cosh 4t}}$$

57. $R(t) = 3t\,\mathbf{i} + (4t - t^2)\,\mathbf{j}$. $V(t) = 3\mathbf{i} - (4 - 2t)\,\mathbf{j}$. $A(t) = -2\mathbf{j}$.

$$\|V(t)\| = \sqrt{9 + (4 - 2t)^2} = \sqrt{4t^2 - 16t + 25} = D_t s.\quad A_T = D_t^2 s = \frac{4t - 8}{\sqrt{4t^2 - 16t + 25}}.\quad \|A(t)\| = 2.$$

$$A_N(t) = \sqrt{\|A(t)\|^2 - [A_T(t)]^2} = \sqrt{4 - \frac{(4t - 8)^2}{4t^2 - 16t + 25}} = \sqrt{\frac{16t^2 - 64t + 100 - (16t^2 - 64t + 64)}{4t^2 - 16t + 25}}$$

$$= \sqrt{\frac{36}{4t^2 - 16t + 25}} = \frac{6}{\sqrt{4t^2 - 16t + 25}}$$

CAPÍTULO QUINZE

VETORES EM UM ESPAÇO TRIDIMENSIONAL E GEOMETRIA ANALÍTICA SÓLIDA

EXERCÍCIOS 15.1 O Espaço Numérico Tridimensional

1-5. Se $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$ forem vértices opostos de um paralelepípedo com faces paralelas aos planos coordenados, então qualquer vértice terá a forma (c_1, c_2, c_3) onde $c_i = a_i$ ou b_i, $i = 1, 2, 3$.

1. $A = (0, 0, 0)$, $B = (7, 2, 3)$ (b) $(7, 2, 0)$, $(0, 0, 3)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 2, 3)$, $(7, 0, 3)$, $(7, 0, 0)$

   (c) $|\overline{AB}| = \sqrt{(7-0)^2 + (2-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{49 + 4 + 9} = \sqrt{62}$

3. $A = (-1, 1, 2)$, $B = (2, 3, 5)$. (b) $(2, 1, 2)$, $(-1, 3, 2)$, $(-1, 1, 5)$, $(2, 3, 2)$, $(-1, 3, 5)$, $(2, 1, 5)$

   (c) $|\overline{AB}| = \sqrt{(2+1)^2 + (3-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{9 + 4 + 9} = \sqrt{22}$

5. $A = (1, -1, 0)$, $B = (3, 3, 5)$. (b) $(3, -1, 0)$, $(3, 3, 0)$, $(1, 3, 0)$, $(1, 3, 5)$, $(1, -1, 5)$, $(3, -1, 5)$

   (c) $|\overline{AB}| = \sqrt{(3-1)^2 + (3+1)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{4 + 16 + 25} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

7. $A = (3, 4, 2)$, $B = (1, 6, 3)$. (a) $|\overline{AB}| = \sqrt{(3-1)^2 + (4-6)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$

   (b) O ponto médio do segmento AB é $\left(\frac{3+1}{2}, \frac{4+6}{2}, \frac{2+3}{2}\right) = \left(2, 5, \frac{5}{2}\right)$.

9. $A = (2, -4, 1)$, $B = (\frac{1}{2}, 2, 3)$. (a) $|\overline{AB}| = \sqrt{(2-\frac{1}{2})^2 + (-4-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 36 + 4} = \frac{1}{2}\sqrt{169} = \frac{13}{2}$

   (b) O ponto médio do segmento AB é $\left(\frac{2+\frac{1}{2}}{2}, \frac{-4+2}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = \left(\frac{5}{4}, -1, 2\right)$.

11. $A = (-5, 2, 1)$, $B = (3, 7, -2)$. (a) $|\overline{AB}| = \sqrt{(-5-3)^2 + (2-7)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{64 + 25 + 9} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$

    (b) O ponto médio do segmento AB é $\left(\frac{-5+3}{2}, \frac{2+7}{2}, \frac{1-2}{2}\right) = \left(-1, \frac{9}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

13. Como a reta é perpendicular ao plano yz, é paralela ao eixo x. Assim, qualquer ponto sobre a reta difere de $(6, 4, 2)$ apenas em sua coordenada x e então, tem a forma $(x, 4, 2)$. Como a distância de $(x, 4, 2)$ ao ponto $(0, 4, 0)$ é 10 unidades, então

$$\sqrt{(x-0)^2 + (4-4)^2 + (2-0)^2} = 10; \quad x^2 + 4 = 100, \quad x^2 = 96; \quad x = \pm 4\sqrt{6}$$

Portanto, os pontos pedidos são $(4\sqrt{6}, 4, 2)$ e $(-4\sqrt{6}, 4, 2)$.

15. Seja A = (−3, 2, 4), B = (6, 1, 2), C = (−12, 3, 6). Então,

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(6+3)^2 + (1-2)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{81+1+4} = \sqrt{86}$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(-12+3)^2 + (3-2)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{81+1+4} = \sqrt{86}$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(-12-6)^2 + (3-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{324+4+16} = \sqrt{344} = 2\sqrt{86}$$

Se A, B, C, forem vértices de um triângulo, então $|\overline{AB}| + |\overline{AC}| > |\overline{BC}|$. Mas $|\overline{AB}| + |\overline{AC}| = \sqrt{86} + \sqrt{86} = |\overline{BC}|$. Então, A, B e C não são os vértices de um triângulo e, portanto, são colineares.

17. A = (2, −5, 3), B = (−1, 7, 0), C = (−4, 9, 7)

(a) $|\overline{AB}| = \sqrt{(2+1)^2 + (-5-7)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{9+144+9} = \sqrt{162} = 9\sqrt{2}$

$|\overline{AC}| = \sqrt{(2+4)^2 + (-5-9)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{36+196+16} = \sqrt{248} = 2\sqrt{62}$

$|\overline{BC}| = \sqrt{(-1+4)^2 + (7-9(^2 + (0-7)^2} = \sqrt{9+4+49} = \sqrt{62}$

(b) O ponto médio do lado AB é $\left(\frac{2-1}{2}, \frac{-5+7}{2}, \frac{3+0}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$.

O ponto médio do lado AC é $\left(\frac{2-4}{2}, \frac{-5+9}{2}, \frac{3+7}{2}\right) = (-1, 2, 5)$.

O ponto médio do lado BC é $\left(\frac{-1-4}{2}, \frac{7+9}{2}, \frac{0+7}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}, 8, \frac{7}{2}\right)$.

19.
$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$
$$(x^2 + Gx + \tfrac{1}{4}G^2) + (y^2 + Hy + \tfrac{1}{4}H^2) + (z^2 + Iz + \tfrac{1}{4}I^2) = \tfrac{1}{4}(G^2 + H^2 + I^2 - 4J)$$
$$(x + \tfrac{1}{2}G)^2 + (y + \tfrac{1}{2}H)^2 + (z + \tfrac{1}{2}I)^2 = \tfrac{1}{4}(G^2 + H^2 + I^2 - 4J)$$
$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = K$$

onde $h = -\tfrac{1}{2}G$, $k = -\tfrac{1}{2}H$, $l = -\tfrac{1}{2}I$, e $K = \tfrac{1}{4}(G^2 + H^2 + I^2 - 4J)$.

21.
$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 2z - 4 = 0$$
$$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 4y + 4) + (z^2 + 2z + 1) = 4 + 16 + 4 + 1$$
$$(x-4)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 25$$

O gráfico é a esfera com centro em (4, −2, −1) e r = 5.

23. $x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 9 = 0$; $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 0$. O gráfico é o ponto (0, 0, 3).

25.
$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 19 = 0$$
$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 2y + 1) + (z^2 - 4z + 4) = -19 + 9 + 1 + 4$$
$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = -5.$$ O gráfico é o conjunto vazio.

27.
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 8z - 9 = 0$$
$$x^2 + (y^2 - 2y + 1) + (z^2 + 8z + 16) = 9 + 1 + 16$$
$$x^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2 = 26$$

O centro da esfera dada é (0, 1, −4) logo, uma equação da esfera pedida é

$$x^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2 = 9$$

29. Escolha planos coordenados, como na Figura 15.1.3, de modo que os vértices do paralelepípedo sejam $A(0, 0, 0)$, $B(a, b, c)$; $C(a, b, 0)$, $H(0, 0, c)$; $D(a, 0, 0)$, $G(0, b, c)$; $E(a, 0, c)$ e $F(0, b, 0)$. Como cada uma das diagonais AB, CH, DG, EF tem $(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}c)$ como ponto médio, elas se interceptam.

31. Escolha planos coordenados, como mostra a Figura 15.1.3, de modo que os vértices do paralelepípedo retangular estejam em $A(0, 0, 0)$, $B(a, b, c)$; $C(a, b, 0)$, $H(0, 0, c)$; $D(a, 0, 0)$, $G(0, b, c)$; $E(a, 0, c)$ e $F(0, b, 0)$. As quatro diagonais têm o mesmo comprimento:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2 + (c-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$|\overline{CH}| = \sqrt{(a-0)^2 + (0-b)^2 + (0-c)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$|\overline{DG}| = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2 + (0-c)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$|\overline{EF}| = \sqrt{(0-a)^2 + (b-0)^2 + (0-c)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

EXERCÍCIOS 15.2 Vetores no Espaço Tridimensional

1-5. $A = \langle 1, 2, 3\rangle$, $B = \langle 4, -3, -1\rangle$, $C = \langle -5, -3, 5\rangle$, $D = \langle -2, 1, 6\rangle$

1. (a) $A + 5B = \langle 1, 2, 3\rangle + 5\langle 4, -3, -1\rangle = \langle 1, 2, 3\rangle + \langle 20, -15, -5\rangle = \langle 21, -13, -2\rangle$

   (b) $7C - 5D = 7\langle -5, -3, 5\rangle - 5\langle -2, 1, 6\rangle = \langle -35, -21, 35\rangle + \langle 10, -5, -30\rangle = \langle -25, -26, 5\rangle$

   (c) $\|7C\| - \|5D\| = 7\|\langle -5, -3, 5\rangle\| - 5\|\langle -2, 1, 6\rangle\| = 7\sqrt{25 + 9 + 25} - 5\sqrt{4 + 1 + 36} = 7\sqrt{59} - 5\sqrt{41}$

   (d) $\|7C - 5D\| = \|\langle -25, -26, 5\rangle\| = \sqrt{625 + 676 + 25} = \sqrt{1326}$

3. (a) $C + 3D - 8A = \langle -5, -3, 5\rangle + 3\langle -2, 1, 6\rangle - 8\langle 1, 2, 3\rangle$

   $= \langle -5, -3, 5\rangle + \langle -6, 3, 18\rangle + \langle -8, -16, -24\rangle = \langle -19, -16, -1\rangle$

   (b) $\|A\|\|B\|(C - D) = \|\langle 1, 2, 3\rangle\|\|\langle 4, -3, -1\rangle\|(\langle -5, -3, 5\rangle - \langle -2, 1, 6\rangle) = \sqrt{1+4+9}\sqrt{16+9+1}\langle -3, -4, -1\rangle$

   $= \sqrt{14}\sqrt{26}\langle -3, -4, -1\rangle = \sqrt{2^2 \cdot 7 \cdot 13}\langle -3, -4, -1\rangle = 2\sqrt{91}\langle -3, -4, -1\rangle = \langle -6\sqrt{91}, -8\sqrt{91}, -2\sqrt{91}\rangle$

5. $a(A + B) + b(C + D) = 0$; $a(\langle 1, 2, 3\rangle + \langle 4, -3, -1\rangle) + b(\langle -5, -3, 5\rangle + \langle -2, 1, 6\rangle) = \langle 0, 0, 0\rangle$

   $a\langle 5, -1, 2\rangle + b\langle -7, -2, 11\rangle = \langle 0, 0, 0\rangle$. Logo, $5a - 7b = 0$, $-a - 2b = 0$, e $2a + 11b = 0$.

   A única solução para esse sistema de três equações é $a = 0$ e $b = 0$.

7. $P_1 = (3, -1, -4)$, $P_2 = (7, 2, 4)$. $V(\overrightarrow{P_1P_2}) = \langle 7 - 3, 2 + 1, 4 + 4\rangle = \langle 4, 3, 8\rangle$; $\|V(\overrightarrow{P_1P_2})\| = \sqrt{16 + 9 + 64} = \sqrt{89}$

   Portanto, $\cos\alpha = \dfrac{4}{\sqrt{89}}$, $\cos\beta = \dfrac{3}{\sqrt{89}}$, $\cos\gamma = \dfrac{8}{\sqrt{89}}$ e $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \dfrac{16}{89} + \dfrac{9}{89} + \dfrac{64}{89} = 1$.

9. $P_1 = (4, -3, -1)$, $P_2 = (-2, -4, -8)$.

$V(\overrightarrow{P_1P_2}) = \langle -2 - 4, -4 + 3, -8 + 1\rangle = \langle -6, -1, -7\rangle$; $\|V(\overrightarrow{P_1P_2})\| = \sqrt{36 + 1 + 49} = \sqrt{86}$

Assim, $\cos\alpha = \dfrac{-6}{\sqrt{86}}$, $\cos\beta = \dfrac{-1}{\sqrt{86}}$, $\cos\gamma = \dfrac{-7}{\sqrt{86}}$ e $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \dfrac{36}{86} + \dfrac{1}{86} + \dfrac{49}{86} = 1$.

11. $P_1 = (3, -1, -4)$, $P_2 = (7, 2, 4)$. Seja $Q = (x, y, z)$. Então, $V(\overrightarrow{P_1P_2}) = 3V(\overrightarrow{P_1Q})$.

$\langle 4, 3, 8\rangle = 3\langle x - 3, y + 1, z + 4\rangle$; $3x - 9 = 4$, $x = \dfrac{13}{3}$; $3y + 3 = 3$, $y = 0$; e $3z + 2 = 8$, $z = -\dfrac{4}{3}$.

Portanto, Q é o ponto $\left(\dfrac{13}{3}, 0, -\dfrac{4}{3}\right)$.

13. $P_1 = (3, 2, -4)$, $P_2 = (-5, 4, 2)$. Seja $P_3 = (x, y, z)$. Então, $4V(\overrightarrow{P_1P_2}) = -3V(\overrightarrow{P_2P_3})$.

$4\langle -5 - 3, 4 - 2, 2 + 4\rangle = -3\langle x + 5, y - 4, z - 2\rangle$; $\langle -32, 8, 24\rangle = \langle -3x - 15, -3y + 2, -3z + 6\rangle$

Assim, $-3x - 15 = -32$, $x = \dfrac{17}{3}$; $-3y + 12 = 8$, $y = \dfrac{4}{3}$; $-3z + 6 = 24$, $z = -6$. Logo, $P_3 = \left(\dfrac{17}{3}, \dfrac{4}{3}, -6\right)$.

15. (a) Seja $A = -6i + 2j + 3k$. Então, $\|A\| = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7$. $A = 7\left(-\dfrac{6}{7}i + \dfrac{2}{7}j + \dfrac{3}{7}k\right)$

(b) Seja $A = -2i + j - 3k$. Então, $\|A\| = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$. $A = \sqrt{14}\left(-\dfrac{2}{\sqrt{14}}i + \dfrac{1}{\sqrt{14}}j - \dfrac{3}{\sqrt{14}}k\right)$

17. Seja U o vetor unitário tendo a mesma direção que $V(\overrightarrow{P_1P_2})$.

(a) $P_1 = (4, -1, -6)$, $P_2 = (5, 7, -2)$. $V(\overrightarrow{P_1P_2}) = \langle 5 - 4, 7 + 1, -2 + 6\rangle = \langle 1, 8, 4\rangle$.

$\|V(\overrightarrow{P_1P_2})\| = \sqrt{1 + 64 + 16} = \sqrt{81} = 9$. $U = \langle \frac{1}{9}, \frac{8}{9}, \frac{4}{9}\rangle$.

(b) $P_1 = (-2, 5, 3)$, $P_2 = (-4, 7, 5)$. $V(\overrightarrow{P_1P_2}) = \langle -4 + 2, 7 - 5, 5 - 3\rangle = \langle -2, 2, 2\rangle$.

$\|V(\overrightarrow{P_1P_2})\| = \sqrt{4 + 4 + 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. $U = \langle -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\rangle$.

19. Seja $A = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ e $B = \langle b_1, b_2, c_3\rangle$. Usamos as mesmas propriedades dos números reais

(a) $A + B = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\rangle = \langle b_1 + a_1, b_2 + a_2, b_3 + a_3\rangle = B + A$

(b) Seja $0 = \langle 0, 0, 0\rangle$. Então, $A + 0 = \langle a_1 + 0, a_2 + 0, a_3 + 0\rangle = \langle a_1, a_2, a_3\rangle = A$.

(c) Seja $A = \langle -a_1, -a_2, -a_3\rangle$. Então, $A + (-A) = \langle a_1 + (-a_1), a_2 + (-a_2), a_3 + (-a_3)\rangle = \langle 0, 0, 0\rangle = 0$.

(d) $c(A + B) = c\langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\rangle = \langle c(a_1 + b_1), c(a_2 + b_2), c(a_3 + b_3)\rangle$

$= \langle ca_1 + cb_1, ca_2 + cb_2, ca_3 + cb_3\rangle = \langle ca_1, ca_2, ca_3\rangle + \langle cb_1, cb_2, cb_3\rangle = cA + cB$

21-25. $A = \langle -4, -2, 4\rangle$, $B = \langle 2, 7, -1\rangle$, $C = \langle 6, -3, 0\rangle$, $D = \langle 5, 4, -3\rangle$.

21. (a) $A \cdot (B + C) = \langle -4, -2, 4\rangle \cdot (\langle 2, 7, -1\rangle + \langle 6, -3, 0\rangle) = \langle -4, -2, 4\rangle \cdot \langle 8, 4, -1\rangle = -32 - 8 - 4 = -44$

(b) $(A \cdot B)(C \cdot D) = (\langle -4, -2, 4\rangle \cdot \langle 2, 7, -1\rangle)(\langle 6, -3, 0\rangle \cdot \langle 5, 4, -3\rangle) = (8 - 14 - 4)(30 - 12 + 0)$

$= (-26)(18) = -468$

(c) $A \cdot D - B \cdot C = (\langle -4, -2, 4\rangle \cdot \langle 5, 4, -3\rangle) - (\langle 2, 7, -1\rangle \cdot \langle 6, -3, 0\rangle) = (-20 - 8 - 12) - (12 - 21 + 0)$

$= -40 - (-9) = -31$

(d) $(B \cdot D)A - (D \cdot A)B = (\langle 2, 7, -1\rangle \cdot \langle 5, 4, -3\rangle)\langle -4, -2, 4\rangle - (\langle 5, 4, -3\rangle \cdot \langle -4, -2, 4\rangle)\langle 2, 7, -1\rangle$

$= (10 + 28 + 3)\langle -4, -2, 4\rangle - (-20 - 8 - 12)\langle 2, 7, -1\rangle = 41\langle -4, -2, 4\rangle + 40\langle 2, 7, -1\rangle =$

$= \langle -164, -82, 164\rangle + \langle 80, 280, -40\rangle = \langle -84, 198, 124\rangle$

23. $A \cdot C = \langle -4, -2, 4\rangle \cdot \langle 6, -3, 0\rangle = -24 + 6 + 0 = -18$, $\|A\| = \sqrt{16 + 4 + 16} = 6$, $\|C\| = \sqrt{36 + 9 + 0} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

(a) $\cos\theta = \dfrac{A \cdot C}{\|A\|\|C\|} = \dfrac{-18}{6(3\sqrt{5})} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

(b) A componente de C na direção de A é $\|C\|\cos\theta = 3\sqrt{5}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = -3$.

(c) O vetor projeção de C em A é $\dfrac{A \cdot C}{\|A\|^2}A = \dfrac{-18}{36}\langle -4, -2, 4\rangle = \langle 2, 1, -2\rangle$.

25. $A \cdot B = \langle -4, -2, 4\rangle \cdot \langle 2, 7, -1\rangle = -8 - 14 - 4 = -26$, $\|B\| = \sqrt{4 + 49 + 1} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$.

(a) A projeção escalar de A em B é $\dfrac{A \cdot B}{\|B\|} = \dfrac{-26}{3\sqrt{6}} = -\dfrac{13}{9}\sqrt{6}$.

(b) O vetor projeção de A em B é $\dfrac{A \cdot B}{\|B\|^2}B = \dfrac{-26}{54}\langle 2, 7, -1\rangle = \langle -\dfrac{26}{27}, -\dfrac{91}{27}, \dfrac{13}{27}\rangle$.

27. Seja $A = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, $B = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$, $C = \langle c_1, c_2, c_3\rangle$.

(a) $A \cdot B = \langle a_1, a_2, a_3\rangle \cdot \langle b_1, b_2, b_3\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

$= b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 = \langle b_1, b_2, b_3\rangle \cdot \langle a_1, a_2, a_3\rangle = B \cdot A$

(b) $A \cdot (B + C) = \langle a_1, a_2, a_3\rangle \cdot \langle b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3\rangle = a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3)$

$= (a_1b_1 + a_1c_1) + (a_2b_2 + a_2c_2) + (a_3b_3 + a_3c_3)$

$= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) = A \cdot B + A \cdot C$

29. d unidades é a distância de $P(2, -1, -4)$ até a reta que passa por $A(3, -2, 2)$ e $B(-9, -6, 6)$.

$V(\overrightarrow{AP}) = \langle -1, 1, -6\rangle$, $\|V(\overrightarrow{AP})\|^2 = 1 + 1 + 36 = 38$, $V(\overrightarrow{AB}) = \langle -12, -4, 4\rangle$, $\|V(\overrightarrow{AB})\|^2 = 144 + 16 + 16 = 176$

$V(\overrightarrow{AP}) \cdot V(\overrightarrow{AB}) = 12 - 4 - 24 = -16$. $d = \sqrt{\|V(\overrightarrow{AP})\|^2 - \dfrac{[V(\overrightarrow{AP}) \cdot V(\overrightarrow{AB})]^2}{\|V(\overrightarrow{AB})\|^2}} = \sqrt{38 - \dfrac{256}{176}} = \sqrt{\dfrac{402}{11}} = \dfrac{1}{11}\sqrt{4422}$

31. Seja $A = (2, 2, 2)$, $B = (2, 0, 1)$, $C = (4, 1, -1)$, $D = (4, 3, 0)$. $V(\overrightarrow{BC}) = \langle 2, 1, -2\rangle = V(\overrightarrow{AD})$ logo, ABCD é um paralelogramo $V(\overrightarrow{AB}) \cdot V(\overrightarrow{AD}) = \langle 0, -2, -1\rangle \cdot \langle 2, 1, -2\rangle = 0$ assim, existe um ângulo reto em A. Portanto, o paralelogramo é um retângulo.

33. Seja $A = (-2, 3, 1)$, $B = (1, 2, 3)$, $P = (3, -1, 2)$. $\|V(\overrightarrow{AB})\|^2 = \|\langle 3, -1, 2\rangle\|^2 = 9 + 1 + 4 = 14$, $\|V(\overrightarrow{AP})\|^2 = \|\langle 5, -4, 1\rangle\|^2 = 25 + 16 + 1 = 42$, $V(\overrightarrow{AP}) \cdot V(\overrightarrow{AB}) = 15 + 4 + 2 = 21$. Se A unidades de área for a área

$$A = \tfrac{1}{2}bh = \tfrac{1}{2}\|V(\overrightarrow{AB})\| \sqrt{\|V(\overrightarrow{AP})\|^2 - \frac{[V(\overrightarrow{AP}) \cdot V(\overrightarrow{AB})]^2}{\|V(\overrightarrow{AB})\|^2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\|V(\overrightarrow{AP})\|^2\|V(\overrightarrow{AB})\|^2 - [V(\overrightarrow{AP}) \cdot V(\overrightarrow{AB})]^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{(14)(42) - (21)^2} = \tfrac{7}{2}\sqrt{(2)(6) - 9} = \tfrac{7}{2}\sqrt{3}$$

35. $A = 3i + 5j - 3k$, $B = -i - 2j + 3k$, $C = 2i - j + 4k$. $A - 2C = 3i + 5j - 2k - 2(2i - j + 4k) = -i + 7j - 10k$.

A componente de B na direção de $A - 2C$ é $\dfrac{B \cdot (A - 2C)}{\|A - 2C\|} = \dfrac{1 - 14 - 30}{\sqrt{1 + 49 + 100}} = \dfrac{-43}{\sqrt{150}} = -\dfrac{43}{30}\sqrt{6}$.

37. Se W J for o trabalho realizado pela força $F = 3i - 2j + k$ ao mover um objeto de $P_1(-2, 4, 3)$ a $P_2(1, -3, 5)$, então, $W = F \cdot V(\overrightarrow{P_1P_2})(3i - 2j + k)(3i - 7j + 2k) = 9 + 14 + 2 = 25$.

39. Para a força F, $\cos\alpha = \frac{1}{6}\sqrt{6}$ e $\cos\beta = \frac{1}{3}\sqrt{6}$. Portanto,

$$\left(\tfrac{1}{6}\sqrt{6}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{3}\sqrt{6}\right)^2 + \cos^2\gamma = 1;\quad \tfrac{1}{6} + \tfrac{2}{3} + \cos^2\gamma = 1;\quad \cos^2\gamma = \tfrac{1}{6};\quad \cos\gamma = \tfrac{1}{6}\sqrt{6}.\quad F = 10\left(\tfrac{1}{6}\sqrt{6}\,i + \tfrac{1}{3}\sqrt{6}\,j + \tfrac{1}{6}\sqrt{6}\,k\right)$$

Se W J for o trabalho realizado por F ao mover um objeto da origem a $(7, -4, 2)$, então

$$W = F \cdot V(\overrightarrow{OP}) = \left(\tfrac{5}{3}\sqrt{6}\,i + \tfrac{10}{3}\sqrt{6}\,j + \tfrac{5}{3}\sqrt{6}\,k\right) \cdot (7i - 4j + 2k) = \tfrac{35}{3}\sqrt{6} - \tfrac{40}{3}\sqrt{6} + \tfrac{10}{3}\sqrt{6} = \tfrac{5}{3}\sqrt{6}$$

41. $A = 12i + 9j - 5k$, $B = 4i + 3j - 5k$. Do Exercício 40, $B - cA$ será ortogonal a A se

$$c = \frac{B \cdot A}{\|A\|^2} = \frac{(4i + 3j - 5k) \cdot (12i + 9j - 5k)}{144 + 81 + 25} = \frac{48 + 27 + 25}{250} = \frac{100}{250} = \frac{2}{5}$$

43. $(\|B\|A + \|A\|B) \cdot (\|B\|A - \|A\|B) = \|B\|A \cdot \|B\|A - \|A\|B \cdot \|A\|B = \|B\|^2\|A\|^2 - \|A\|^2\|B\|^2 = 0$

Portanto, os vetores $\|B\|A + \|A\|B$ e $\|B\|A - \|A\|B$ são ortogonais.

45. Seja α a medida em radianos de cada ângulo de direção de um vetor.

Então, $\cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\cos^2\alpha = \frac{1}{3}$; $\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\alpha = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

47. θ é o ângulo entre os vetores $A = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ e $B = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$. Seja $P = (a_1, a_2, a_3)$ e $Q = (b_1, b_2, b_3)$ de modo que $\|A\| = |\overline{OP}|$ e $\|B\| = |\overline{OQ}|$. Da lei dos co-senos,

$$\begin{aligned}2\|A\|\|B\|\cos\theta &= \|A\|^2 + \|B\|^2 - |\overline{PQ}|^2\\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^3) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - [(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2]\\ &= 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_2b_3) = 2A \cdot B\end{aligned}$$

49. (a) Seja $A = \langle a, b, c\rangle$. Resolvemos $r\langle 2, 0, 1\rangle + s\langle 0, -1, 0\rangle + t\langle 1, -1, 0\rangle = \langle a, b, c\rangle$ para r, s, t.

$$2r + t = a,\quad -s - t = b,\quad r = c;\quad t = a - 2c,\quad s = 2r - a - b.$$

Assim, $\langle a, b, c\rangle = c\langle 2, 0, 1\rangle + (2c - a - b)\langle 0, -1, 0\rangle + (a - 2c)\langle 1, -1, 0\rangle$ logo, os vetores formam uma base

(b) Sejam $a = -2$, $b = 3$, $c = 5$ em (a). Então, $r = 5$, $s = 2(5) - (-2) - 3 = 9$, $t = (-2) - 2(5) = -12$.

EXERCÍCIOS 15.3 Planos

1. O plano contendo $(3, 1, 2)$ com vetor normal $\langle 1, 2, -3\rangle$ tem a equação

$$1(x-3)+2(y-1)-3(z-2)=0;\quad x-3+2y-2-3z+6=0;\quad x+2y-3z+1=0$$

3. O plano contendo $(0, -1, 2)$ com vetor normal $\langle 0, 1, -1\rangle$ tem a equação

$$0(x-0)+1(y+1)-1(z-2)=0;\quad y+1-z+2=0;\quad y-z+3=0$$

5. O plano contendo $(2, 1, -1)$ com vetor normal $-\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ tem a equação

$$-1(x-2)+3(y-1)+4(z+1)=0;\ -x+2+3y-3+4z+4=0;\quad x-3y-4z-3=0$$

7. Pelo Teorema 15.3.3, uma equação do plano é da forma $ax+by+cz+d=0$ (1).

Como o plano contém $(3, 4, 1)$, $(1, 7, 1)$, e $(-1, -2, 5)$, temos as três equações

$$\begin{aligned} E_1&: 3a+4b+c=-d \\ E_2&: a+7b+c=-d \\ E_3&: -a-2b+5c=-d \end{aligned}\qquad \begin{aligned} F_1=E_1+3E_3&: -2b+16c=-4d \\ F_2=E_2+E_3&: 5b+c=-2d \end{aligned}\qquad 5F_1+2F_2:\ 92c=-24d$$

Logo, $c=-\frac{6d}{23}$, $b=-\frac{2d}{23}$, $a=-\frac{3d}{23}$. Substituindo os valores em (1), obtemos

$$-\frac{3d}{23}x-\frac{2d}{23}y-\frac{6d}{23}z+d=0;\quad 3x+2y+6z-23=0$$

9. Um vetor normal ao plano $2x-y+2z-6=0$ é $\langle 2, -1, 2\rangle$. $\|\langle 2, -1, 2\rangle\|=\sqrt{4+1+4}=3$.

Logo, dois vetores unitários normais ao plano são $\langle \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\rangle$ e $\langle -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\rangle$.

11. Um vetor normal ao plano $4x+3y-12z=0$ é $\langle 4, 3, -12\rangle$. $\|\langle 4, 3, -12\rangle\|=\sqrt{16+9+144}=13$.

Logo, dois vetores unitários normais ao plano são $\langle \frac{4}{13}, \frac{3}{13}, -\frac{12}{13}\rangle$ e $\langle -\frac{4}{13}, -\frac{3}{13}, \frac{12}{13}\rangle$.

13. Um vetor normal ao plano $3x+2z-6=0$ é $\langle 3, 0, 2\rangle$. $\|\langle 3, 0, 2\rangle\|=\sqrt{9+0+4}=\sqrt{13}$.

Então, dois vetores unitários normais ao plano são $\langle \frac{3}{\sqrt{13}}, 0, \frac{2}{\sqrt{13}}\rangle$ e $\langle -\frac{3}{\sqrt{13}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{13}}\rangle$.

15. Seja $A=(2, 2, -4)$, $B=(7, -1, 3)$. Então, $V(\overrightarrow{AB})=\langle 5, -3, 7\rangle$ é um vetor normal ao plano.

Como o plano contém o ponto $(-5, 1, 2)$, uma equação do plano é

$$(x+5)-3(y-1)+7(z-2)=0;\quad 5x-3y+7z+14=0$$

17. Um vetor normal ao plano $x+3y-z-7=0$ é $\langle 1, 3, -1\rangle$. Um vetor normal $\langle a, b, c\rangle$ ao plano pedido será ortogonal a $\langle a, b, c\rangle$ logo, $\langle a, b, c\rangle\cdot\langle 1, 3, -1\rangle=0$; $a+3b-c=0$. (1) Como $A(2, 0, 5)$ e $B(0, 2, -1)$ encontram-se no plano pedido, $V(\overrightarrow{AB})=\langle -2, 2, -6\rangle$ será ortogonal a $\langle a, b, c\rangle$, logo, $\langle a, b, c\rangle\cdot\langle -2, 2, -6\rangle=0$; $-2a+2b-6c=0$ (2). Resolvendo as equações (1) e (2) simultaneamente, obtemos $a=-2c$ e $b=c$. Uma equação do plano pedido é

$$-2c(x-2)+c(y-0)+c(z-5)=0;\quad 2x-y-z+1=0$$

19. Como o plano pedido é perpendicular ao plano yz, um vetor normal tem 0 como sua primeira componente. Logo, tem a forma $N = \langle 0, b, c\rangle$. Como o plano pedido forma um ângulo de medida $\cos^{-1}(\frac{2}{3})$ com o plano $2x - y + 2z - 3$, seus vetores normais formam o mesmo ângulo. Portanto,

$$\frac{\langle 0, b, c\rangle \cdot \langle 2, -1, 2\rangle}{\|\langle 0, b, c\rangle\| \|\langle 2, -1, 2\rangle\|} = \frac{2}{3}; \quad -b + 2c = 2\sqrt{b^2 + c^2}; \quad b^2 - 4bc + 4c^2 = 4b^2 + 4c^2; \quad 0 = 3b^2 + 4bc$$

de onde obtemos $b = 0$ e $b = -\frac{4}{3}c$. O plano contém o ponto $(2, 1, 1)$.

Quando $b = 0$, $N = \langle 0, 0, c\rangle$ e uma equação é $0(x - 2) + 0(y - 1) + c(z - 1) = 0$; $z = 1$.

Quando $b = -\frac{4}{3}c$, $N = \langle 0, -\frac{4}{3}c, c\rangle$. Uma equação é $0(x - 2) - \frac{4}{3}c(y - 1) + c(z - 1) = 0$; $4y - 3z - 1 = 0$.

21. θ é a medida do ângulo agudo entre os planos $2x - y - 2z - 5$, $6x - 2y + 3z + 8 = 0$.

$$\cos\theta = \frac{|\langle 2, -1, -2\rangle \cdot \langle 6, -2, 3\rangle|}{\sqrt{4 + 1 + 4}\ \sqrt{36 + 4 + 9}} = \frac{|12 + 2 - 6|}{\sqrt{9}\ \sqrt{49}} = \frac{8}{(3)(7)} = \frac{8}{21}; \quad \theta \doteq 67,6°$$

23. θ é a medida do ângulo agudo entre os planos $3x + 4y = 0$ e $4x - 7y + 4z - 6 = 0$.

$$\cos\theta = \frac{|\langle 3, 4, 0\rangle \cdot \langle 4, -7, 4\rangle|}{\sqrt{9 + 16 + 0}\ \sqrt{16 + 49 + 16}} = \frac{|12 - 28 + 0|}{\sqrt{25}\ \sqrt{81}} = \frac{16}{(5)(9)} = \frac{16}{45}; \quad \theta \doteq 69,2°$$

25. Um vetor normal ao plano $5x + 11y + 2z - 30 = 0$ é $N = \langle 5, 11, 2\rangle$. Escolha qualquer ponto no plano dado, digamos $Q = (6, 0, 0)$. Se $P = (-2, 6, 3)$, então $V(\overrightarrow{PQ}) = \langle -8, 6, 3\rangle$. Se d for a distância do plano ao ponto P, segue pelo Exemplo 15.3.5 que

$$d = \frac{|N \cdot V(\overrightarrow{QP})|}{\|N\|} = \frac{|\langle 5, 11, 2\rangle \cdot \langle -8, 6, 3\rangle|}{\|\langle 5, 11, 2\rangle\|} = \frac{|-40 + 66 + 6|}{\sqrt{25 + 121 + 4}} = \frac{32}{\sqrt{150}} = \frac{16}{15}\sqrt{6}$$

27. Escolha um ponto no plano $8y - 6z - 27 = 0$, digamos $P = (0, 0, -\frac{9}{2})$, e um ponto no plano $4y - 3z - 6 = 0$, seja ele $Q = (0, 0, -2)$. $N = \langle 0, 4, -3\rangle$ é normal aos planos paralelos. Se d unidades for a distância entre os planos, então

$$d = \frac{|N \cdot V(\overrightarrow{QP})|}{\|N\|} = \frac{|\langle 0, 4, -3\rangle \cdot \langle 0, 0, \frac{5}{2}\rangle|}{\|\langle 0, 4, -3\rangle\|} = \frac{15/2}{5} = \frac{3}{2}$$

29. Escolha um ponto no plano $ax + by + cz + d_1 = 0$, seja ele $P = (0, 0, -d_1/c)$ e um ponto no plano $ax + by + cz + d_2 = 0$, digamos $Q = (0, 0, d_2/c)$. $N = \langle a, b, c\rangle$ é normal aos planos paralelos. Se d unidades for a distância entre os planos, então

$$d = \frac{|N \cdot V(\overrightarrow{QP})|}{\|N\|} = \frac{|\langle a, b, c\rangle \cdot \langle 0, 0, (d_1 - d_2)/c\rangle|}{\|\langle a, b, c\rangle\|} = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

EXERCÍCIOS 15.4 Retas em R^3

1-7. Seja L a reta pedida.

1. Seja $P_1 = (1, 2, 1)$ e $P_2 = (5, -1, 1)$. Então, $V(\overrightarrow{P_1P_2}) = \langle 4, -3, 0\rangle$ logo um conjunto de números direcionais de L é $[4, -3, 0]$. Escolhendo $P_0 = P_1$, obtemos as equações paramétricas $x = 1 + 4t$, $y = 2 - 3t$, $z = 1$. As equações simétricas de L são $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-3}$ e $z = 1$.

3. Desejamos encontrar equações paramétricas e simétricas para a reta L, que passem pela origem e sejam perpendiculares à reta $\frac{1}{4}(x - 10) = \frac{1}{3}y = \frac{1}{2}z = t$ em sua intersecção. Um conjunto de equações paramétricas para a reta dada é $x = 10 + 4t$, $y = 3t$, $z = 2t$. Seja $P = (4t + 10, 3t, 2t)$ na reta dada o ponto de intersecção. Como L contém a origem e as duas retas são perpendiculares, segue que os dois vetores $\langle 4, 3, 2\rangle$ e $V(\overrightarrow{OP}) = \langle 4t + 10, 3t, 2t\rangle$ são ortogonais . Portanto,

$$\langle 4, 3, 2\rangle \cdot \langle 4t + 10, 3t, 2t\rangle = 0; \quad 16t + 10 + 9t + 4t = 0; \quad t = -\frac{40}{29}; \quad P = \left(\frac{130}{29}, -\frac{120}{29}, -\frac{80}{29}\right).$$

Logo, $\left[\frac{130}{29}, -\frac{120}{29}, -\frac{80}{29}\right]$ é um conjunto de números direcionais de L, e, portanto, o conjunto proporcional $[13, -12, -8]$ também será. Portanto, as equações simétricas de L são $\frac{x}{13} = \frac{y}{-12} = \frac{z}{-8}$ e as equações paramétricas são $x = 13t$, $y = -12t$, $z = -8t$.

5. Seja $[a, b, c]$ um conjunto de números direcionais de L. Como L é perpendicular às retas com números direcionais $[-5, 1, 2]$ e $[2, -3, -4]$, então

$$\langle a, b, c\rangle \cdot \langle -5, 1, 2\rangle = 0; \quad -5a + b + 2c = 0; \quad b + 2c = 5a$$
$$\langle a, b, c\rangle \cdot \langle 2, -3, -4\rangle = 0; \quad 2a - 3b - 4c = 0; \quad 3b + 4c = 2a$$

Resolvendo para b e c, obtemos $b = -8a$, $c = \frac{13}{2}a$. Assim, $\left[a, -8a, \frac{13}{2}a\right]$ é um conjunto de números direcionais de L e, portanto, é o conjunto proporcional $[2, -16, 13]$. Como L contém o ponto $(-2, 0, 3)$, as equações paramétricas de L são $x = -2 + 2t$, $y = -16t$, $z = 3 + 13t$ e as equações simétricas são $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-16} = \frac{z-3}{13}$.

7. Um vetor normal ao plano $x + 3y - 6z - 8 = 0$ é $\langle 1, 3, -6\rangle$. Logo, um conjunto de números direcionais de L é $[1, 3, -6]$. Como $(4, -5, 20)$ está em L, um conjunto de equações paramétricas de L é $x = 4 + t$, $y = -5 + 3t$, $z = 20 - 6t$. As equações simétricas são $\frac{x-4}{1} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-20}{-6}$.

9. Desejamos encontrar equações simétricas para a reta $\begin{cases} 4x - 3y + z - 2 = 0 \\ 2x + 5y - 3z + 4 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 4x + z = 3y + 2 \\ 2x - 3z = -5y - 4 \end{cases}$.

Resolvendo simultaneamente y para x e z em termos de y, obtemos $x = \frac{2}{7}y + \frac{1}{7}$, $z = \frac{13}{7}y + \frac{10}{7}$.

Logo, as equa. simétricas são $\frac{x - \frac{1}{7}}{\frac{2}{7}} = y = \frac{z - \frac{10}{7}}{\frac{13}{7}}$; $\frac{x - \frac{1}{7}}{2} = \frac{y}{7} = \frac{z - \frac{10}{7}}{13}$; $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{7} = \frac{z-7}{13}$, subtraindo $\frac{3}{7}$.

11. A reta $\frac{1}{2}(x - 3) = \frac{1}{3}(y + 2) = \frac{1}{4}(z + 1) = t$ tem equações paramétricas $x = 3 + 2t$, $y = -2 + 3t$, $z = -1 + 4t$. Substituindo na equação do plano $x - 2y + z = 6$, obtemos a identidade $(3 + 2t) - 2(-2 + 3t) + (-1 + 4t) \equiv 6$. Portanto, a reta dada encontra-se no plano.

13. A reta dada tem equações $\begin{cases} 3x - 2y + 5z - 30 = 0 \\ 2x + 3y - 10z - 6 = 0 \end{cases}$.

Eliminando x entre as duas equações, obtemos $13y - 40z + 42 = 0$.

Eliminando y entre as duas equações, obtemos $13x - 5z - 102 = 0$.

Eliminando z entre as duas equações, obtemos $8x - y - 66 = 0$.

Essas são equações dos planos de projeção.

15. As equações da reta dada são $\begin{cases} x - 2y - 3z + 6 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$.

Eliminando x entre as duas equações, obtemos $3y + 4z - 7 = 0$.

Eliminando y entre as duas equações, obtemos $3x - z + 4 = 0$.

Eliminando z entre as duas equações, obtemos $4x + y + 3 = 0$.

Essas são equações dos planos de projeção.

17. Escolhendo y como parâmetro e as retas $x = 2y + 4$, $z = -y + 4$ e $x = y + 7$, $2z = y + 2$ temos as equações paramétricas $x = 2y + 4$, $y = y$, $z = -y + 4$ e $x = y + 7$, $y = y$, $z = \frac{1}{2}y + 1$. Logo, os vetores cujas representações são paralelas a essas retas são $\langle 2, 1, -1\rangle$ e $\langle 1, 1, \frac{1}{2}\rangle$. O ângulo θ entre os dois vetores é o ângulo entre as duas retas. Portanto,

$$\cos\theta = \frac{\langle 2, 1, -1\rangle \cdot \langle 1, 1, \frac{1}{2}\rangle}{\|\langle 2, 1, -1\rangle\| \cdot \|\langle 1, 1, \frac{1}{2}\rangle\|} = \frac{2 + 1 - \frac{1}{2}}{\sqrt{4 + 1 + 1}\sqrt{1 + 1 + \frac{1}{4}}} = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{6}(\frac{3}{2})} = \frac{5}{18}\sqrt{6}$$

19. Procuramos uma equação do plano C contendo as retas de intersecção com equações

$$\frac{x - 2}{4} = \frac{y + 3}{-1} = \frac{z + 2}{3} = t \quad \text{e} \quad \begin{cases} 3x + 2y + z + 2 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

As equações paramétricas da primeira reta são $x = 4t + 2$, $y = -t - 3$, $z = 3t - 2$. $t = 0$ dá o ponto $(2, -3, -2)$ que também pertence à segunda reta; $t = 1$ dá o ponto $(6, -4, 1)$ que não pertence a ela. Para qualquer valor de k, $(3x + 2y + z + 2) + k(x - y + 2z - 1) = 0$ é um plano contendo a segunda reta. Como C contém o ponto $(6, -4, 1)$ da segunda reta, temos $[3(6) + 2(-4) + 1 + 2] + k[6 - (-4) + 2(1) - 1] = 0$; $13 - 11k = 0$; $k = -\frac{13}{11}$. Logo, uma equação de C é $(3x + 2y + z + 2) - \frac{13}{11}(x - y + 2z - 1) = 0$; $4x + 7y - 3z + 7 = 0$.

21. As retas dadas têm equações $\begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 8x - 2y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x - 3y + z + 3 = 0 \\ 3x - y - z + 5 = 0 \end{cases}$.

Resolvendo as equações de cada reta para x e y em termos de z, obtemos as equações simétricas $\frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{y + \frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{z - 0}{1}$ e $\frac{x + \frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{y - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{z - 0}{1}$. Como $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1]$ é um conjunto de números direcionais para cada reta; as retas são paralelas. Para qualquer valor de K, $(8x - 2y - 3z + 1) + k(3x - y - z) = 0$ é um plano contendo a primeira reta. Como o plano pedido deve conter o ponto $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ da segunda reta, devemos ter

$$\left[8\left(-\frac{3}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{2}\right) - 3(0) + 1\right] + k\left[3\left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2} - 0\right] = 0; \quad -12 - 5k = 0; \quad k = -\frac{12}{5}$$

Logo, uma equação do plano é $(8x - 2y - 3z + 1) - \frac{12}{5}(3x - y - z) = 0$; $4x + 2y - 3z + 5 = 0$.

23. Desejamos encontrar um ponto de intersecção do plano $5x - y + 2z - 12 = 0$ e a reta $\frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-1}{7} = t$; $x = 4t + 2$, $y = -2t - 3$, $z = 7t + 1$. Substituindo na equação do plano, obtemos $5(4t + 2) - (-2t - 3) + 2(7t + 1) - 12 = 0$; $36t + = 0$; $t = -\frac{1}{12}$. O ponto de intersecção é $\left(-\frac{1}{3} + 2, \frac{1}{6} - 3, -\frac{7}{12} + 1\right) = \left(\frac{5}{3}, -\frac{17}{6}, \frac{5}{12}\right)$.

25. Como a reta L intercepta o eixo x, ela contém o ponto $(0, 0, z_0)$. Como o ponto $(3, 6, 4)$ também está em L, um conjunto de números direcionais de L é $[3, 6, 4 - z_0]$. Um vetor normal para o plano $x - 3y + 5z - 6 = 0$ é $\langle 1, -3, 5\rangle$. Como L é paralela a esse plano, $\langle 3, 6, 4 - z_0\rangle \cdot \langle 1, -3, 5\rangle = 0$; $3 - 18 + 5(4 - z_0) = 0$; $z_0 = 1$. Um conjunto de números direcionais de L é então $[3, 6, 3]$, e outro conjunto é $[1, 2, 1]$. Como $(3, 6, 4)$ está sobre L, as equações simétricas de L são $\frac{x-3}{1} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-4}{1}$.

27. As equações da reta são $x - 2z = 7$ e $y = 1$. Seja $z = t$. Um ponto sobre a reta é, então, $(2t + 7, 1, t)$. Sejam s unidades a distância de $(-1, 3, -1)$ a $(2t + 7, 1, t)$. Então,

$$s = \sqrt{(2t + 8)^2 + 4 + (t + 1)^2}; \quad D_t s = \frac{5t + 17}{\sqrt{(2t + 8)^2 + 4 + (t + 1)^2}}$$

Seja $D_t s = 0$, e obtemos $t = -\frac{17}{5}$. Como $D_t s < 0$ quando $t < -\frac{17}{5}$ e $D_t s > 0$ quando $t > -\frac{17}{5}$, segue que s tem um valor absoluto mínimo quando $t = -\frac{17}{5}$. Substituindo $t = -\frac{17}{5}$ na equação para s, obtemos $s = \sqrt{\left(-\frac{34}{5}\right)^2 + 4 + \left(-\frac{17}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{36}{25} + \frac{100}{25} + \frac{144}{25}} = \frac{1}{5}\sqrt{280} = \frac{2}{5}\sqrt{70}$.

29. As retas dadas são $\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-3} = t$ e $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+3}{2} = s$. Os dois conjuntos de números direcionais $[5, -2, -3]$ e $[1, -3, 2]$ não são proporcionais; logo, as retas não são paralelas. As equações paramétricas das retas são

$$x = 5t + 1, \quad y = -2t + 2, \quad z = -3t - 1 \quad \text{e} \quad x = s + 2, \quad y = -3s - 1, \quad z = 2s - 3$$

Se (x, y, z) for um ponto de intersecção, devemos ter

$$5t + 1 = s + 2, \quad -2t + 2 = -3s - 1, \quad -3t - 1 = 2s - 3$$

As duas primeiras equações têm a solução única $t = 0$ e $s = -1$. Esses valores não satisfazem a terceira equação, logo, as duas retas não se interceptam. Assim, elas são reversas.

31. Se os dois números direcionais a e b forem zero, então $x = x_0$ e $y = y_0$.

EXERCÍCIOS 15.5 Produto Vetorial

1-13. $\mathbf{A} = \langle 1, 2, 3\rangle$, $\mathbf{B} = \langle 4, -3, -1\rangle$, $\mathbf{C} = \langle -5, -3, 5\rangle$, $\mathbf{D} = \langle -2, 1, 6\rangle$, $\mathbf{E} = \langle 4, 0, -7\rangle$, $\mathbf{F} = \langle 0, 2, 1\rangle$

1. $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = [-2-(-9)]\mathbf{i} - (-1-12)\mathbf{j} + (-3-8)\mathbf{k} = \langle 7, 13, -11\rangle$

3. $(\mathbf{C}\times\mathbf{D})\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -5 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 0 & -7 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = [(-18-5)\mathbf{i} - (-30+10)\mathbf{j} + (-5-6)\mathbf{k}]\cdot(14\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k})$

$= \langle -23, 20, 11\rangle \cdot \langle 14, -4, 8\rangle = -322 - 80 - 88 = -490$

5. $-(\mathbf{B}\times\mathbf{A}) = -\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\langle -7, -13, 11\rangle = \langle 7, 13, -11\rangle = \mathbf{A}\times\mathbf{B}$, do resultado do Exercício 1.

7. Se $c = 3$, $(c\mathbf{A})\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (-6+27)\mathbf{i} - (-3-36)\mathbf{j} + (-9-24)\mathbf{k} = \langle 21, 39, -33\rangle$

$\mathbf{A}\times(c\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 12 & -9 & -3 \end{vmatrix} = (-6+27)\mathbf{i} - (-3-36)\mathbf{j} + (-9-24)\mathbf{k} = \langle 21, 39, -33\rangle$

9. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C} = \langle 1, 2, 3\rangle \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -3 & -1 \\ -5 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \langle 1, 2, 3\rangle\cdot\langle -15-3, -(20-5), -12-15\rangle = \langle 1, 2, 3\rangle\cdot\langle -18, -15, -27\rangle$

$= -18 - 30 - 81 = -129$. Do Exercício 1, $\mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{C} = \langle 7, 13, -11\rangle\cdot\langle -5, -3, 5\rangle = -36 - 39 - 55 = -129$

11. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\times(\mathbf{C}-\mathbf{D}) = (\langle 1, 2, 3\rangle + \langle 4, -3, -1\rangle)\times(\langle -5, -3, 5\rangle - \langle -2, 1, 6\rangle)$

$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & -1 & 2 \\ -3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = \langle 1+8, -(-5+6), -20-3\rangle = \langle 9, -1, -23\rangle$

$(\mathbf{D}-\mathbf{C})\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = (\langle -2, 1, 6\rangle - \langle -5, -3, 5\rangle)\times\langle 5, -1, 2\rangle$

$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \langle 8+1, -(6-5), -3-20\rangle = \langle 9, -1, -23\rangle$

13. Seja $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$. Então,

$\mathbf{0}\times\mathbf{A} = \langle 0, 0, 0\rangle \times \langle a_1, a_2, a_3\rangle = \langle 0\cdot a_3 - 0\cdot a_2, 0\cdot a_1 - 0\cdot a_3, 0\cdot a_2 - 0\cdot a_1\rangle = \langle 0, 0, 0\rangle = \mathbf{0}$

$\mathbf{A}\times\mathbf{0} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle \times \langle 0, 0, 0\rangle = \langle a_2\cdot 0 - a_3\cdot 0, a_3\cdot 0 - a_1\cdot 0, a_1\cdot 0 - a_2\cdot 0\rangle = \langle 0, 0, 0\rangle = \mathbf{0}$

15. $\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}$ e $\mathbf{B} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{5}{3\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{k}$. Como A e B são vetores unitários

(a) $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\|\mathbf{A}\times\mathbf{B}\|}{\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|} = \left\| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{5}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} \end{vmatrix} \right\| = \left\| -\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{k} \right\| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$

(b) $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \frac{1}{9} - \frac{5}{9} + \frac{1}{9} = -\frac{1}{3}$. Como $0 \le \theta \le \pi$, $\operatorname{sen}\theta = +\sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$

17. Seja $P = (1, -2, 3)$, $Q = (4, 3, -1)$, $R = (2, 2, 1)$, $S = (5, 7, -3)$. Como $\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) = \langle 3, 5, 4\rangle = \mathbf{V}(\overrightarrow{RS})$, **PQRS** é um paralelogramo. A medida da área de PQRS é

$$\|\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) \times \mathbf{V}(\overrightarrow{PR})\| = \left\|\begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 5 & -4 \\ 1 & 4 & -2 \end{matrix}\right\| = \|6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}\| = \sqrt{36 + 4 + 49} = \sqrt{89}$$

19. Seja $A = (0, 2, 2)$, $B = (8, 8, -2)$, $C = (9, 12, 6)$. A medida da área do triângulo ABC é

$$\tfrac{1}{2}\|\mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) \times \mathbf{V}(\overrightarrow{BC})\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 5 & -4 \\ 1 & 4 & -2 \end{matrix}\right\| = \tfrac{1}{2}\|\langle 64, -68, 26\rangle\| = \|\langle 32, -34, 13\rangle\| = \sqrt{1024 + 1156 + 169} = \sqrt{2349} = 9\sqrt{29}$$

21. Seja $A = (-2, 2, 2)$, $B = (-8, 1, 6)$, $C = (3, 4, -1)$. Um vetor normal para o plano de A, B, C, é

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) \times \mathbf{V}(\overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -6 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \langle -5, 2, -7\rangle.$$ Como o ponto A está no plano, uma equação é

$$-5(x + 2) + 2(y - 2) - 7(z - 2) = 0;\quad 5x - 2y + 7z = 0$$

23. Os planos dados $x - y + z = 0$ e $2x + y - 4z - 5 = 0$ têm vetores normais $\mathbf{A} = \langle 1, -1, 1\rangle$ e $\mathbf{B} = \langle 2, 1, -4\rangle$. O plano pedido C tem um vetor normal ortogonal a eles. Tal vetor é

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \langle 3, 6, 3\rangle.$$ Como C contém o ponto $(4, 0, -2)$, uma equação é

$$3(x - 4) + 6(y - 0) + 3(z + 2) = 0;\quad 3x + 6y + 3z - 6 = 0;\quad x + 2y + z - 2 = 0$$

25. $P = (5, 2, -1)$, $Q = 2, 4, -2)$, $R = (11, 1, 4)$. Um vetor normal ao plano de P, Q, e R é

$$\mathbf{N} = \mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) \times \mathbf{V}(\overrightarrow{PR}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 9\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 9\mathbf{k};\quad \|\mathbf{N}\| = 9\|\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}\| = 9\sqrt{1 + \ + 1} = 9\sqrt{3}$$

Então, os vetores unitários normais são $\pm\dfrac{1}{9\sqrt{3}}(9\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 9\mathbf{k}) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})$.

27. $P = (1, 4, 2)$, $Q = (3, 2, 4)$, $R = (4, 3, 1)$. Um vetor normal ao plano de P, Q e R é

$$\mathbf{N} = \mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) \times \mathbf{V}(\overrightarrow{PR}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 4\mathbf{k};\quad \|\mathbf{N}\| = 4\|\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}\| = 4\sqrt{1 + 4 + 1} = 4\sqrt{6}$$

Logo, os vetores unitários normais são $\pm\dfrac{1}{4\sqrt{6}}(4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$.

29. Seja $A = V(\overrightarrow{PQ}) = i + 3j + 2k$, $B = V(\overrightarrow{PR}) = 2i + j - k$, $C = V(\overrightarrow{PS}) = i - 2j + k$. A medida do volume do paralelepípedo PQRS é

$$|A \times B \cdot C| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot C \right| = |(-5i + 5j - 5k) \cdot (i - 2j + k)| = |-5 - 10 - 5| = 20$$

31. As retas dadas são $\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{2}$ e $\frac{x+2}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-3}$. Um vetor normal a elas é

$$N = \langle 5, 3, 2\rangle \times \langle 4, 2, -3\rangle = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \langle -13, 23, -2\rangle. \quad \|N\| = \sqrt{169 + 529 + 4} = \sqrt{702} = 3\sqrt{78}$$

$A = (1, 2, -1)$ é um ponto da primeira reta e $B = (-2, -1, 3)$ é um ponto da segunda.

A medida da distância entre as retas é a projeção escalar de $V(\overrightarrow{AB})$ em N

$$= \left| \frac{V(\overrightarrow{AB}) \cdot N}{\|N\|} \right| = \left| \frac{\langle -3, -3, 4\rangle \cdot \langle -13, 23, -2\rangle}{3\sqrt{78}} \right| = \frac{38}{3\sqrt{78}}$$

33. $A = V(\overrightarrow{OP})$, $B = V(\overrightarrow{OQ})$, e $C = V(\overrightarrow{OR})$. Então, $V(\overrightarrow{PQ}) = B - A$ e $V(\overrightarrow{PR}) = C - A$. Um vetor normal ao plano de P, e R é $V(\overrightarrow{PQ}) \times V(\overrightarrow{PR})$

$$= (B - A) \times (C - A) = (B - A) \times C - (B - A) \times A = B \times C - A \times C - B \times A + A \times A = B \times C + C \times A + A \times B$$

35-37. Seja $A = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, $B = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$, e $C = \langle c_1, c_2, c_3\rangle$

35. $A \times (B + C) = \langle a_1, a_2, a_3\rangle \times \langle b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3\rangle$

$$= \langle a_2(b_3 + c_3) - a_3(b_2 + c_2), a_3(b_1 + c_1) - a_1(b_3 + c_3), a_1(b_2 + c_2) - a_2(b_1 + c_1)\rangle$$

$$= \langle a_2b_3 - a_3b_2 + a_2c_3 - a_3c_2, a_3b_1 + a_3c_1 - a_1b_3 + a_1c_3, a_1b_2 + a_1c_2 - a_2b_1 + a_2c_1\rangle$$

$$= \langle a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1\rangle + \langle a_2c_3 - a_3c_2, a_3c_1 - a_1c_3, a_1c_2 - a_2c_1\rangle$$

$$= (A \times B) + (A \times C)$$

37. $A \cdot B \times C = \langle a_1, a_2, a_3\rangle \cdot \langle b_1, b_2, b_3\rangle \times \langle c_1, c_2, c_3\rangle = \langle a_1, a_2, a_3\rangle \cdot \langle b_2c_3 - b_3c_2, b_3c_1 - b_1c_3, b_1c_2 - b_2c_1\rangle$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$A \times B \cdot C = \langle a_1, a_2, a_3\rangle \times \langle b_1, b_2, b_3\rangle \cdot \langle c_1, c_2, c_3\rangle = \langle a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1\rangle \cdot \langle c_1, c_2, c_3\rangle$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) = A \cdot B \times C$$

39. $A = V(\overrightarrow{OP})$, $B = V(\overrightarrow{OQ})$, $C = V(\overrightarrow{OR})$. A área do triângulo PQR é metade da área de um paralelogramo com $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$ como lados adjacentes $= \frac{1}{2}\|V(\overrightarrow{PR}) \times V(\overrightarrow{PQ})\| = \frac{1}{2}\|(B - A) \times (C - A)\|$.

EXERCÍCIOS 15.6 Cilindros e Superfícies de Revolução

1. A secção transversal do cilindro $4x^2 + y^2 = 16$ no plano xy é a elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$.

3. A secção transversal do cilindro $z = e^x$ no plano xz é o gráfico da função exponencial.

5. O cilindro $4x^2 + 9y^2$ tem suas determinantes paralelas ao eixo z, e a diretriz no plano xy é a elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

7. O cilindro $y = |z|$ tem suas determinantes paralelas ao eixo x, e a diretriz no plano yz consiste em duas retas $y = z$ e $y = -z$.

9. O cilindro $z = 2x^2$ tem suas determinantes paralelas ao eixo y, e sua diretriz no plano xz é a parábola $x^2 = \frac{1}{2}z$.

11. O cilindro $y = \cosh x$ tem suas determinantes paralelas ao eixo z, e a diretriz no plano xy é o gráfico da função co-seno hiperbólico.

13-19. S é a superfície de revolução pedida.

13. Se a curva $x^2 = 4y$ no plano xy girar em torno do eixo y, S terá a equação

$$(\pm\sqrt{x^2 + z^2})^2 = 4y; \quad x^2 + z^2 = 4y$$

15. A curva $x^2 + 4z^2 = 16$ no plano xy gira em torno do eixo x. S tem a equação.

$$x^2 + 4(\pm\sqrt{y^2 + z^2})^2 = 16; \quad x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16$$

17. Se a curva $y = 3z$ no plano yz for rotacionada em torno do eixo y, S terá a equação

$$y = \pm 3\sqrt{x^2 + z^2}; \quad y^2 = 9x^2 + 9z^2$$

19. Se a curva $y = \operatorname{sen} x$ no plano xy girar em torno do eixo x, s terá a equação

$$(\pm\sqrt{y^2 + z^2}) = \operatorname{sen} x; \quad y^2 + z^2 = \operatorname{sen}^2 x$$

21. A esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ pode ser obtida como uma superfície de revolução de seis formas
girando $x^2 + y^2 = 16$ no plano xy em torno do eixo x ou do eixo y,
girando $x^2 + z^2 = 16$ no plano xz em torno do eixo x ou do eixo z e
girando $y^2 + z^2 = 16$ no plano yz em torno do eixo y ou do eixo z.

23. A equação $x^2 + y^2 - z^2 = 4$; $x^2 + y^2 = 4 + z^2$ tem o eixo z como seu eixo de revolução e como uma curva $x^2 = z^2 + 4$ no plano xz ou $y^2 = z^2 + 4$ no plano yz.

25-27. O gráfico da segunda forma de cada resposta é metade da primeira, mas ainda assim, gera a superfície inteira.

25. A equação $x^2 + z^2 = |y|$ tem o eixo y como seu eixo de revolução e como uma curva gerando $x^2 = |y|$; $x = \sqrt{|y|}$ no plano xy ou $z^2 = |y|$; $z = \sqrt{|y|}$ no plano yz.

27. A equação $x^2 + z^2 = \frac{1}{9}y^2$ tem o eixo y como seu eixo de revolução e como uma curva gerando $x^2 = \frac{1}{9}y^2$; $y = 3x$ no plano xy ou $z^2 = \frac{1}{9}y^2$; $y = 3z$ no plano yz.

EXERCÍCIOS 15.7 Superfícies Quádricas

1. $9x^2 - 4y^2 + 36z^2 = 36$; $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{1} = 1$ tem a forma da equação 15.7.2. Portanto, a superfície é um hiperbolóide elíptico de uma folha. Seu eixo é o eixo y.

3. $5x^2 - 2z^2 - 3y = 0$; $\frac{x^2}{6} - \frac{z^2}{15} = \frac{y}{10}$ tem a forma da equação 15.7.5. Portanto, a superfície é um parabolóide hiperbólico. Seu eixo é o eixo y.

5. $4y^2 - 25x^2 = 100$ é uma equação de um cilindro hiperbólico tendo como diretriz a hipérbole $4y^2 - 25x^2 = 100$ no plano xy e determinantes paralelas ao eixo z.

7. $4x^2 + 9y^2 + z^2 = 36$; $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{36} = 1$ tem a forma da equação 15.7.1. Portanto, a superfície é um elipsóide.

9. $4x^2 + 9y^2 - z^2 = 36$; $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = 1$ tem a forma da equação 15.7.2. Portanto, a superfície é um hiperbolóide elíptico de uma folha, cujo eixo é x.

11. $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ tem a forma da equação 15.7.6. Logo, a superfície é um cone elíptico cujo eixo é o eixo y.

13. $\frac{x^2}{36} + \frac{z^2}{25} = 4y$ tem a forma da equação 15.7.4. Assim, a superfície é um parabolóide elíptico cujo eixo é y.

15. $\frac{x^2}{36} - \frac{z^2}{25} = 9y$ tem a forma da equação 15.7.5. Portanto, a superfície é um parabolóide hiperbólico cujo eixo é y.

17. $x^2 + 16z^2 = 4y^2 - 1$; $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{16} - \frac{z^2}{1} = 1$ tem a forma da equação 15.7.3. Logo, a superfície é um hiperbolóide elíptico de duas folhas, cujo eixo é y.

19. Substituindo a equação $x = 1 - ky$ do plano na equação $y^2 - x^2 - z^2 = 1$ do hiperbolóide, obtemos a projeção da intersecção do plano xy:

$$y^2 - (1 - ky)^2 - z^2 = 1; \quad (k^2 - 1)y^2 - 2ky + z^2 = -2$$

(a) A intersecção será uma elipse se sua projeção assim o for; isto é, se $k^2 - 1 > 0$. Então, uma equação equivalente será $(k^2 - 1)\left[y^2 - \frac{2k}{k^2 - 1}y + \frac{k^2}{(k^2 - 1)^2}\right] + z^2 = \frac{k^2}{k^2 - 1} - 2$. Esse gráfico terá pontos reais se $\frac{k^2}{k^2 - 1} - 2 > 0$; $k^2 > 2k^2 - 2$; $k^2 < 2$; $|k| < \sqrt{2}$. Logo, a intersecção é uma elipse se $1 < |k| < \sqrt{2}$. Se $|k| = 1$ será uma parábola se $|k| = \sqrt{2}$, será um ponto. Se $|k| > \sqrt{2}$, a intersecção inexiste.

(b) A intersecção é uma hipérbole se $k^2 - 1 < 0$; $k^2 < 1$; $|k| < 1$.

21. Substituindo a equação do plano $x = 1$ na equação do parabolóide hiperbólico $\frac{z^2}{4} - \frac{x^2}{9} = \frac{y}{3}$, obtemos $\frac{z^2}{4} - \frac{1}{9} = \frac{y}{3}$; $z^2 = 4\left(\frac{1}{3}\right)\left(y + \frac{1}{3}\right)$. Como $x = 1$ é paralela à projeção, encontramos o vértice em $(1, -\frac{1}{3}, 0)$. O eixo é paralelo ao eixo y e a parábola abre-se na direção do lado positivo do eixo y. $p = \frac{1}{3}$, logo, o foco está em $(1, 0, 0)$.

23. Qualquer ponto em $x^2 - 4y^2 - 9z^2 = 36$; $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 5x^2 - 5z^2 - 36 = 5(x + z)(x - z) - 36$ e um plano da forma $x + z = k$ deve estar sobre a esfera $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 5k(x - y)$, e a intersecção entre um plano e uma esfera é uma circunf. . O mesmo ocorre para o plano $x - z = k$.

25. O elipsóide é $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$; $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 - x^2$. Uma secção plana do elipsóide em $x = \xi_i$, $0 \le \xi_i \le 1$, é uma região encerrada por uma elipse cujos semi-eixos têm comprimentos $2\sqrt{1 - \xi_i^2}$ e $3\sqrt{1 - \xi_i^2}$. Portanto, se V unidades cúbicas for o volume do elipsóide

$$V = 2 \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi(2\sqrt{1 - \xi_i^2})(3\sqrt{1 - \xi_i^2})\Delta_i x = 12\pi\int_0^1 (1 - x^2)\,dx = 12\pi\left[1 - \frac{1}{3}y^3\right]_0^1 = 12\pi\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 8\pi$$

27. O parabolóide elíptico é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$ $(c > 0)$. Uma secção plana da superfície em $z = \xi_i$, $0 \le \xi_i \le h$, é uma elipse com semi-eixos de comprimentos $a\sqrt{\frac{\xi_i}{c}}$ e $b\sqrt{\frac{\xi_i}{c}}$. Se V unidades cúbicas for o volume do sólido, $V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi\left(a\sqrt{\frac{\xi_i}{c}}\right)\left(b\sqrt{\frac{\xi_i}{c}}\right)\Delta_i z = \frac{\pi ab}{c}\int_0^h z\,dz = \frac{\pi ab}{c}\left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^h = \frac{abh^2}{2c}\pi$

EXERCÍCIOS 15.8 Curvas em R^3

1. $R(t) = (t + 1)i - t^2 j + (1 - 2t)k$; $D_t R(t) = i - 2tj - 2k$

$\|D_t R(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2 + 4} = \sqrt{5 + 4t^2}$; $T(t) = \frac{D_t R(t)}{\|D_t R(t)\|} = \frac{i - 2tj - 2k}{\sqrt{5 + 4t^2}}$

3. $R(t) = e^t \cos t\, i + e^t \operatorname{sen} t\, j + e^t k$; $D_t R(t) = (e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)i + (e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t)j = e^t k$

$\|D_t R(t)\| = e^t\sqrt{(\cos t - \operatorname{sen} t)^2 + (\operatorname{sen} t + \cos t)^2 + 1} = e^t\sqrt{2(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) + 1} = \sqrt{3}e^t$

$T(t) = \frac{D_t R(t)}{\|D_t R(t)\|} = \frac{1}{3}\sqrt{3}[(\cos t - \operatorname{sen} t)i + (\operatorname{sen} t + \cos t)j + k]$

5. $R(t) = 2t \cos t\, i + 5tj + 2t \operatorname{sen} t\, k$. $D_t R(t) = (2\cos t - 2t\operatorname{sen} t)i + 5j + (2\operatorname{sen} t + 2t\cos t)k$

$\|D_t R(t)\| = \sqrt{(2\cos t - 2t\operatorname{sen} t)^2 + 25 + (2\operatorname{sen} t + 2t\cos t)^2}$

$= \sqrt{4\cos^2 t - 8t\operatorname{sen} t\cos t + 4t^2\operatorname{sen}^2 t + 25 + 4\operatorname{sen}^2 t + 4t\operatorname{sen} t\cos t + 4t^2\cos^2 t}$

$= \sqrt{4(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) + 4t^2(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t) + 25} = \sqrt{4t^2 + 29}$

$T(t) = \frac{D_t R(t)}{\|D_t R(t)\|} = (4t^2 + 29)^{-1/2}[2(\cos t - t\operatorname{sen} t)i + 5j + 2(\operatorname{sen} t + t\cos t)k]$

7. Se L unidades for o comprimento de arco da curva do Exercício 1 de - 1 a 2, então

$$L = \int_{-1}^{2} \|D_tR(t)\|dt = \int_{-1}^{2}\sqrt{5+4t^2}dt = 2\int_{-1}^{2}\sqrt{t^2+\tfrac{5}{4}}dt = 2\left[\frac{t}{2}\sqrt{t^2+\tfrac{5}{4}} + \frac{5}{8}\ln\left|t+\sqrt{t^2+\tfrac{5}{4}}\right|\right]_{-1}^{2}$$

$$= 2\left(\sqrt{4+\tfrac{5}{4}} + \tfrac{5}{8}\ln\left|2+\sqrt{5+\tfrac{5}{4}}\right|\right) - 2\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\tfrac{5}{4}} + \tfrac{5}{8}\ln\left|-1+\sqrt{1+\tfrac{5}{4}}\right|\right)$$

$$= \sqrt{21} + \tfrac{5}{4}\ln(2+\tfrac{1}{2}\sqrt{21}) + \tfrac{3}{2} - \tfrac{5}{4}\ln\tfrac{1}{2} = \sqrt{21} + \tfrac{3}{2} + \tfrac{5}{4}\ln(4+\sqrt{21})$$

9. Se L unidades for o comprimento de arco da curva do Exercício 3, de 0 a 3, então

$$L = \int_{0}^{3}\|D_tR(t)\|dt = \int_{0}^{3}\sqrt{3}e^t dt = \sqrt{3}e^t\Big]_{0}^{3} = \sqrt{3}(e^3-1)$$

11. $R(t) = 4t^{3/2}i - 3\,\text{sen}\,t\,j + 3\cos t\,k$. $D_tR(t) = 6t^{1/2}i - 3\cos t\,j - 3\,\text{sen}\,t\,k$

$\|D_tR(t)\| = \sqrt{36t + 9\cos^2 t + 9\,\text{sen}^2 t} = \sqrt{36t+9} = 3\sqrt{4t+1}$

Se L unidades for o comprimento de arco da curva de 0 a 2, então

$$L = \int_{0}^{2}\|D_tR(t)\|dt = \int_{0}^{2}3\sqrt{4t+1}\,dt = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}(4t+1)^{3/2}\Big]_{0}^{2} = \frac{1}{2}(27-1) = 13$$

13. $R(t) = f_1(t)i + f_2(t)j + f_3(t)k$

$$R'(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{R(t+\Delta t)-R(t)}{\Delta t}\right]$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{[f_1(t+\Delta t)i + f_2(t+\Delta t)j + f_3(t+\Delta t)k] - [f_1(t)i + f_2(t)j + f_3(t)k]}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{f_1(t+\Delta t)-f_1(t)}{\Delta t}\right]i + \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{f_2(t+\Delta t)-f_2(t)}{\Delta t}\right]j + \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{f_3(t+\Delta t)-f_3(t)}{\Delta t}\right]k$$

$$= f_1'(t)i + f_2'(t)j + f_3'(t)k$$

15. Um conjunto de equações paramétricas da curva de intersecção das superfícies $y = e^x$ e $z = xy$ é $x = t$, $y = e^t$, $z = te^t$. Uma equação vetorial da curva é . $R(t) = ti + e^tj + te^tk$.

17. $R(t) = \cos 2t\,i - 3t\,j + 2\,\text{sen}\,2t\,k$. $D_tR(t) = -2\,\text{sen}\,2t\,i - 3j + 4\cos 2t\,k$; $D_tR(\pi) = -3j + 4k$.

$\|D_tR(\pi)\| = \sqrt{9+16} = 5$. $T(\pi) = \dfrac{D_tR(\pi)}{\|D_tR(\pi)\|} = -\dfrac{3}{5}j + \dfrac{4}{5}k$. Assim, $\cos\beta = -\dfrac{3}{5}$.

19. $R(t) = ti + t^2j + t^3k$. $D_tR(t) = i + 2tj + 3t^3k$; $\|D_tR(t)\| = \sqrt{1+4t^2+9t^4}$.

$T(t) = \dfrac{D_tR(t)}{\|D_tR(t)\|} = \dfrac{i + 2tj + 3t^3k}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}$; $D_tT(t) = \dfrac{(2j+6tk)(1+4t^2+9t^4) - \frac{1}{2}(i+2tj+3t^2k)(8t+36t^3)}{(1+4t^2+9t^4)^{3/2}}$

$T(1) = \dfrac{i+2j+3k}{\sqrt{14}}$. $D_tT(1) = (14)^{-3/2}[(2j+6k)14 - (i+2j+3k)22] = (14)^{-3/2}(-22i - 16j + 18k)$

$\|D_tT(1)\| = 2(14)^{-3/2}\sqrt{121+64+81} = 2(14)^{-3/2}\sqrt{266}$. $K(1) = \dfrac{\|D_tT(1)\|}{\|D_tR(1)\|} = \dfrac{2(14)^{-3/2}}{(14)^{1/2}}\sqrt{266} = \dfrac{1}{98}\sqrt{266}$.

$N(1) = \dfrac{D_tT(1)}{\|D_tT(1)\|} = \dfrac{2(14)^{-3/2}(-11i - 8j + 9k)}{2(14)^{-3/2}\sqrt{266}} = -\dfrac{11}{266}\sqrt{266}\,i - \dfrac{4}{133}\sqrt{266}\,j + \dfrac{9}{266}\sqrt{266}\,k$

$$B(1) = T(1)\times N(1) = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{266}}\right)\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ -11 & -8 & 9\end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}\sqrt{14}\sqrt{19}}(42i - 42j + 14k) = \frac{\sqrt{19}}{19}(3i - 3j + k)$$

21. Continuando o Exercício 1, $T(-1) = \frac{i + 2j - 2k}{\sqrt{5+4}} = \frac{i + 2j - 2k}{3}$.

$D_tT(t) = \frac{(-2j)(5 + 4t^2) - \frac{1}{2}(i - 2tj - 2k)(8t)}{(5 + 4t^2)^{3/2}} = \frac{-4ti - 10j + 8tk}{(5 + 4t^2)^{3/2}}$.

$D_tT(-1) = \frac{4i - 10j - 8k}{(5+4)^{3/2}} = \frac{2}{27}(2i - 5j - 4k)$; $\|D_tT(-1)\| = \frac{2}{27}\sqrt{4 + 25 + 16} = \frac{2}{27}\sqrt{45}$

$N(-1) = \frac{D_tT(-1)}{\|D_tT(-1)\|} = \frac{1}{\sqrt{45}}(2i - 5j - 4k) = \frac{1}{15}\sqrt{5}(2i - 5j - 4k)$

$B(-1) = T(-1) \times N(-1) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{15}\sqrt{5}\right)\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \end{vmatrix} = \frac{1}{45}\sqrt{5}(-18i + 0j - 9k) = -\frac{1}{5}\sqrt{5}(2i + k)$

$\|D_tR(-1)\| = \sqrt{5+4} = 3$. $K(-1) = \frac{\|D_tT(-1)\|}{\|D_tR(-1)\|} = \left(\frac{1}{3}\right)\frac{2}{27}\sqrt{45} = \frac{2}{27}\sqrt{5}$

23. Continuando o Ex. 3, $T(0) = \frac{1}{3}\sqrt{3}(i + j + k)$. $D_tT(t) = \frac{1}{3}\sqrt{3}[(-\text{sen}\,t - \cos t)i + (\cos t - \text{sen}\,t)j]$

$D_tT(0) = \frac{1}{3}\sqrt{3}(-i + j)$; $\|D_tT(0)\| = \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{2}$; $N(0) = \frac{D_tT(0)}{\|D_tT(0)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i + j) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}(i - j)$.

$B(0) = T(0) \times N(0) = (\frac{1}{3}\sqrt{3})(-\frac{1}{2}\sqrt{2})\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{6}\sqrt{6}(i + j - 2k)$

$\|D_tR(0)\| = \sqrt{3}$. $K(0) = \frac{\|D_tT(0)\|}{\|D_tR(0)\|} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{2}$

25. $R(t) = a\cos t\,i + a\,\text{sen}\,t\,j + tk$. $V(t) = -a\,\text{sen}\,t\,i + a\cos t\,j + k$; $A(t) = -a\cos t\,i - a\,\text{sen}\,t\,j$.

$V(\frac{1}{2}\pi) = -ai + k$. $A(\frac{1}{2}\pi) = -aj$. $\|V(\frac{1}{2}\pi)\| = \sqrt{a^2 + 1}$.

27. $x = e^{2t}$, $y = e^{-2t}$, $z = te^{2t}$. $R(t) = e^{2t}i + e^{-2t}j + te^{2t}k$. $V(t) = 2e^{2t}i - 2e^{-2t}j + e^{2t}(2t + 1)k$.

$V(1) = 2e^2i - 2e^{-2}j + 3e^2k$. $A(t) = 4e^{2t}i + 4e^{-2t}j + e^{2t}(4t + 4)k$; $A(1) = 4e^2i + 4e^{-2}j + 8e^2k$.

$\|V(1)\| = \sqrt{4e^4 + 4e^{-4} + 9e^4} = \sqrt{13e^4 + 4e^{-4}}$

29. $D_tR(t) = \|D_tR(t)\|T(t)$, $D_t^2R(t) = A(t)$, $D_ts = \|D_tR(t)\|$. Portanto, da equação 14.9.10,

$$D_tR(t) \times D_t^2R(t) = \|D_t^2R(t)\|T(t) \times [(D_t^2s)T(t) + \|D_tR(t)\|^2K(t)N(t)]$$
$$= \|D_tR(t)\|(D_t^2s)[T(t) \times T(t)] + \|D_tR(t)\|^3K(t)[T(t) \times N(t)]$$
$$= 0 + \|D_tR(t)\|^3K(t)B(t)$$

$B(t)$ é um vetor unitário, logo $\|D_tR(t) \times D_t^2R(t)\| = \|D_tR(t)\|^3K(t)$; $K(t) = \frac{\|D_tR(t) \times D_t^2R(t)\|}{\|D_tR(t)\|^3}$.

31. $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$. $R(t) = ti + t^2j + t^3k$. Da solução do Exercício 19.

$$D_tT(0) = 2j;\quad \|D_tR(0) = 1\|;\quad K(0) = \frac{\|D_tT(0)\|}{\|D_tR(0)\|} = \frac{2}{1} = 2$$

33. $[K(t)]^2 = \|D_sT(t)\|^2 = D_sT(t)\cdot D_sT(t)$ e pelo Teorema 14.6.3, $T(t) = D_sR(t)$. Como $T(t)$ é um vetor unitário, $0 = T(t)\cdot D_sT(t)$. Portanto,

$$0 = D_s[T(t)\cdot D_sT(t)] = D_sT(t)\cdot D_sT(t) + T(t)\cdot D_s^2T(t) = [K(t)]^2 + D_sR(t)\cdot D_s^3R(t)$$

Logo, $D_sR(t)\cdot D_s^3R(t) = -[K(t)]^3$.

35. Se $\|V(t)\| = K$ então $V(t)\cdot V(t) = K^2$. Diferenciando ambos os membros em relação a t, obtemos $2V(t)\cdot V'(t) = 0$; $2V(t)\cdot A(t) = 0$; $V(t)\cdot A(t) = 0$. Logo, $V(t)$ e $A(t)$ são ortogonais.

EXERCÍCIOS 15.9 Coordenadas Cilíndricas e Esféricas

As coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas de um ponto P serão denotadas por $P_{cartesiana}$, $P_{cilíndrica}$, e $P_{esférica}$.

1. (a) $P_{cilín.} = (3, \frac{1}{2}\pi, 5)$. Então, $x = 3\cos\frac{1}{2}\pi = 0$, $y = 3\,\text{sen}\,\frac{1}{2}\pi = 3$, $z = 5$. $P_{cartes.} = (0, 3, 5)$.

   (b) $P_{cilín.} = (7, \frac{2}{3}\pi, -4)$. $x = 7\cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{7}{2}$, $y = 7\,\text{sen}\,\frac{2}{3}\pi = \frac{7}{2}\sqrt{3}$, $z = -4$. $P_{cartes.} = (-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\sqrt{3}, -4)$.

   (c) $P_{cilín.} = (1, 1, 1)$. $x = 1\cos 1 = \cos 1$, $y = 1\,\text{sen}\,1 = \text{sen}\,1$, $z = 1$. $P_{cartes.} = (\cos 1, \text{sen}\,1, 1)$.

3. (a) $P_{esfér.} = (4, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi)$. Então, $x = 4\,\text{sen}\,\frac{1}{4}\pi\cos\frac{1}{6}\pi = 4(\frac{1}{2}\sqrt{2})(\frac{1}{2}\sqrt{3}) = \sqrt{6}$,

   $y = 4\,\text{sen}\,\frac{1}{4}\pi\,\text{sen}\,\frac{1}{6}\pi = 4(\sqrt{2})(\frac{1}{2}) = \sqrt{2}$, $z = 4\cos\frac{1}{4}\pi = 4(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$. $P_{cartes.} = (\sqrt{6}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

   (b) $P_{esfér.} = (4, \frac{1}{2}\pi, \frac{1}{3}\pi)$. Então, $x = 4\,\text{sen}\,\frac{1}{3}\pi\cos\frac{1}{2}\pi = 4(\frac{1}{2}\sqrt{3})(0) = 0$,

   $y = 4\,\text{sen}\,\frac{1}{3}\pi\,\text{sen}\,\frac{1}{2}\pi = 4(\frac{1}{2}\sqrt{3})(1) = 2\sqrt{3}$, $z = 4\cos\frac{1}{3}\pi = 4(\frac{1}{2}) = 2$. $P_{cartes.} = (0, 2\sqrt{3}, 2)$.

   (c) $P_{esfér.} = (\sqrt{6}, \frac{1}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi)$. Então, $x = \sqrt{6}\,\text{sen}\,\frac{3}{4}\pi\cos\frac{1}{3}\pi = \sqrt{6}(\frac{1}{2}\sqrt{2})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$,

   $y = \sqrt{6}\,\text{sen}\,\frac{3}{4}\pi\,\text{sen}\,\frac{1}{3}\pi = \sqrt{6}(\frac{1}{2}\sqrt{2})(\frac{1}{2}\sqrt{3}) = \frac{3}{2}$, $z = \sqrt{6}\cos\frac{3}{4}\pi = \sqrt{6}(-\frac{1}{2}\sqrt{2}) = -\sqrt{3}$. $P_{cartes.} = (\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2}, -\sqrt{3})$

5. Da Figura 15.9.10, $r = OQ = \rho\,\text{sen}\,\phi$. (a) $P_{esfér.} = (4, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi)$.

   $r = 4\,\text{sen}\,\frac{5}{6}\pi = 4(\frac{1}{2}) = 2$, $\theta = \frac{2}{3}\pi$, $z = 4\cos\frac{5}{6}\pi = 4(-\frac{1}{2}\sqrt{3}) = -2\sqrt{3}$. $P_{cilín.} = (2, \frac{2}{3}\pi, -2\sqrt{3})$.

   (b) $P_{esfér.} = (\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi, \pi)$. Então,

   $r = \sqrt{2}\,\text{sen}\,\pi = \sqrt{2}(0) = 0$, $\theta = \frac{3}{4}\pi$, $z = \sqrt{2}\cos\pi = \sqrt{2}(-1) = -\sqrt{2}$. $P_{cilín.} = (0, \frac{3}{4}\pi, -\sqrt{2})$.

   (c) $P_{esfér.} = (2\sqrt{3}, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{4}\pi)$. Então,

   $r = 2\sqrt{3}\,\text{sen}\,\frac{1}{4}\pi = 2\sqrt{3}(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = \sqrt{6}$, $\theta = \frac{1}{3}\pi$, $z = 2\sqrt{3}\cos\frac{1}{4}\pi = 2\sqrt{3}(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = \sqrt{6}$. $P_{cilín.} = (\sqrt{6}, \frac{1}{3}\pi, \sqrt{6})$.

A equação cartesiana cilíndrica e esférica de uma superfície S será denotada por $S_{cartesiana}$, $S_{cilíndrica}$ e $S_{esférica}$.

7. $S_{cartes.}$ é $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$. S é um elipsóide. Como se $x^2 + y^2 = r^2$, $S_{cilíndr.}$ é

$$r^2 + 4z^2 = 16$$

9. $S_{cartes.}$ é $x^2 + y^2 = 3z$. S é um parabolóide elíptico. Como $x^2 + y^2 = r^2$, $S_{cilíndr.}$ é

$$r^2 = 3z$$

11. $S_{cartes.}$ é $x^2 - y^2 = 3z^2$. S é um cone elíptico . Como $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$,

    $S_{cilín.}$ é $r^2\cos^2\theta - r^2\text{sen}^2\theta = 3z^2$; $r^2(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) = 3z^2$; $r^2\cos 2\theta = 3z^2$.

13. $S_{cartes.}$ é $x^2 + y^2 + z^2 - 9z = 0$. S é uma esfera. Como $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ e $z = \rho\cos\phi$,

    $S_{esfér.}$ é $\rho^2 - 9\rho\cos\phi = 0$; $\rho = 9\cos\phi$. A origem não é perdida ao desprezarmos o fator ρ.

15. $S_{cartes.}$ é $x^2 + y^2 = 9$. S é um cilindro circular reto. Como $x^2 + y^2 = r^2 = (\rho\,\text{sen}\,\phi)^2$,

    $S_{esfér.}$ é $(\rho\,\text{sen}\,\phi)^2 = 9$; $\rho\,\text{sen}\,\phi = 3$.

17. S cartes. é $x^2 + y^2 + z^2 - 8x = 0$. S é uma esfera. Como $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ e $x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta$, S esfér. é $\rho^2 - 8\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta$; $\rho = 8 \operatorname{sen} \phi \cos \theta$. A origem não é perdida ao desprezarmos o fator ρ.

19. (a) S cilín. é $r = 4$. S é um cilindro circular reto. Como $x^2 + y^2 = r^2$, S cartes. é

$$x^2 + y^2 = 16$$

(b) S cilín. é $\theta = \frac{1}{4}\pi$. S é um plano que passa pelo eixo z. Como $\operatorname{tg} \theta = y/x$, e $\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \frac{1}{4}\pi = 1$, S cartes. é $x = y$.

21. S cilín. é $r^2 \cos 2\theta = z^3$; $r^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = z^3$. Como $r \cos \theta = x$ e $r \operatorname{sen} \theta = y$, S cartes é $x^2 - y^2 = z^3$.

23. S esfér. é $\rho = 9$. S é uma esfera. Como e $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, S cartes. é $x^2 + y^2 + z^2 = 81$.

(b) S esfér. é $\theta = \frac{1}{4}\pi$. S é um plano que passa pelo eixo z. Como $\operatorname{tg} \theta = y/x$ e $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{4}\pi = 1$, S cartes. é $x = y$.

(c) S esfér. é $\phi = \frac{1}{4}\pi$. S é um cone com vértice na origem. Da Figura 15.9.10, $r = z \operatorname{tg} \theta = z \operatorname{tg} \frac{1}{4}\pi = 1$. E Como e $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, S cartes. é $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

25. S esfér. é $\rho = 6 \operatorname{cosec} \phi$; $\rho \operatorname{sen} \phi = 6$. Como $\rho \operatorname{sen} \theta = r$ e $r^2 = x^2 + y^2$, S cartes. é $x^2 + y^2 = 36$. S é um cilindro circular cujo eixo é z.

27. S esfér. é $\rho = 2 \operatorname{tg} \theta$. Como $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e $\operatorname{tg} \theta = y/x$, S cartes. é

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{2y}{x}; \quad x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2y$$

29. Como, $x = r \cos \theta$, $D_t x = \cos \theta \, D_t r - r \operatorname{sen} \theta \, D_t \theta$,

$(D_t x)^2 = \cos^2\theta (D_t r)^2 - 2r \operatorname{sen} \theta \cos \theta (D_t r)(D_t \theta) = r^2 \operatorname{sen}^2\theta (D_t \theta)^2$

Como $y = r \operatorname{sen} \theta$, $D_t y = \operatorname{sen} \theta \, D_t r + r \cos \theta \, D_t \theta$,

$(D_t y)^2 = \operatorname{sen}^2\theta (D_t r)^2 + 2r \operatorname{sen} \theta \cos \theta (D_t r)(D_t \theta) + r^2 \cos^2\theta (D_t \theta)^2$

Assim, $(D_t x)^2 + (D_t y)^2 = (D_t r)^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) + r^2(D_t\theta)^2(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) = (D_t r)^2 + r^2(D_t \theta)^2$.

Se L unidades for o comprimento de arco de c de $t = a$ a $t = b$, então, da fórmula 14.8.4,

$$L = \int_a^b \sqrt{(D_t x)^2 + (D_t y)^2 + (D_t z)^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{(D_t r)^2 + r^2(D_t \theta)^2 + (D_t z)^2}$$

31. (a) Um conj de equações paramétricas da hélice circular H é: $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = t$. Se a representação de um ponto na coordenada cilíndrica for (r, θ, z) então $r^2 = x^2 + y^2 = a^2\cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t = a^2$ e $\operatorname{tg} \theta = y/x = \operatorname{tg} t$. Logo, um conjunto de equações paramétricas de H é $r = a$, $\theta = t$, $z = t$.

(b) Usando as equações paramétricas da parte (a), $D_t r = 0$, $D_t \theta = 1$, e $D_t z = 1$. Logo, se L unidades for o comprimento de arco de H de $t = 0$ a $t = 2\pi$, temos do Exercício 29

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{0 + r^2(1)}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + 1}\,dt = \sqrt{a^2 + 1}\,t \Big]_0^{2\pi} = 2\pi\sqrt{a^2 + 1}$$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 15

1. O gráfico de $x = 3$ em R é um ponto; em R^2 é uma linha reta; em R^3 é um plano.

3. O gráfico de $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ é o eixo x.

5. O gráfico de $\begin{cases} x^2 + z^2 = 4 \\ y = 0 \end{cases}$ é a circunferência no plano xy de raio 2 centrada na origem.

7. O gráfico de $x = y$ é o plano perpendicular ao plano xy e intercepta o plano xy na reta $x = y$.

9. O gráfico de $x^2 + y^2 = 9z$ é um parabolóide de revolução gerado com rotação $x^2 = 9z$ ou $y^2 = 9z$ em torno do eixo z.

11. O gráfico de $x^2 - y^2 = z^2$; $x^2 = y^2 + z^2$ é um cilindro circular reto gerado em torno do eixo x e nas retas $x = y$ ou $x = -y$ no plano xy ou nas retas $x = z$ e $x = -z$ no plano xz.

13-21. $A = -i + 3j + 2k$, $B = 2i + j - 4k$, $C = i + 2j - 2k$, $D = 3j - k$, $E = 5i - 2j$.

13. $6C + 4D - E = 6(i + 2j - 2k) + 4(3j - k) - 5i - 2j = 6i + 2j - 12k + 12j - 4k - 5i + 2j = i + 26j - 16k$

15. $D \cdot B \times C = (3j - k) \cdot (2i + j - 4k) \times (i + 2j - 2k) = (3j - k) \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (3j - k) \cdot (6i + 3k) = -3$

17. $\|A \times B\| \|D \times E\| = \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & 0 \end{matrix} \right\| = \|-14i - 7k\| \|-2i - 5j - 15k\| = \sqrt{14^2 + 7^2}\sqrt{2^2 + 5^2 + 15^2}$

$$= 7\sqrt{5}\sqrt{254} = 7\sqrt{1270}$$

19. A projeção escalar de A sobre B é $\dfrac{A \cdot B}{\|B\|} = \dfrac{(-i + 3j + 2k) \cdot (2i + j - 4k)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2}} = \dfrac{-2 + 3 - 8}{\sqrt{21}} = \dfrac{-7}{\sqrt{21}} = -\dfrac{1}{3}\sqrt{21}$.

21. A projeção vetorial de E sobre C é

$$\frac{E \cdot C}{\|C\|^2} C = \frac{(5i - 2j) \cdot (i + 2j - 2k)}{1^2 + 2^2 + 2^2}(i + 2j - 2k) = \frac{5 - 4 + 0}{9}(i + 2j - 2k) = \frac{1}{9}(i + 2j - 2k)$$

23-27. $A = \langle 3, -2, 4 \rangle$, $B = \langle -5, 7, 2 \rangle$, $C = \langle 4, 6, -1 \rangle$.

23. $AB \cdot C = A(B \cdot C) = \langle 3, -2, 4 \rangle (\langle -5, 7, 2 \rangle \cdot \langle 4, 6, -1 \rangle) = \langle 3, -2, 4 \rangle (-20 + 42 - 2) = \langle 60, -40, 80 \rangle$

25. $A + B \cdot C = (A + B) \cdot C = (\langle 3, -2, 4 \rangle + \langle -5, 7, 2 \rangle) \cdot \langle 4, 6, -1 \rangle = \langle -2, 5, 6 \rangle \cdot \langle 4, 6, -1 \rangle = -8 + 30 - 6 = 16$

27. $A \times B \cdot A + B - C = (A \times B) \cdot (A + B - C) = (\langle 3, -2, 4 \rangle \times \langle -5, 7, 2 \rangle) \cdot (\langle 3, -2, 4 \rangle + \langle -5, 7, 2 \rangle - \langle 4, 6, -1 \rangle)$

$$= \langle -32, -26, 11 \rangle \cdot \langle -6, -1, 7 \rangle = 192 + 26 + 77 = 295$$

29. $P(-3, y, 1)$ está sobre a reta que passa por $(-3, 5, 1)$ perpendicular ao plano xz. Se $A = (-2, 0, 0)$,

$$\|PA\| = 13; \quad \sqrt{(-3 + 2)^2 + (y - 0)^2 + (1 - 0)^2} = 13; \quad 1 + y^2 + 1 = 169; \quad y^2 = 167; \quad y = \pm\sqrt{167}$$

Assim, os pontos pedidos são $(-3, \sqrt{167}, 1)$ e $(-3, -\sqrt{167}, 1)$.

31. A esfera dada tem a equação $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 6z + 10 = 0$, isto é ,

$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) + (z^2 - 6z + 9) = -10 + 4 + 1 + 9$; $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 4$

Assim, a esfera pedida S é $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = r^2$. Como $(-4, 2, 5)$ está sobre S, $(-4 + 2)^2 + (2 + 1)^2 + (5 - 3)^2 = r^2$; $r^2 = 17$. Uma equação é $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 17$.

33. A superfície $x^2 + z^2 = e^{4y}$ tem o eixo y como seu eixo de revolução e uma curva geradora é $x^2 = e^{4y}$ no plano xy ou $z^2 = e^{4y}$ no plano yz.

35. Se $\langle 3, c, -3\rangle$ e $\langle 5, -4, 1\rangle$ forem ortogonais , então $\langle 3, c, -3\rangle \cdot \langle 5, -4, 1\rangle = 0$; $15 - 4c - 3 = 0$; $c = 3$

37. $A = (5, 9, -3)$, $B = (-2, 4, -5)$. $V(\overrightarrow{AB}) = -7i - 5j - 2k$; $\|V(\overrightarrow{AB})\| = \sqrt{49 + 25 + 4} = \sqrt{78}$.

(a) $\cos\alpha = -\dfrac{7}{\sqrt{78}}$, $\cos\beta = -\dfrac{5}{\sqrt{78}}$, $\cos\gamma = -\dfrac{2}{\sqrt{78}}$

(b) $-\dfrac{7}{\sqrt{78}}i - \dfrac{5}{\sqrt{78}}j - \dfrac{2}{\sqrt{78}}k$ é um vetor unitário com a mesma direção e sentido que $V(\overrightarrow{AB})$

39. $A = \langle 7, -1, 5\rangle$, $B = \langle -2, 3, 1\rangle$. $A \cdot B = -14 - 3 + 5 = -12$; $\|A\| = \sqrt{49 + 1 + 25} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$.

(a) A projeção escalar de B sobre A é $\dfrac{A \cdot B}{\|A\|} = \dfrac{-12}{5\sqrt{3}} = -\dfrac{4}{5}\sqrt{3}$.

(b) A projeção vetorial de B sobre A é $\dfrac{A \cdot B}{\|A\|^2} A = \dfrac{-12}{75}\langle 7, -1, 5\rangle = \langle -\dfrac{28}{25}, \dfrac{4}{25}, -\dfrac{4}{5}\rangle$.

41. Seja L o plano que passa pelos pontos $P = (-1, 2, 1)$, $Q = (1, 4, 0)$, $R = (1, -1, 3)$.

(a) $V(\overrightarrow{PQ}) = \langle 2, 2, -1\rangle$ e $V(\overrightarrow{PR}) = \langle 2, -3, 2\rangle$. Um vetor normal a L é

$$V(\overrightarrow{PQ}) \times V(\overrightarrow{PR}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = i - 6j - 10k$$

L contém P; logo, uma equação é $1(x + 1) - 6(y - 2) - 10(z - 1) = 0$; $x - 6y - 10z + 23 = 0$.

(b) Como L contém P, a equação tem a forma $a(x + 1) + b(y - 2) + c(z - 1) = 0$.

Como Q e R estão em L, $\begin{matrix} 2a + 2b + c = 0 \\ 2a - 3b - 2c = 0 \end{matrix}$; logo, $a = -\dfrac{1}{10}c$, $b = \dfrac{3}{5}c$. Assim, uma equação é

$-\dfrac{1}{10}c(x + 1) + \dfrac{3}{5}c(y - 2) + c(z + 1) = 0$; $(x + 1) - 6(y - 2) - 10(z + 1) = 0$; $x - 6y - 10z + 23 = 0$

43. $N = \langle 5, -3, 4\rangle$ é um vetor normal ao plano e contém o ponto $P(-6, 3, -2)$. Se d unidades for a distância da origem 0 ao plano, então

$$d = \frac{|N \cdot V(\overrightarrow{OP})|}{\|N\|} = \frac{|\langle 5, -3, 4\rangle \cdot \langle -6, 3, -2\rangle|}{\sqrt{25 + 9 + 16}} = \frac{-30 - 9 - 8}{5\sqrt{2}} = \frac{47}{10}\sqrt{2}$$

45. $A = (2, 2, 1)$, $B = (4, 3, -1)$, $P = (4, 6, -4)$. $V(\overrightarrow{AP}) = \langle 2, 4, -5\rangle$, $V(\overrightarrow{AB}) = \langle 2, 1, -2\rangle$,

$\|V(\overrightarrow{AB})\| = \sqrt{4+1+4} = 3$. Se d unidades for a distância do P à reta AB e θ for o ângulo entre as retas AB e AP, então

$$d = |\overline{AP}|\operatorname{sen}\theta = \frac{\|V(\overrightarrow{AP}) \times V(\overrightarrow{AB})\|}{\|V(\overrightarrow{AB})\|} = \frac{1}{3}\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 2 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & -2 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{3}\|-3i - 6j - 6k\| = \|-i - 2j - 2k\| = \sqrt{1+4+4} = 3$$

47. $A = 2i + j + k$, $B = 4i - 3j + 5k$. $\|A\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$, $\|B\| = \sqrt{16+9+5} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

(a) Se θ for o ângulo entre A e B, $\cos\theta = \dfrac{A \cdot B}{\|A\|\|B\|} = \dfrac{\langle 2, 1, 1\rangle \cdot \langle 4, -3, 5\rangle}{\sqrt{6}(5\sqrt{2})} = \dfrac{8 - 3 + 5}{10\sqrt{3}} = \dfrac{1}{3}\sqrt{3}$.

(b) $\|A \times B\| = \left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 5 \end{matrix}\right\| = \|8i - 6j - 10k\| = \sqrt{64 + 36 + 100} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\|A \times B\|}{\|A\|\|B\|} = \dfrac{10\sqrt{2}}{\sqrt{6}(5\sqrt{2})} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$; $\cos\theta = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta} = \pm\sqrt{1 - \frac{2}{3}} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$. O sinal é desconhecido.

49. As retas $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-2}{2}$ e $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z-5}{1}$ têm direções $A = \langle 1, 2, 2\rangle$ e $\langle 2, 3, 1\rangle$.

A direção de uma reta L perpendicular a elas é $A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \langle -4, 3, -1\rangle$.

Como L contém a origem, as equações simétrica e paramétrica são

$$\frac{x}{-4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1} \quad \text{e} \quad x = -4t, \; y = 3t, \; z = -t$$

51. As retas dadas são L: $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-5}{4}$ e M: $\dfrac{x+1}{-6} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{-8}$. Como o ponto $(2, -3, -5)$ de L está em M e o ponto $(-1, -2, 1)$ de M está em L, a reta coincide.

53. A secção transversal do elipsóide $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{25} = 1$ no plano $z = 4$ é a elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{16}{25} = 1$; $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = \dfrac{9}{25}$; $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ onde $a^2 = \dfrac{36}{25}$ e $b^2 = \dfrac{81}{25}$. A medida da área é $\pi ab = \pi\left(\frac{6}{5}\right)\left(\frac{9}{5}\right) = \frac{54}{25}\pi$.

55. Seja $P = (1, 3, 0)$, $Q = (2, -1, 3)$, $R = (-2, 2, -1)$, $S = (-1, 1, 2)$. $V(\overrightarrow{PQ}) = \langle 1, -4, 3\rangle$, $V(\overrightarrow{PR}) = \langle -3, -1, -1\rangle$, $V(\overrightarrow{PS}) = \langle -2, -2, 2\rangle$. A medida do volume do paralelepípedo é

$$|V(\overrightarrow{PQ}) \times V(\overrightarrow{PR}) \cdot V(\overrightarrow{PS})| = \left|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -4 & 3 \\ -3 & -1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \langle -2, -2, 2\rangle\right| = |\langle 7, -8, -13\rangle \cdot \langle -2, -2, 2\rangle| = |-14 + 16 - 26| = 24$$

57. $R(t) = (2 - 3t)i + (4t - 1)j + t^2k$. $R'(t) = -3i + 4j + 2tk$; $\|R'(t)\| = \sqrt{9 + 16 + 4t^2} = \sqrt{25 + t^2}$.

Se L unidades for o comprimento de arco da curva de $t = 0$ a $t = \frac{5}{2}$, então

$$L = \int_0^{5/2} \|R'(t)\| dt = \int_0^{5/2} \sqrt{25 + 4t^2} dt = \frac{1}{2}\left[t\sqrt{25 + 4t^2} + \frac{25}{2} \ln|2t + \sqrt{25 + 4t^2}|\right]_0^{5/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{5}{2}\sqrt{50} + \frac{25}{2} \ln|5 + \sqrt{50}| - \frac{25}{2} \ln 5\right] = \frac{25}{4}\left[\sqrt{2} + \ln\left(\frac{5 + \sqrt{50}}{5}\right)\right] = \frac{25}{4}[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$$

59. $R(t) = t \cos t\, i + t \operatorname{sen} t\, j + tk$. $V(t) = (\cos t - t \operatorname{sen} t)i + (\operatorname{sen} t + t \cos t)j + k$; $V(\frac{1}{2}\pi) = -\frac{1}{2}\pi i + j + k$.

$A(t) = (-2 \operatorname{sen} t - t \cos t)i + (2 \cos t - t \operatorname{sen} t)j$; $A(\frac{1}{2}\pi) = -2i - \frac{1}{2}\pi j$. $\|V(\frac{1}{2}\pi)\| = \sqrt{\frac{1}{4}\pi^2 + 1 + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi^2 + 8}$

61. $R(t) = 3 \operatorname{sen} 2t\, i - 4t j - 3 \cos 2t k$. $D_tR(t) = 6 \cos 2t\, i - 4j + 6 \operatorname{sen} 2t k$. $\|D_tR(t)\| =$

$\sqrt{36 \cos^2 2t + 16 + 36 \operatorname{sen}^2 2t} = \sqrt{36 + 16} = 2\sqrt{13}$. $T(t) = \dfrac{D_tR(t)}{\|D_tR(t)\|} = \dfrac{3}{\sqrt{13}} \cos 2t\, i - \dfrac{3}{\sqrt{13}} j + \dfrac{3}{\sqrt{13}} \operatorname{sen} 2t k$

$T(\frac{1}{2}\pi) = -\dfrac{3}{\sqrt{13}} i - \dfrac{2}{\sqrt{13}} j$. $D_tT(t) = -\dfrac{6}{\sqrt{13}} \operatorname{sen} 2t\, i + \dfrac{6}{\sqrt{13}} \cos 2t k$; $N(\frac{1}{2}\pi) = \dfrac{D_tT(\frac{1}{2}\pi)}{\|D_tT(\frac{1}{2}\pi)\|} = \dfrac{(-6/\sqrt{13})k}{6/\sqrt{13}} = -k$

$$B(\tfrac{1}{2}\pi) = T(\tfrac{1}{2}\pi) \times N(\tfrac{1}{2}\pi) = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{2}{\sqrt{13}} i - \frac{3}{\sqrt{13}} j$$

63. P esfér. $= (3, \pi, \frac{1}{3}\pi)$. $r = \rho \operatorname{sen}\phi = 3 \operatorname{sen} \frac{1}{3}\pi = 3(\frac{1}{2}\sqrt{3}) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$, $\theta = \pi$, $z = 3 \cos \frac{1}{3}\pi = 3(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$.

Logo, P cilín. $= (\frac{3}{2}\sqrt{3}, \pi, \frac{3}{2})$.

65. (a) S cartes. é $(x + y)^2 + 1 = z$. Como $x = r \cos \theta$ e $y = r \operatorname{sen} \theta$, S cilín. é

$z = (r \cos \theta + r \operatorname{sen}\theta)^2 + 1$; $z = r^2\cos^2\theta + 2r^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + r^2 \operatorname{sen}^2\theta + 1$; $z = r^2 + r^2 \operatorname{sen} 2\theta + 1$

(b) S cartes. é $25x^2 + 4y^2 = 100$. Como $x = r \cos \theta$ e $y = r \operatorname{sen} \theta$, S cilín. é

$$25r^2 \operatorname{sen}^2\theta + 4r^2 \operatorname{sen}^2\theta = 100; \quad r^2(25 \cos^2\theta + 4 \operatorname{sen}^2\theta) = 100$$

67. Seja $A = ai + bj + ck$ um vetor qualquer. Então,

$(A \cdot i)i + (A \cdot j)j + (A \cdot k)k = (ai + bj + ck) \cdot i + (ai + bj + ck) \cdot j + (ai + bj + ck) \cdot k = ai + bj + ck = A$

CAPÍTULO DEZESSEIS

CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNÇÕES DE MAIS DE UMA VARIÁVEL

EXERCÍCIOS 16.1 Funções de Mais de Uma Variável

1. $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$

(a) $f(-3, 4) = \dfrac{-3 + 4}{-3 - 4} = -\dfrac{1}{7}$

(b) $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}} = 5$

(c) $f(x + 1, y - 1) = \dfrac{(x + 1) + (y - 1)}{(x + 1) - (y - 1)} = \dfrac{x + y}{x - y + 2}$

(d) $f(-x, y) - f(x, -y) = \dfrac{-x + y}{-x - y} - \dfrac{x - y}{x + y} = \dfrac{x - y}{x + y} - \dfrac{x - y}{x + y} = 0$

3. $g(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$

(a) $g(1, -1, -1) = \sqrt{4 - 1 - 1 - 1} = 1$

(b) $g(-1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = \sqrt{4 - 1 - \frac{1}{4} - \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

(c) $g(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}z) = \sqrt{4 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}z^2} = \frac{1}{2}\sqrt{16 - x^2 - y^2 - z^2}$

(d) $[g(x, y, z)]^2 - [g(x + 2, y + 2, z)]^2 = (4 - x^2 - y^2 - z^2) - [4 - (x + 2)^2 - (y + 2)^2 - z^2]$

$= -x^2 - y^2 + x^2 + 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 = 4x + 4y + 8$

5. $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 1}$. O domínio de f é $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \neq 1\}$, o conjunto de todos os pontos (x, y) em R^2 exceto aqueles sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

7. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. O domínio de f é $\{(x, y) \mid 1 - x^2 - y^2 \geq 0\}$, o conjunto de todos os pontos (x, y) em R^2 que estejam dentro ou sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

9. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2 - 1}$. O domínio de f é $\{(x, y) \mid x^2 - y^2 \geq 1\}$, o conjunto de todos os pontos (x, y) em R^2 que estejam dentro e sobre a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$.

11. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$. O domínio de f é $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$, o conjunto de todos os pontos (x, y) em R^2 que estejam fora e sobre a circunferência $x^2 - y^2 = 1$.

13. $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$. O domínio de f é $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$, o conjunto de todos os pontos (x, y) em R^2 que estejam dentro da circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

15. $f(x, y) = \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2}$. O domínio de f é $\{(x, y) \mid y \neq \pm x\}$, o conjunto de todos os pontos (x, y) em R^2 que não estejam sobre as retas $y = \pm x$.

17. $f(x, y) = \cos^{-1}(x - y)$. O domínio de f é $\{(x, y) \mid -1 \leq x - y \leq 1\}$, o conj. de todos os pontos (x, y) em R^2 que estejam sobre e entre as retas $y = x - 1$ e $y = x + 1$.

19. $f(x, y) = \ln(xy - 1)$. O domínio de f é $\{(x, y) \mid xy > 1\}$, o conj. de todos os pontos (x, y) em R^2 que estejam dentro da hipérbole $xy = 1$.

21. $f(x, y, z) = \dfrac{x + y + z}{x - y - z}$. O domínio de f é $\{(x, y, z) \mid x - y - z \neq 0\}$, o conj. de todos os pontos (x, y, z) em R^3 que não estejam no plano $x - y - z = 0$.

23. $f(x, y, z) = \sqrt{16 - x^2 - 4y^2 - z^2}$. O domínio de f é $\{(x, y, z) \mid x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 16\}$, o conj de todos os pontos (x, y, z) em R^3 dentro do elipsóide $x^2/16 + y^2/4 + z^2/16 = 1$.

25. $f(x, y, z) = \text{sen}^{-1}x + \text{sen}^{-1}y + \text{sen}^{-1}z$. O domínio de f é $\{(x, y, z) \mid |x| \leq 1,\ |y| \leq 1,\ |z| \leq 1\}$, o conj. de todos os pontos (x, y, z) em R^3 dentro e sobre o cubo $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, $|z| \leq 1$.

27. $f(x, y, z) = \ln(4 - x^2 - y^2) + |z|$. O domínio de f é $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 < 4\}$, o conj. de todos os pontos (x, y, z) em R^3 dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

29 e 37. $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$. O domínio de f é o conjunto dos pontos (x, y) de R^2 que estejam dentro e sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 16$. O gráfico de $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ é a parte superior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. Se $z = k$ temos $k^2 = 16 - x^2 - y^2$; $x^2 + y^2 = 16 - k^2$. As curvas de nível são circunferências centradas na origem de raio, $\sqrt{16 - k^2}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

31 e 39. $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$. O domínio de f é o conj. de todos os pontos (x, y) de R^2. O gráfico de $z = 16 - x^2 - y^2$ é um parabolóide hiperbólico. Se $z = k$ temos $k = 16 - x^2 - y^2$; $x^2 + y^2 = 16 - k$. As curvas de nível são circunferências de raio $\sqrt{16 - k}$, $k = 16, 12, 7, 0, -20$.

33 e 41. $f(x, y) = x^2 - y^2$. O domínio de f é o conj de todos os pontos (x, y) de R^2. O gráfico de $z = x^2 - y^2$ é um parabolóide hiperbólico. Se $z = k$, as curvas de nível são as hipérboles $x^2 - y^2 = k$, $16, 9, 4, 0, -4, -9, -16$.

35. $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$. O domínio de f é o conj. de todos os pontos (x, y) de R^2. O gráfico de $z = 4x^2 + 9y^2$ é um parabolóide elíptico.

37. Veja o Exercício 29. 39. Veja o Exercício 31. 41. Veja o Exercício 33.

43. $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Se $f = k$ temos $k = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$; $x^2 + y^2 = 2k$. As curvas de nível são circunferências centradas na origem de raio $\sqrt{2k}$, $k = 8, 6, 4, 2, 0$.

45. $f(t) = \text{sen}^{-1}t$; $g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$; $h(x, y) = (f \circ g)(x, y) = f(\sqrt{1 - x^2 - y^2}) = \text{sen}^{-1}\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. O domínio de h é s $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Cada um desses pontos (x, y) está no domínio de g e $g(x, y)$ está em $[-1, 1]$ que está no domínio de f.

47. $f(x, y) = x - y,\ g(t) = \sqrt{t},\ \text{e}\ h(s) = s^2.$

(a) $(g \circ f)(5, 1) = g(f(5, 1)) = g(5 - 1) = g(4) = \sqrt{4} = 2$

(b) $f(h(3), g(9)) = f(9, 3) = 9 - 3 = 6$

(c) $f(g(x), h(y)) = f(\sqrt{x}, y^2) = \sqrt{x} - y^2$

(d) $g((h \circ f)(x, y)) = g(h(f(x, y))) = g(h(x - y)) = g((x - y)^2) = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y|$

(e) $(g \circ h)(f(x, y)) = (g \circ h)(x - y) = g(h(x - y)) = |x - y|$

49. $V(x, y) = \dfrac{4}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$. Se $V(x, y) = V$ temos $9 - x^2 - y^2 = \dfrac{16}{V^2}$; $x^2 + y^2 = 9 - \dfrac{16}{V^2}$. As curvas equipotenciais são circunferências centradas na origem de raio $\sqrt{9 - 16/V^2}$, $V = 16,\ 12,\ 8,\ 4,$ e o conjunto vazio para $V = 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4}$.

51. $z = 6xy$. As curvas de produto constante para $z = 30,\ 24,\ 18,\ 12,$ e 6 são os ramos no primeiro quadrante das hipérboles $xy = 5,\ xy = 4,\ xy = 3,\ xy = 2,$ e $xy = 1$. A curva está restrita ao primeiro quadrante pois $x > 0$ e $y > 0$.

53. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z$. As superfícies de nível de f em $8,\ 4,\ 0,\ -4,$ e -8 são parabolóides elípticos com equações da forma $x^2 + y^2 = 4(z + k)$, onde $k = 2,\ 1,\ 0,\ -1,$ e 2.

EXERCÍCIOS 16.2 Limites de Funções de Mais de Uma Variável

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} (3x^2 + xy - 2y^2) = \lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} 3x^2 + \lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} xy + \lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} (-2y^2) = 12 + 6 - 18 = 0$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} = \dfrac{\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} (3x - 2y)}{\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} (x + 4y)} = \dfrac{6 + 2}{2 - 4} = \dfrac{8}{-2} = -4$

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^x + e^y}{\cos x + \operatorname{sen} y} = \dfrac{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (e^x + e^y)}{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (\cos x + \operatorname{sen} y)} = \dfrac{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^x + \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^y}{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \cos x + \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \cos y} = \dfrac{1 + 1}{1 + 0} = 2$

7. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x^4 - (y - 1)^4}{x^2 - (y - 1)^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{[x^2 - (y - 1)^2][x^2 + (y - 1)^2]}{x^2 - (y - 1)^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} [x^2 + (y - 1)^2] = 0$

9. Como $3x - 4y$ é definido em todo ponto (x, y), qualquer disco aberto centrado em $(3, 2)$ satisfará a primeira condição da Definição 15.2.5. Para provar que $\lim\limits_{(x,y)\to(3,2)} (3x - 4y) = 1$, devemos mostrar que para qualquer $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$|3x - 4y - 1| < \epsilon \text{ sempre que } 0 < \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 2)^2} < \delta \quad (1)$$

$|3x - 4y - 1| = |3(x - 3) - 4(y - 2)| \le 3|x - 3| + 4|y - 2| \le 3\sqrt{(x - 3)^2 + (y - 2)^2} + 4\sqrt{(x - 3)^2 + (y - 2)^2}$

Portanto, $|3x - 4y - 1| \le 3\delta + 4\delta = 7\delta$ sempre que $0 < \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 2)^2} < \delta$.

Logo, se $\delta = \frac{1}{7}\epsilon$, a afirmação (1) é válida.

11. Como $3x - 2y$ é definida em todo ponto (x, y), qualquer disco aberto centrado em $(-1, 3)$ satisfará a primeira condição da Definição 16.2.5. Para provar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (3x - 2y) = -9$, devemos mostrar que para qualquer $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$|3x - 2y + 9| < \epsilon \text{ sempre que } 0 < \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} < \delta \qquad (1)$$

$$|3x - 2y + 9| = |3(x+1) - 2(y-3)| \le 3|x+1| + 2|y-3| \le 3\sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} + 2\sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2}$$

Assim, $|3x - 2y + 9| \le 3\delta + 2\delta = 5\delta$ sempre que $0 < \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} < \delta$.

Logo, se $\delta = \frac{1}{5}\epsilon$, a afirmação (1) é válida.

13. Como $x^2 + y^2$ é definida em todo ponto (x, y), qualquer disco aberto centrado em $(1, 1)$ satisfará a primeira condição da Definição 16.2.5. Para provar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2) = 2$, devemos mostrar que para qualquer $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$|x^2 + y^2 - 2| < \epsilon \text{ sempre que } 0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} < \delta \qquad (1)$$

$$|x^2 + y^2 - 2| = |(x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2| \le |x-1||x+1| + |y-1||y+1| \qquad (2)$$

Para obter um limite superior para $|x+1|$ e $|y+1|$ faremos a restrição $\delta \le 1$. Então, sempre que $0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} < \delta \le 1$, $|x-1| < 1$ e $|y-1| < 1$ de modo que $1 < x + 1 < 3$ e $1 < y + 1 < 3$. Então, sempre que $0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} < \delta \le 1$, temos de (2)

$$|x^2 + y^2 - 2| < 3|x-1| + 3|y-1| < 3\delta + 3\delta = 6\delta$$

Logo, se $\delta = \min(1, \frac{1}{6}\epsilon)$ então a afirmação (1) é válida.

15. Como $x^2 + 2x - y$ é definida em todo ponto (x, y), qualquer disco aberto centrado em $(2, 4)$ satisfará a primeira condição da Definição 16.2.5. Para provar que $\lim\limits_{(x,y)\to(2,4)} (x^2 + 2x - y) = 4$, devemos mostrar que para qualquer $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$|x^2 + 2x - y - 4| < \epsilon \text{ sempre que } 0 < \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} < \delta \qquad (1)$$

$$|x^2 + 2x - y - 4| = |(x+4)(x-2) + (-y+4)| \le |x+4||x-2| + |y-4| \qquad (2)$$

Restringimos $\delta \le 1$; então, sempre que $0 < \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} < \delta \le 1$, $|x-2| < 1$ e então, $5 < x + 4 < 7$

Logo, sempre que $0 < \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} < \delta \le 1$ temos de (2)

$$|x^2 + 2x - y - 4| < 7|x-2| + |y-4| < 7\delta + \delta = 8\delta$$

Portanto, se $\delta = \min(1, \frac{1}{8}\epsilon)$, a afirmação (1) é válida.

17. $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(y=0)}} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$; $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x=0)}} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{-y^2}{y^2} = \lim\limits_{y\to 0}(-1) = -1$

Como esses limites não são iguais, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ não existe.

19. $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(y=0)}} \dfrac{x^4y^4}{(x^2 + y^4)^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0}{x^6} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$; $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x=y^2)}} \dfrac{x^4y^4}{(x^2 + y^4)^3} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{y^8y^4}{(y^4 + y^4)^3} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{8}$

Como esses limites não são iguais, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4y^4}{(x^2 + y^4)^3}$ não existe.

21. $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(y=0)}} \dfrac{x^9 y}{(x^6+y^2)^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0}{x^{12}} = 0;\quad \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(y=x^3)}} \dfrac{x^9 y}{(x^6+x^6)^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{12}}{4x^{12}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$

Como esses limites não são iguais, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^9 y}{(x^6+y^2)^2}$ não existe.

23. Para provar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2} = 0$, mostramos que para qualquer $\epsilon > 0$ há um $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}\right| < \epsilon \text{ sempre que } 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \qquad (1)$$

$\left|\dfrac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}\right| \le \dfrac{x^2|y|+|x|y^2}{x^2+y^2} \le \dfrac{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2}$. Se $\delta = \epsilon$, então a afirmação (1) é válida.

25. Para provar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, mostramos que para qualquer $\epsilon > 0$ há um $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| < \epsilon \quad \text{sempre que } < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \qquad (1)$$

$\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \dfrac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$. Logo, se $\delta = \epsilon$, então, a afirmação (1) é válida.

27. Para provar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$, mostramos que para qualquer $\epsilon > 0$ há um $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right| < \epsilon \text{ sempre que } 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \qquad (1)$$

$$\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \le \frac{(x^2+y^2)(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = x^2+y^2$$

Portanto, se $\delta = \sqrt{\epsilon}$, a afirmação (1) é válida.

29. $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x=0)}} \dfrac{x^2+y}{x^2+y^2} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{y}{y^2} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{1}{y}$ (não existe. Portanto, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y}{x^2+y^2}$ não existe.

31. Temos $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = b$ e f é contínua em b e desejamos provar que

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(g(x,y)) = f(b)$. Como f é contínua em b, segue do Teorema 2.6.6

que para qualquer $\epsilon > 0$ há um $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se } |g(x,y) - b| < \delta_1 \quad \text{então } |f(g(x,y)) - f(b)| < \epsilon \qquad (1)$$

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = b$, então, para qualquer $\delta_1 > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \text{ então } |g(x,y) - b| < \delta_1 \qquad (2)$$

Das afirmações (1) e (2) concluímos que para qualquer $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \text{ então } |f(g(x,y)) - f(b)| < \epsilon$$

de onde segue que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(g(x,y)) = f(b)$.

33. Como $tg^{-1}t$ é contínua em $t = 1$ segue do Teorema 16.1.6 que

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} tg^{-1}\frac{y}{x} = tg^{-1}\left(\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{y}{x}\right) = tg^{-1}\frac{2}{2} = tg^{-1}1 = \tfrac{1}{4}\pi$$

35. Como $\sqrt{t}$ é contínua em $t = \frac{1}{4}$ segue, pelo Teorema 16.2.6 que

$$\lim_{(x,y)\to(4,2)} \sqrt{\frac{1}{3x-4y}} = \sqrt{\lim_{(x,y)\to(4,2)} \frac{1}{3x-4y}} = \sqrt{\frac{1}{3(4)-4(2)}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

37. (a) Um teorema análogo ao Teorema 16.2.9 para uma função de três variáveis é: Suponha que a função f seja definida para todos os pontos sobre uma bola aberta tendo seu centro em (x_0, y_0, z_0) exceto possivelmente no próprio (x_0, y_0, z_0), e

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z) = L$$

Então, se S for qualquer conjunto de pontos em R^3 tendo (x_0, y_0, z_0) como um ponto de acumulação, $\lim\limits_{\substack{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)\\(P \text{ in } S)}} f(x,y,z)$ existe e tem sempre o valor L.

A prova é idêntica àquela do Teorema 16.2.9.

(b) Um teorema análogo ao Teorema 16.2.10 para uma função de três variáveis é: Se a função f tem limites diferentes enquanto (x, y, z) aproxima-se de (x_0, y_0, z_0) através de dois conjuntos distintos de pontos tendo (x_0, y_0, z_0) como um ponto de acumulação, então $\lim\limits_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z)$ não existe.

A prova é idêntica àquela do Teorema 16.2.10.

39. $$\lim_{(x,y,z)\to(\pi/3,1,\pi)} \frac{\sec xy + \sec yz}{y - \sec z} = \frac{\lim\limits_{(x,y,z)\to(\pi/3,1,\pi)} \sec xy + \lim\limits_{(x,y,z)\to(\pi/3,1,\pi)} \sec yz}{\lim\limits_{(x,y,z)\to(\pi/3,1,\pi)} y - \lim\limits_{(x,y,z)\to(\pi/3,1,\pi)} \sec z} = \frac{2-1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

41. $$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{(e^x+e^y+e^z)^2}{e^{2x}+e^{2y}+e^{2z}} = \frac{(1+1+1)^2}{1+1+1} = \frac{9}{3} = 3$$

43. $$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\(y=0,z=0)}} \frac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1; \quad \lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\(x=0,y=0)}} \frac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{-z^2}{z^2} = \lim_{z\to 0}(-1) = -1$$

Como esses dois limites não são iguais, $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$ não existe.

45. $$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\(y=0,z=0)}} \frac{x^2y^2z^2}{x^6+y^6+z^6} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^6} = \lim_{x\to 0} 0 = 0; \quad \lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\(x=y=z)}} \frac{x^2y^2z^2}{x^6+y^6+z^6} = \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{3x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Como esses dois limites não são iguais $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2y^2z^2}{x^6+y^6+z^6}$ não existe.

47. Para provar $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy+xz+yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0$, mostramos que para qualquer $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $\left|\dfrac{xy+xz+yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right| < \epsilon$ sempre que $0 < \sqrt{x^2+y^2+z^2} < \delta$ (1)

$$\left|\frac{xy+xz+yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right| \le \frac{|x||y|+|x||y|+|y||z|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \le \frac{3(\sqrt{(x^2+y^2+z^2)})^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 3\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$ Logo, se $\delta = \frac{1}{3}\epsilon$, então a afirmação (1) é válida.

EXERCÍCIOS 16.3 Continuidade de Funções de Mais de Uma Variável

1. $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y - 1}$

Como f é uma função racional, então pelo Teorema 16.3.5, f é contínua em todo ponto em seu domínio, que é $\{(x, y) \mid y \neq 1\}$. Assim, f é contínua em todo ponto (x, y) em R^2 que não esteja na reta $y = 1$.

3. $h(x, y) = \text{sen}\,\dfrac{y}{x}$

Seja $g(x, y) = \dfrac{y}{x}$. Como g é uma função racional, então pelo Teorema 16.3.5 ela será contínua em todo ponto em seu domínio que seja $\{(x, y) \mid x \neq 0\}$. Seja $f(t) = \text{sen}\, t$. Como a função seno é contínua em toda parte, então f será contínua em todo t. A função h é a função composta $f \circ g$, a qual, pelo Teorema 16.3.7 é contínua em todo ponto (x, y) em R^2 que não esteja no eixo y.

5. $f(x, y) = \dfrac{4x^2y + 3y^2}{2x - y}$

Como f é uma função racional, então, pelo Teorema 16.3.5, f é contínua em todo ponto em seu domínio que seja $\{(x, y) \mid y \neq 2x\}$. Portanto, f é contínua em todo ponto (x, y) em R^2 que não esteja sobre a reta $y = 2x$.

7. $g(x, y) = \ln(25 - x^2 - y^2)$

Seja $h(x, y) = 25 - x^2 - y^2$. Como h é uma função polinomial, então, pelo Teorema 16.3.4 ela será contínua em todo ponto em R^2. Seja $f(t) = \ln t$. Como a função logaritmo natural é contínua em todos os números positivos, então f será contínua em todo $t > 0$. A função g é a função composta $f \circ g$, a qual, pelo Teorema 16.3.7 é contínua em todo ponto (x, y) em R^2 que esteja dentro da circunferência $x^2 + y^2 = 25$.

9. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Se $(x, y) \neq (0, 0)$ f é contínua em (x, y). Do Exercício 15.2.23 temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 = f(0, 0)$$

Assim, f é contínua em $(0, 0)$. Portanto, f é contínua em todo ponto em R^2.

11. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x + y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Se $(x, y) \neq (0, 0)$ f é contínua em (x, y). Desejamos verificar se f é contínua em $(0, 0)$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(y=x)}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(y=x)}} \frac{x + y}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$

Como esse limite não existe, então $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ não existe. Logo, f não é contínua em $(0, 0)$. Assim, f é contínua em todo ponto $(x, y) \neq (0, 0)$ em R^2.

13. $G(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x| + |y|} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Se $(x, y) \neq (0, 0)$ G é contínua em (x, y). Para mostrar que G é contínua em $(0, 0)$ devemos mostrar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} G(x, y)$ existe e é igual $G(0, 0) = 0$ e isso é feito, bastando mostrar que para qualquer $\epsilon > 0$ há um $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{xy}{|x| + |y|}\right| < \epsilon \text{ sempre que } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \qquad (1)$$

$$\left|\frac{xy}{|x| + |y|}\right| \leq \frac{|x|\,|y|}{|x|} = |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

Portanto, se $\delta = \epsilon$ a afirmação (1) é válida. Logo, G é contínua em todo ponto em R^2.

15. $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$

Pelos Teoremas 16.3.5 e 16.3.7, a região de continuidade de f é o conjunto de todos os pontos (x, y) em R^2 para os quais $16 - x^2 - y^2 > 0$. Esse é o conjunto de todos os pontos em R^2 que estejam dentro da circunferência $x^2 + y^2 = 16$.

17. $f(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{4x^2 + 9y^2 - 36}}$

Pelo Teorema 16.3.5 e 16.3.7 a região de continuidade de f é o conjunto de todos os pontos (x, y) em R^2 para os quais $4x^2 + 9y^2 - 36 > 0$. Esse é o conjunto de todos os pontos em R^2 que estejam fora da elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$

19. $f(x, y) = \sec^{-1}(xy)$

Se $g(t) = \sec^{-1} t$, o domínio de g é $\{t \mid |t| \geq 1\}$, e g é contínua em seu domínio. Assim, a região de continuidade de f é o conjunto de todos os pontos (x, y) em R^2 para os quais $|xy| \geq 1$.

21. $f(x, y) = \text{sen}^{-1}(x + y) + \ln(xy)$

Se $g(t) = \text{sen}^{-1} t$, o domínio de g é $\{t \mid |t| \leq 1\}$ e g é contínua em seu domínio. Se $h(t) = \ln t$, o domínio de h é $\{t \mid t > 0\}$, e h é contínua em seu domínio. Portanto, f é contínua em todos pontos (x, y) em R^2 para os quais $|x + y| \leq 1$ e $xy > 0$. Esses são todos os pontos no primeiro e no terceiro quadrantes para os quais $|x + y| \leq 1$.

23. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}(x + y)}{x + y} & \text{se } x + y \neq 0 \\ 1 & \text{se } x + y = 0 \end{cases}$. Seja $h(t) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}\, t}{t} & \text{se } t \neq 0 \\ 1 \end{cases}$ e seja $g(x, y) = x + y$. Então, $f(x, y) = (h \circ g)(x, y)$. Observe que $\lim\limits_{t \to 0} h(t) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\text{sen}\, t}{t} = 1 = h(0)$. Assim, h é contínua em 0, e contínua em toda parte. O domínio de g é R^2 e g é contínua em seu domínio. Portanto, pelo Teorema 16.3.7 f é contínua em todos os pontos R^2.

25. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + xy + y^2}$. $f(0, 0)$ não existe e então f é descontínua na origem

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ y = x}} \frac{xy}{x^2 + xy + y^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}; \quad \lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ y = -x}} \frac{xy}{x^2 + xy + y^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-x^2}{x^2} = \lim_{x \to 0} -1 = -1$$

Como esses dois limites não são iguais, $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{xy}{x^2 + xy + y^2}$ não existe. Portanto, a descontinuidade é essencial.

27. $f(x, y) = (x + y)\,\text{sen}\, \dfrac{x}{x^2 + y^2}$. $f(0, 0)$ não existe, e portanto f é descontínua na origem. Como $|\text{sen}\, t| \leq 1$, então $0 \leq |f(x, y)| \leq |x + y|$. Como $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} (x + y) = 0$, segue do teorema do "sanduíche" que $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0$, e portanto, se definimos $f(0, 0) = 0$ a descontinuidade será removível.

29. $f(x, y) = \dfrac{x^3 y^2}{x^6 + y^4}$. $f(0, 0)$ não existe, e portanto, f é descontínua na origem

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (y = 0)}} \frac{x^3 y^2}{x^6 + y^4} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x^6} = \lim_{x \to 0} 0 = 0; \quad \lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (y = x^{3/2})}} \frac{x^3 y^2}{x^6 + y^4} = \lim_{x \to 0} \frac{x^6}{x^6 + x^6} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Como esses dois limites são iguais, $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{x^3 y^2}{x^6 + y^4}$ não existe. Portanto, a descontinuidade é essencial.

31. $f(x, y) = \dfrac{x^3 - 4xy^2}{x^2 + y^2}$. $f(0, 0)$ não existe e portanto, f é descontínua na origem. Mas

$$0 \leq |f(x, y)| = \left| \frac{x^3 - 4xy^2}{x^2 + y^2} \right| \leq |x| \frac{x^2 + 4y^2}{x^2 + y^2} \leq |x| \frac{4x^2 + 4y^2}{x^2 + y^2} = 4|x|$$

Como $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} x = 0$, segue do teorema do "sanduíche" que $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0$, e, portanto, se definimos $f(0, 0) = 0$, a descontinuidade será removível.

33. $G(x, y) = \begin{cases} x^2 + 4y^2 & \text{se } x^2 + 4y^2 \leq 5 \\ 3 & \text{se } x^2 + 4y^2 > 5 \end{cases}$

Se $x_0^2 + 4y_0^2 < 5$ então $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} G(x, y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (x^2 + 4y^2) = x_0^2 + 4y_0^2 = G(x_0, y_0)$.

Se $x_0^2 + 4y_0^2 > 5$ então $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} G(x, y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} 3 = G(x_0, y_0)$.

Assim, G é contínua em todos os pontos (x_0, y_0) para os quais $x_0^2 + 4y_0^2 \neq 5$.

Considere os pontos (x_0, y_0) para os quais $x_0^2 + 4y_0^2 = 5$.

$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ (x^2+4y^2=5)}} G(x, y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ (x^2+4y^2=5)}} (x^2 + 4y^2) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} 5 = 5$; $\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ (x^2+4y^2>5)}} G(x, y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} 3 = 3$

Como esses dois limites não são iguais, concluímos que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} G(x, y)$ não existe.

Assim, G é descontínua em todos os pontos (x_0, y_0) para os quais $x_0^2 + 4y_0^2 = 5$. Logo, G é contínua em todos os pontos em R^2, exceto aqueles na elipse $x^2 + 4y^2 = 5$.

35. $f(x, y, z) = \dfrac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}}$

Pelos teoremas análogos aos Teoremas 15.3.5 e 15.3.7, a região de continuidade de f é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) em R^3 para os quais $x^2 + y^2 + z^2 - 1 > 0$. Esse é o conjunto de todos os pontos em R^3 fora da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

37. $f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{3xyz}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$

A função f é contínua em todos os pontos (x, y, z) em R^3 para os quais $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ pois ela é uma função racional. Mostramos que f também é contínua em $(0, 0, 0)$ provando que $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x, y, z) = 0$.

$$0 \leq \left| \frac{3xyz}{x^2 + y^2 + z^2} \right| = \frac{3|x||y||z|}{x^2 + y^2 + z^2} \leq \frac{3(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}{x^2 + y^2 + z^2} = 3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Como $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} (x^2 + y^2 + z^2) = 0$, segue, pelo teorema do "sanduíche," que

$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x, y, z) = 0$. Assim, f é contínua em todos os pontos em R^3.

EXERCÍCIOS 16.4 Derivadas Parciais

1. $f(x, y) = 6x + 3y - 7$

$$D_1f(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(6x + 6\Delta x + 3y - 7) - (6x + 3y - 7)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 6 = 6$$

3. $f(x, y) = 3xy + 6x - y^2$

$$D_2f(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[3x(y + \Delta y) + 6x - (y + \Delta y)^2] - (3xy + 6x - y^2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{3xy + 3x\Delta y + 6x - y^2 - 2y\Delta y - (\Delta y)^2 - 3xy - 6x + y^2}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{(3x - 2y - \Delta y)\Delta y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} (3x - 2y - \Delta y) = 3x - 2y.$$ Ou então, pela fórmula (4),

$$D_2f(x, y) = \lim_{u \to y} \frac{f(x, u) - f(x, y)}{u - y} = \lim_{u \to y} \frac{(3xu + 6x - u^2) - (3xy + 6x - y^2)}{u - y} = \lim_{u \to y} \frac{3x(u - y) - (u^2 - y^2)}{u - y}$$

$$= \lim_{u \to y} [3x - (u + y)] = 3x - 2y$$

5. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$D_1f(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(x + \Delta x)^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{(x + \Delta x)^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}\right)\left(\sqrt{(x + \Delta x)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{(x + \Delta x)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + y^2 - x^2 - y^2}{\Delta x\left[\sqrt{(x + \Delta x)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}\right]} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x + \Delta x}{\sqrt{(x + \Delta x)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

7. $f(x, y, z) = x^2y - 3xy^2 + 2yz$

$$D_2f(x, y, z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x^2(y + \Delta y) - 3x(y + \Delta y)^2 + 2(y + \Delta y)z - (x^2y - 3xy^2 + 2yz)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x^2y + x^2\Delta y - 3xy^2 - 6xy\Delta y - 3x(\Delta y)^2 + 2yz + 2z\Delta y - x^2y + 3xy^2 - 2yz}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{(x^2 - 6xy - 3x\Delta y + 2z)\Delta y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} (x^2 - 6xy - 3x\Delta y + 2z) = x^2 - 6xy + 2z$$

Ou então,

$$D_2f(x, y, z) = \lim_{u \to y} \frac{f(x, u, z) - f(x, y, z)}{u - y} = \lim_{u \to y} \frac{x^2u - 3xu^2 + 2uz - (x^2y - 3xy^2 + 2yz)}{u - y}$$

$$= \lim_{u \to y} \frac{x^2(u - y) - 3x(u^2 - y^2) + 2z(u - y)}{u - y} = \lim_{u \to y} [x^2 - 3x(u + y) + 2z] = x^2 - 6xy + 2z$$

9. $f(x, y, z, r, t) = xyr + yzt + yrt + zrt$

$$D_4 f(x, y, z, r, t) = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{f(x, y, z, r + \Delta r, t) - f(x, y, z, r, t)}{\Delta r}$$

$$= \lim_{\Delta r \to 0} \frac{xy(r + \Delta r) + yzt + y(r + \Delta r)t + z(r + \Delta r)t - (xyr + yzt + yrt + zrt)}{\Delta r}$$

$$= \lim_{\Delta r \to 0} \frac{xyr + xy\Delta r + yzt + yrt + yt\Delta r + zrt + zt\Delta r - xyr - yzt - yrt - zrt}{\Delta r}$$

$$= \lim_{\Delta r \to 0} \frac{(xy + yt + zt)\Delta r}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \to 0} (xy + yt + zt) = xy + yt + zt$$

11. $f(x, y) = x^2 - 9y^2$

(a) $$D_1 f(2, 1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x, 1) - f(2, 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 - 9 - (-5)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 4}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(4 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (4 + \Delta x) = 4$$

(b) $$D_1 f(2, 1) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x, 1) - f(2, 1)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 9 - (2^2 - 9)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2^2}{x - 2} = \lim_{x \to 2}(x + 2) = 4$$

(c) $$D_1 f(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta y, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - 9y^2 - (x^2 - 9y^2)}{\Delta x}.$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Portanto, em $(2, 1)$, $D_1 f(x, y) = 4$.

13. $D_1 f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}[4y^3 + \sqrt{x^2 + y^2}] = \frac{\partial}{\partial x}[4y^3 + (x^2 + y^2)^{1/2}] = 0 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

15. $D_2 f(\theta, \phi) = \frac{\partial}{\partial \phi}[\text{sen } 3\theta \cos 2\phi] = \text{sen } 3\theta[-\text{sen } 2\phi(2)] = -2 \text{ sen } 3\theta \text{ sen } 2\phi$

17. $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[e^{y/x} \ln \frac{x^2}{y}\right] = \left[e^{y/x}\left(\frac{1}{x}\right)\right] \ln \frac{x^2}{y} + e^{y/x}\left[\frac{y}{x^2}\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)\right] = e^{y/x}\left(\frac{1}{x} \ln \frac{x^2}{y} - \frac{1}{y}\right) = \frac{e^{y/x}}{xy}\left(y \ln \frac{x^2}{y} - x\right)$

19. $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(2z) = \frac{-z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$

21. $f_3(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z}[4xyz + \ln(2xyz)] = 4xy + \frac{1}{2xyz}(2xy) = 4xy + \frac{1}{z}$

23. $f_3(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z}\left[e^{xyz} + \text{tg}^{-1}\left(\frac{3xy}{z^2}\right)\right] = xze^{xyz} + \frac{1}{\left(\frac{3xy}{z^2}\right)^2 + 1}\left(\frac{3x}{z^2}\right) = xze^{xyz} + \frac{3xz^2}{9x^2y^2 + z^4}$

25. $f(r, \theta) = r \text{ tg } \theta - r^2 \text{sen } \theta$

(a) $f_1(r, \theta) = \text{tg } \theta - 2r \text{ sen } \theta$; $f_1(\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi) = \text{tg } \frac{1}{4}\pi - 2\sqrt{2} \text{ sen } \frac{1}{4}\pi = 1 - 2\sqrt{2}(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = -1$

(b) $f_2(r, \theta) = r \sec^2\theta - r^2 \cos \theta$; $f_2(3, \pi) = 3 \sec^2\pi - 9 \cos \pi = 3(-1)^2 - 9(-1) = 12$

27. $f(x, y) = \int_x^y \ln \text{sen } t \, dt$; logo, $f_y(x, y) = \ln \text{sen } y$. $f(x, y) = -\int_y^x \ln \text{sen } t \, dt$; logo, $f_x(x, y) = -\ln \text{sen } x$.

29. $u = \text{sen } \frac{r}{t} + \ln \frac{t}{r}$. $t\frac{\partial u}{\partial t} + r\frac{\partial u}{\partial r} = t\left[\cos \frac{r}{t}\left(-\frac{r}{t^2}\right) + \frac{1}{t}\right] + r\left[\cos \frac{r}{t}\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{r}\right] = -\frac{r}{t} \cos \frac{r}{t} + 1 + \frac{r}{t} \cos \frac{r}{t} - 1 = 0.$

31. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(a) $f_1(0, 0) = \lim_{x \to 0} \dfrac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \dfrac{x - 0}{x} = \lim_{x \to 0} 1 = 1$

(b) $f_2(0, 0) = \lim_{y \to 0} \dfrac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \dfrac{y - 0}{y} = \lim_{y \to 0} 1 = 1$

33. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - xy}{x + y} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(a) Se $(x, y) \neq (0, 0)$, $f_2(x, y) = \dfrac{-x(x + y) - 1(x^2 - xy)}{(x + y)^2} = \dfrac{-2x^2}{(x + y)^2}$. Se $x \neq 0$, $f_2(x, 0) = \dfrac{-2x^2}{x^2} = -2$

(b) $f_2(0, 0) = \lim_{y \to 0} \dfrac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \dfrac{0 - 0}{y} = \lim_{y \to 0} 0 = 0$

35. $z = x^2 + y^2$. Portanto, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x$. Em $(2, 1, 5)$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 4$.

37. $T = 54 - \dfrac{2}{3}x^2 - 4y^2$. $\dfrac{\partial T}{\partial x} = -\dfrac{4}{3}x$ e $\dfrac{\partial T}{\partial y} = -8y$. No ponto $(3, 1)$, $\dfrac{\partial T}{\partial x} = -4$ e $\dfrac{\partial T}{\partial y} = -8$. Logo, a taxa de variação da temperatura com relação à distância percorrida na direção do eixo positivo x é $-4°$/cm e na direção do eixo positivo y é $-8°$/cm.

39. $V = 100\left[\dfrac{1 - (1 + i)^{-t}}{i}\right]$

(a) $\dfrac{\partial V}{\partial i} = 100\left[\dfrac{it(1 + i)^{-t-1} - 1 + (1 + i)^{-t}}{i^2}\right] = \dfrac{100}{i^2}\left[\dfrac{ti}{(1 + i)^{t+1}} + \dfrac{1}{(1 + i)^t} - 1\right]$

Quando $t = 8$, $\dfrac{\partial V}{\partial i} = \dfrac{100}{i^2}\left[\dfrac{8i}{(1 + i)^9} + \dfrac{1}{(1 + i)^8} - 1\right] = \dfrac{100}{i^2}\left[\dfrac{9i + 1}{(1 + i)^9} - 1\right]$

(b) Se $i = 0.06$, $\Delta i = 0.01$ e $t = 8$, então $\Delta V \approx \dfrac{\partial V}{\partial i}\Delta i = \dfrac{1}{0,0036}\left[\dfrac{1,54}{(1,06)^9} - 1\right] \approx -24.4$. Logo, o valor atual decresce aproximadamente \$24,40.

(c) $\dfrac{\partial V}{\partial t} = \dfrac{100}{i}(1 + i)^{-t}\ln(1 + i)$. Quando $i = 0,06$, $\dfrac{\partial V}{\partial t} = \dfrac{100}{0,06(1,06)^t}\ln(1,06) = \dfrac{5000\ln(1,06)}{3(1,06)^t}$.

(d) Se $t = 8$, $\Delta t = -1$ aed $i = 0.06$, $\Delta V \approx \dfrac{\partial V}{\partial t}\Delta t = \dfrac{5000\ln(1,06)}{3(1,06)^8}(-1) \approx -60,9$. Portanto, o valor atual decresce aproximadamente em \$60,90.

41. $S = 2W^{0,4}H^{0,7}$. $\dfrac{\partial S}{\partial W} = 0,8W^{-0,6}H^{0,7}$. $\dfrac{\partial S}{\partial H} = 1,4W^{0,4}H^{-0,3}$. Quando $W = 70$ e $H = 1,8$,

$\dfrac{\partial S}{\partial W} = (0,8)(70^{-0,6})(1,8^{0,7}) \approx 0,0943$. A área da superfície varia em $0,0943\ m^2/kg$ do peso.

$\dfrac{\partial S}{\partial H} = (1,4)(70^{0,4})(1,8^{-0,3}) \approx 6,42$. A área da superfície varia em $6,42\ m^2/m$ da altura.

EXERCÍCIOS 16.5 Diferenciabilidade e Diferencial Total

1. $f(x, y) = 3x^2 + 2xy - y^2$

(a) $\Delta f(1, 4) = f(1 + \Delta x, 4 + \Delta y) - f(1, 4) = 3(1 + \Delta x)^2 + 2(1 + \Delta x)(4 + \Delta y) - (4 + \Delta y)^2 - (3 + 8 - 16)$

$= 3 + 6\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 8 + 8\Delta x + 2\Delta y + 2(\Delta x)(\Delta y) - 16 - 8\Delta y - (\Delta y)^2 + 5$

$= 3(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)(\Delta y) - (\Delta y)^2 + 14\Delta x - 6\Delta y$

(b) Quando $\Delta x = 0,03$ e $\Delta y = -0,02$, temos

$\Delta f(1, 4) = 3(0,03)^2 + 2(0,03)(-0,02) - (0,02)^2 + 14(0,03) - 6(-0,02)$

$= 0,0027 - 0,0012 - 0,0004 + 0,42 + 0,12 = 0,5411$

(c) $df(1, 4, \Delta x, \Delta y) = D_1f(1, 4)\Delta x + D_2f(1, 4)\Delta y$. Quando $x = 1$ e $y = 4$,

$D_1f(x, y) = 6x + 2y = 14$ e $D_2f(x, y) = 2x - 2y = -6$. Assim, $df(1, 4, \Delta x, \Delta y) = 14\Delta x - 6\Delta y$.

(d) $df(1, 4, 0,03, -0,02) = 14(0,03) - 6(-0,02) = 0,42 + 0,12 = 0,54$

3. $g(x, y) = xye^{xy}$

(a) $\Delta g(2, -4) = g(2 + \Delta x, -4 + \Delta y) - g(2, -4) = (2 + \Delta x)(-4 + \Delta y)e^{(2+\Delta x)(-4+\Delta y)} + 8e^{-8}$

(b) Quando $\Delta x = -0,1$ e $\Delta y = 0,2$, temos

$\Delta g(2, -4) = (2 - 0,1)(-4 + 0,2)e^{(2-0,1)(-4+0,2)} + 8e^{-8} = (1,9)(-3,8)e^{(1,9)(-3,8)} + 8e^{-8}$

$= -0.0026$

(c) $dg(2, -4, \Delta x, \Delta y) = D_1g(2, -4)\Delta x + D_2g(2, -4)\Delta y$.

Como $D_1g(x, y) = ye^{xy} + xy^2e^{xy}$ e $D_2g(x, y) = xe^{xy} + x^2ye^{xy}$, temos

$dg(2, -4, \Delta x, \Delta y) = (-4e^{-8} + 32e^{-8})\Delta x + (2e^{-8} - 16e^{-8})\Delta y = 28e^{-8}\Delta x - 14e^{-8}\Delta y$

(d) $dg(2, 4, -0,1, 0,2) = 28e^{-8}(-0,1) - 14e^{-8}(0,2) = -5,6e^{-8} = -0,0019$

5. $F(x, y, z) = xy + \ln(yz)$

(a) $\Delta F(4, 1, 5) = F(4 + \Delta x, 1 + \Delta y, 5 + \Delta z) - F(4, 1, 5)$

$= (4 + \Delta x)(1 + \Delta y) + \ln[(1 + \Delta y)(5 + \Delta z)] - (4 + \ln 5)$

$= \Delta x + 4\Delta y + (\Delta x)(\Delta y) + \ln(1 + \Delta y) + \ln(5 + \Delta z) - \ln 5$

(b) Quando $\Delta x = 0,02$, $\Delta y = 0,04$, e $\Delta z = -0,03$, temos

$\Delta F(4, 1, 5) = 0,02 + 0,16 + 0,0008 + \ln(1,04) + \ln(4,97) - \ln 5 \approx 0,214003$

(c) $dF(4, 1, 5, \Delta x, \Delta y, \Delta z) = D_1F(4, 1, 5)\Delta x + D_2F(4, 1, 5)\Delta y + D_3F(4, 1, 5)\Delta z$. Quando $x = 4$, $y = 1$, $z = 5$

$D_1F(x, y, z) = y = 1$, $D_2F(x, y, z) = x + \frac{1}{y} = 5$, e $D_3F(x, y, z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{5}$. Então,

$dF(4, 1, 5, \Delta x, \Delta y, \Delta z) = \Delta x + 5\Delta y + \frac{1}{5}\Delta z$

(d) $dF(4, 1, 5, 0,02, 0,04, -0,03) = 0,02 + 5(0,04) + (-0,03) = 0,02 + 0,20 - 0,006 = 0,21$

7. $w = 4x^3 - xy^2 + 3y - 7$. $dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy = (12x^2 - y^2)dx + (3 - 2xy)dy$

9. $w = x\cos y - y\,\text{sen}\,x$. $dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy = (\cos y - y\cos x)\,dx + (-x\,\text{sen}\,y - \text{sen}\,x)\,dy$

11. $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$. $dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$

$$= \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}dx + \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}dy + \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}dz = \frac{2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

13. $w = x\,\text{tg}^{-1}z - \frac{y^2}{z}$. $dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz = \text{tg}^{-1}z\,dx - \frac{2y}{z}dy + \left(\frac{x}{1 + z^2} + \frac{y^2}{z^2}\right)dz$

15. $f(x, y) = x^2y - 2xy$

(a) $\Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = (x + \Delta x)^2(y + \Delta y) - 2(x + \Delta x)(y + \Delta y)$

$$= 2(xy - y)\Delta x + (x^2 - 2x)\Delta y + (y\Delta x + \Delta x\Delta y)\Delta x + 2(x\Delta x - \Delta x)\Delta y$$

(b) $D_1f(x, y) = 2xy - 2y$ e $D_2f(x, y) = x^2 - 2x$. Logo, $\epsilon_1 = y\Delta x + \Delta x\Delta y$ e $\epsilon_2 = 2x\Delta x - 2\Delta x$

(c) $\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \epsilon_1 = \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} (y\Delta x + \Delta x\Delta y) = 0$; $\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \epsilon_2 = \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} (2x\Delta x - 2\Delta x) = 0$

17. $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$

(a) $\Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \frac{(x + \Delta x)^2}{y + \Delta y} - \frac{x^2}{y} = \frac{x^2y + 2xy\Delta x + y(\Delta x)^2 - x^2y - x^2\Delta y}{y(y + \Delta y)}$

$$= \frac{2xy\Delta x + y(\Delta x)^2 - x^2\Delta y}{y(y + \Delta y)} = \frac{2xy + y\Delta x}{y(y + \Delta y)}\Delta x - \frac{x^2}{y(y + \Delta y)}\Delta y$$

(b) $D_1f(x, y) = \frac{2x}{y}$ e $D_2f(x, y) = -\frac{x^2}{y^2}$. Assim,

$$\Delta f(x, y) - D_1f(x, y)\Delta x - D_2f(x, y)\Delta y = \left[\frac{2xy + y\Delta x}{y(y + \Delta y)} - \frac{2x}{y}\right]\Delta x + \left[-\frac{x^2}{y(y + \Delta y)} + \frac{x^2}{y^2}\right]\Delta y$$

$$= \frac{2xy + y\Delta x - 2xy - 2x\Delta y}{y(y + \Delta y)}\Delta x + \frac{-x^2y + x^2y + x^2\Delta y}{y^2(y + \Delta y)}\Delta y = \frac{y\Delta x - 2x\Delta y}{y(y + \Delta y)}\Delta x + \frac{x^2\Delta y}{y^2(y + \Delta y)}$$

Assim, $\epsilon_1 = \frac{y\Delta x - 2x\Delta y}{y(y + \Delta y)}$ e $\epsilon_2 = \frac{x^2\Delta y}{y^2(y + \Delta y)}$.

(c) $\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \epsilon_1 = \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \frac{y\Delta x - 2x\Delta y}{y(y + \Delta y)} = 0$; $\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \epsilon_2 = \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \frac{x^2\Delta y}{y^2(y + \Delta y)} = 0$

19. $f(x, y) = \begin{cases} x + y - 2 & \text{se } x = 1 \text{ ou } y = 1 \\ 2 & \text{se } x \neq 1 \text{ e } y \neq 1 \end{cases}$

$$D_1f(1, 1) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(1 + \Delta x, 1) - f(1, 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(1 + \Delta x + 1 - 2) - 0}{\Delta y} = 1$$

$$D_2f(1, 1) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(1, 1 + \Delta y) - f(1, 1)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{(1 + 1 + \Delta y - 2) - 0}{\Delta y} = 1$$

Entretanto, $\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1) \\ (y = x)}} f(x, y) = \lim_{x\to 1} 2 = 2 \neq 0 = f(1, 1)$ logo, f é descontínua em (1, 1) e então, não é diferenciável.

21. $g(x, y) = 2x^4 - 3x^2y^2 + x^{-2}y^{-2}$. O domínio de g abrange todos os pontos em R^2, exceto $(0, 0)$.

$$D_1g(x, y) = 8x^3 - 6xy^2 - 2x^{-3}y^{-2}; \quad D_2g(x, y) = -6x^2y - 2x^{-2}y^{-3}$$

Em todos os pontos (x, y) no domínio de g, D_1g e D_2g existem e são contínuas; logo, g é diferenciável pelo Teorema 16.5.4.

23. $f(x, y) = 3\ln xy + 5\operatorname{sen} x$. O domínio de f está no primeiro e no terceiro quadrantes em R^2.

$$D_1f(x, y) = 3\cdot\frac{1}{xy}\cdot y + 5\cos x = \frac{3}{x} + 5\cos x; \quad D_2f(x, y) = 3\cdot\frac{1}{xy}\cdot x = \frac{3}{y}$$

Em todos os pontos (x, y) no domínio de f, D_1f e D_2f existem e são contínuas; logo, f é diferenciável pelo Teorema 16.5.4.

25. $h(x, y) = \operatorname{tg}^{-1}(x + y) + \dfrac{1}{x - y}$. O domínio de h é $\{(x, y) \mid x \neq y\}$.

$$D_1h(x, y) = \frac{1}{1 + (x + y)^2} - \frac{1}{(x - y)^2}; \quad D_2h(x, y) = \frac{1}{1 + (x + y)^2} + \frac{1}{(x - y)^2}$$

Em todos os pontos (x, y) no domínio de h D_1h e D_2h existem e são contínuas; logo, h é diferenciável pelo Teorema 16.5.4.

27. $f(x, y) = ye^{3x} - xe^{-3y}$. O domínio de f é todo de R^2.

$$D_1f(x, y) = 3ye^{3x} - e^{-3y}; \quad D_2f(x, y) = e^{3x} + 3xe^{-3y}$$

Em todos os pontos (x, y) no domínio de f, D_1f e D_2f existem e são contínuas; logo, f é diferenciável pelo Teorema 16.5.4.

29. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Se $(x, y) \neq (0, 0)$, $D_1f(x, y) = \dfrac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}$ e $D_1f(0, 0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{0 - 0}{\Delta x} = 0$.

Se $(x, y) \neq (0, 0)$, $D_2f(x, y) = \dfrac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$ e $D_2f(0, 0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{0 - 0}{\Delta y} = 0$.

Tanto D_1f e D_2f existem em todo disco aberto centrado em $(0, 0)$. Para mostrar que D_1f é contínua em $(0, 0)$, mostraremos que $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} D_1f(x, y) = 0$.

$$\left|\frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}\right| \leq \frac{|x^4||y| + 4|x^2||y^3| + |y^5|}{(x^2 + y^2)^2} \leq \frac{6(\sqrt{x^2 + y^2})^5}{(\sqrt{x^2 + y^2})^4} = 6\sqrt{x^2 + y^2}$$

Portanto, se $\delta = \frac{1}{6}\epsilon$, $|D_1f(x, y)| < \epsilon$ sempre que $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ e então $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} D_1f(x, y) = 0$.

Logo, D_1f é contínua em $(0, 0)$. Analogamente, D_2f é contínua em $(0, 0)$. Logo, pelo Teorema 16.5.4 f, é diferenciável em $(0, 0)$.

31. $f(x, y, z) = xy - xz + z^2$

(a) $\Delta f(x, y, z) = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$

$= (x + \Delta x)(y + \Delta y) - (x + \Delta x)(z + \Delta z) + (z + \Delta z)^2 - (xy - xz + z^2)$

$= xy + x\Delta y + y\Delta x + (\Delta x)(\Delta y) - xz - x\Delta z - z\Delta x - (\Delta x)(\Delta z) + z^2 + 2z\Delta z + (\Delta z)^2 - xy + xz - z^2$

$= x\Delta y + y\Delta x - x\Delta z - z\Delta x + 2z\Delta z + (\Delta x)(\Delta y) - (\Delta x)(\Delta z) + (\Delta z)^2$

$= (y - z)\Delta x + x\Delta y + (2z - x)\Delta z - \Delta z\Delta x + \Delta x\Delta y + \Delta z\Delta z$

(b) $D_1 f(x, y) = y - z$, $D_2 f(x, y, z) = x$, $D_3 f(x, y, z) = 2z - x$. Assim, $\epsilon_1 = -\Delta z$, $\epsilon_2 = \Delta x$, $\epsilon_3 = \Delta z$.

(c) $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \to (0,0,0)} \epsilon_1 = \lim\limits_{\Delta z \to 0} (-\Delta z) = 0$; $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \to (0,0,0)} \epsilon_2 = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$;

$\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \to (0,0,0)} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \Delta z = 0$

Segue, da Definição 16.5.8, que f é diferenciável em todos os pontos em R^3.

33. $f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{xy^2z}{x^4 + y^4 + z^4} & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{se } (x; y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$

(a) $D_1 f(0, 0, 0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x, 0, 0) - f(0, 0, 0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{0 - 0}{x} = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0$

$D_2 f(0, 0, 0) = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{f(0, y, 0) - f(0, 0, 0)}{y - 0} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{0 - 0}{y} = \lim\limits_{y \to 0} 0 = 0$

$D_3 f(0, 0, 0) = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{f(0, 0, z) - f(0, 0, 0)}{z - 0} = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{0 - 0}{z} = \lim\limits_{z \to 0} 0 = 0$

(b) $\lim\limits_{\substack{(x,y,z) \to (0,0,0) \\ (x = y = z)}} f(x, y, z) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^4}{3x^4} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3} \neq 0 = f(0, 0, 0)$. Portanto, f é descontínua em $(0, 0, 0)$, e então, f não é diferenciável em $(0, 0, 0)$.

35. Seja l metros o comprimento, W m a largura, e h m a altura do sólido. Se V m^3 for o volume do sólido, então

$$V = \ell wh; \quad dV = \frac{\partial V}{\partial \ell} d\ell + \frac{\partial V}{\partial w} dw + \frac{\partial V}{\partial h} dh = wh\, d\ell + \ell h\, dw + \ell w\, dh$$

Com $\ell = 8$, $d\ell = 0{,}08$, $w = 5$, $dw = 0{,}08$, $h = 4$, e $dh = 0{,}08$, temos

$dV = (5)(4)(0{,}08) + (8)(4)(0{,}08) + (8)(5)(0{,}08) = 1{,}60 + 2{,}56 + 3{,}20 = 7{,}36$. $\Delta V \approx 7{,}36$.

De fato, $\Delta V = (8{,}08)(5{,}08)(4{,}08) - (8)(5)(4) = 7{,}47$.

37. Seja l cm o comprimento da hipotenusa e x cm e y cm os comprimentos dos catetos.

$\ell = \sqrt{x^2 + y^2}$; $d\ell = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy$. Seja $x = 6$, $y = 8$, $dx = 0{,}1$, e $dy = 0{,}1$. Então,

$d\ell = \dfrac{6}{10}(\pm 0{,}1) + \dfrac{8}{10}(\pm 0{,}1) = \pm 0{,}14$; $\Delta \ell \approx 0{,}14$. Logo, o erro máximo no cálculo do comprimento da hipotenusa é de aproximadamente 0,14 cm. $\dfrac{d\ell}{\ell} = \dfrac{\pm 0{,}14}{10} = \pm 0{,}014$, e portanto, o erro percentual aproximado é 1,4%.

39. $s = \dfrac{A}{A - W}$. $ds = \dfrac{-W}{(A - W)^2}\,dA + \dfrac{A}{(A - W)^2}\,dW$. Seja $A = 20$, $W = 12$, $dA = \pm 0,01$ e $dW = \pm 0,02$. Então,

$s = \dfrac{20}{20 - 12} = 2,5$; $ds = \dfrac{-12}{64}(\pm 0,01) + \dfrac{20}{64}(\pm 0,02)$. O maior erro possível é obtido quando

dA e dW têm sinais opostos. Isto é, quando $\Delta s \approx ds = \pm\left(\dfrac{0,12}{64} + \dfrac{0,40}{64}\right) = \pm 0,008125$.

O erro relativo aproximado é $\dfrac{ds}{s} = \pm\dfrac{0,00875}{2,5} = \pm 0,00325 = \pm 0,325\%$.

41. Sejam as dimensões de um caixote x m, y m, z m. Se A m² for a área da superfície total,

$$A = 2(xy + xz + yz);\quad dA = 2[(y + z)\,dx + (x + z)\,dy + (x + y)\,dz]$$

Seja $x = 3$, $dx = \pm 0,005$, $y = 4$, $dy = \pm 0,005$, $z = 5$, e $dz = \pm 0,005$. Então,

$$\Delta A \approx dA = 2[9(\pm 0.005) + 8(\pm 0.005) + 7(\pm 0.005)] = \pm 0.240$$

O maior erro possível na quantidade de madeira usada para um caixote é de aproximadamente $0,24$ m². Assim, o maior erro possível na estimativa do custo da madeira para a fabricação de 10.000 caixotes é $10.000(0,24)(\$3) = \$7,200$.

43-45. $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\,\text{sen}\,\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0 \end{cases}$

43. Como $|\text{sen}\, t| \leq 1$, segue do teorema do "sanduíche" que

$$D_1 f(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 \text{sen}\,\dfrac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2}} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot \text{sen}\,\frac{1}{|\Delta x|} = 0$$

Analogamente, $D_2 f(0, 0) = 0$. Se $(x, y) \neq (0, 0)$, as fórmulas para diferenciação resultam em

$$D_1 f(x, y) = \begin{cases} 2x\,\text{sen}\,\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$ e

$$D_2 f(x, y) = \begin{cases} 2y\,\text{sen}\,\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

45. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (y = 0,\ x > 0)}} D_1 f(x, y) = \lim_{x \to 0^+} \left(2x\,\text{sen}\,\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right)$. $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} 2x\,\text{sen}\,\frac{1}{x} = 0$ mas $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \cos\frac{1}{x}$ não existe.

Portanto, $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (0,0)} D_1 f(x, y)$ não existe, e portanto $D_1 f$ é descontínua em $(0, 0)$. De forma similar, provamos que $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (0,0)} D_2 f(x, y)$ não existe, mostrando que

$\displaystyle\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x = 0,\ y > 0)}} D_2 f(x, y)$ não existe.

EXERCÍCIOS 16.6 A Regra da Cadeia

1. $u = x^2 - y^2;\ x = 3r - s;\ y = r + 2s$

(a) $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = 2x(3) - 2y(1) = 6x - 2y;\ \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = 2x(-1) - 2y(2) = -2x - 4y$

(b) $u = (3r - s)^2 - (r + 2s)^2 = 9r^2 - 6rs + s^2 - r^2 - 4rs - 4s^2 = 8r^2 - 10rs - 3s^2$

$\frac{\partial u}{\partial r} = 16r - 10s;\ \frac{\partial u}{\partial s} = -10r - 6s$

3. $u = 3x^2 + xy - 2y^2 + 3x - y;\ x = 2r - 3s;\ y = r + s$

(a) $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = (6x + y + 3)(2) + (x - 4y - 1)(1) = 13x - 2y + 5$

$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = (6x + y + 3)(-3) + (x - 4y - 1)(1) = -17x - 7y - 10$

(b) $u = 3(2r - 3s)^2 + (2r - 3s)(r + s) - 2(r + s)^2 + 3(2r - 3s) - (r + s)$

$= 12r^2 - 36rs + 27s^2 + 2r^2 - rs - 3s^2 - 2r^2 - 4rs - 2s^2 + 6r - 9s - r - s$

$= 12r^2 - 41rs + 22s^2 + 5r - 10s.\ \frac{\partial u}{\partial r} = 24r - 41s + 5;\ \frac{\partial u}{\partial s} = -41r + 44s - 10.$

5. $u = e^{y/x};\ x = 2r\cos t;\ y = 4r \operatorname{sen} t$

(a) $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = e^{y/x}\left(-\frac{y}{x^2}\right)(2\cos t) + e^{y/x}\left(\frac{1}{x}\right)(4\operatorname{sen} t) = \frac{2e^{y/x}}{x^2}(2x\operatorname{sen} t - y\cos t)$

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = e^{y/x}\left(-\frac{y}{x^2}\right)(-2r\operatorname{sen} t) + e^{y/x}\left(\frac{1}{x}\right)(4r\cos t) = \frac{2re^{y/x}}{x^2}(y\operatorname{sen} t + 2x\cos t)$

(b) $u = e^{4r\operatorname{sen} t/2r\cos t} = e^{2\operatorname{tg} t},\ \frac{\partial u}{\partial r} = 0;\ \frac{\partial u}{\partial t} = 2e^{2\operatorname{tg} t}\sec^2 t.$

7. $u = x^2 + xy;\ x = r^2 + s^2;\ y = 3r - 2s$

$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = (2x + y)(2r) + x(3) = 2r(2x + y) + 3x$

$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = (2x + y)(2s) + x(-2) = 2s(2x + y) - 2x$

9. $u = \operatorname{sen}^{-1}(3x + y);\ x = r^2e^s;\ y = \operatorname{sen} rs$

$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{3}{\sqrt{1 - (3x + y)^2}}(2re^s) + \frac{1}{\sqrt{1 - (3x + y)^2}}(s\cos rs) = \frac{6re^s + s\cos rs}{\sqrt{1 - (3x + y)^2}}$

$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{3}{\sqrt{1 - (3x + y)^2}}(r^2e^s) + \frac{1}{\sqrt{1 - (3x + y)^2}}(r\cos rs) = \frac{3r^2e^s + r\cos rs}{\sqrt{1 - (3x + y)^2}}$

11. $u = \cosh\frac{y}{x};\ x = 3r^2s;\ y = 6se^r$

$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \operatorname{senh}\frac{y}{x}\left(-\frac{y}{x^2}\right)(6rs) + \operatorname{senh}\frac{y}{x}\left(\frac{1}{x}\right)(6se^r) = \frac{6s}{x^2}\operatorname{senh}\frac{y}{x}(xe^r - ry)$

$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \operatorname{senh}\frac{y}{x}\left(-\frac{y}{x^2}\right)(3r^2) + \operatorname{senh}\frac{y}{x}\left(\frac{1}{x}\right)(6e^r) = \frac{3}{x^2}\operatorname{senh}\frac{y}{x}(2xe^r - yr^2) = 0$

13. $u = x^2 + y^2 + z^2$; $x = r \operatorname{sen}\phi \cos\theta$; $y = r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$; $z = r\cos\phi$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} = 2x \operatorname{sen}\phi\cos\theta + 2y \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta + 2z\cos\phi$$

$$\frac{\partial u}{\partial \phi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \phi} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \phi} = 2xr\cos\phi\cos\theta + 2yr\cos\phi \operatorname{sen}\theta - 2zr \operatorname{sen}\phi$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta} = -2xr \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta + 2yr \operatorname{sen}\phi\cos\theta + 0$$

15. $u = ye^x + xe^y$; $x = \cos t$; $y = \operatorname{sen} t$

(a) $$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (ye^x + e^y)(-\operatorname{sen} t) + (e^x + xe^y)(\cos t)$$

$$= e^x(\cos t - y \operatorname{sen} t) + e^y(x\cos t - \operatorname{sen} t)$$

(b) $u = \operatorname{sen} t\, e^{\cos t} + \cos t\, e^{\operatorname{sen} t}$

$$\frac{du}{dt} = \cos t\, e^{\cos t} + \operatorname{sen} t\, e^{\cos t}(-\operatorname{sen} t) - \operatorname{sen} t\, e^{\operatorname{sen} t} + \cos t\, e^{\operatorname{sen} t}(\cos t)$$

$$= e^{\cos t}(\cos t - \operatorname{sen}^2 t) + e^{\operatorname{sen} t}(\cos^2 t - \operatorname{sen} t)$$

17. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $x = \operatorname{tg} t$; $y = \cos t$; $z = \operatorname{sen} t$; $0 < t < \frac{1}{2}\pi$

(a) $$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(\sec^2 t) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(-\operatorname{sen} t) + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(\cos t) = \frac{x\sec^2 t - y \operatorname{sen} t + z\cos t}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

(b) $u = \sqrt{\operatorname{tg}^2 t + \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{\operatorname{tg}^2 t + 1} = \sqrt{\sec^2 t} = |\sec t| = \sec t$. $\frac{du}{dt} = \sec t \operatorname{tg} t$.

19. $u = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$; $x = \ln t$; $y = e^t$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(\frac{1}{x}\right)e^t = \frac{-y}{t(x^2+y^2)} + \frac{xe^t}{x^2+y^2} = \frac{txe^t - y}{t(x^2+y^2)}$$

21. $u = \frac{x+t}{y+t}$; $x = \ln t$; $y = \ln\frac{1}{t} = -\ln t$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{y+t}\left(\frac{1}{t}\right) + \left[-\frac{x+t}{(y+t)^2}\right]\left(-\frac{1}{t}\right) + \frac{(y+t)-(x+t)}{(y+t)^2} = \frac{y+t+x+t}{t(y+t)^2} + \frac{y-x}{(y+t)^2}$$

$$= \frac{x+y+2t+ty-tx}{t(y+t)^2}$$

23. $3x^2 + y^2 + z^2 - 3xy + 4xz - 15 = 0$

$$6x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} - 3y + 4z + 4x\frac{\partial z}{\partial x} = 0;\quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3y - 6x - 4z}{4x + 2z}.\quad 2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} - 3x + 4x\frac{\partial z}{\partial y} = 0;\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3x - 2y}{4x + 2z}.$$

25. $ye^{xyz}\cos 3xz = 5$

$$ye^{xyz}\left(yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cos 3xz + ye^{xyz}(-\operatorname{sen} 3xz)\left(3z + 3x\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$$

$$(y^2e^{xyz}\cos 3xz - 3ye^{xyz}\operatorname{sen} 3xz)\left(z + x\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0;\quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z}{x}$$

$$e^{xyz}\cos 3xz + ye^{xyz}\left(xz + xy\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cos 3xz + ye^{xyz}(-\operatorname{sen} 3xz)\left(3x\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

$$(xy^2\cos 3xz - 3xy \operatorname{sen} 3xz)\frac{\partial z}{\partial y} = -(xyz+1)\cos 3xz;\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-(xyz+1)\cos 3xz}{xy^2\cos 3xz - 3xy \operatorname{sen} 3xz} = \frac{xyz+1}{3xy \operatorname{tg} 3xz - xy^2}$$

27. $z = f(bx - ay)$. Seja $u = bx - ay$. Então, $\frac{\partial z}{\partial x} = f_u \frac{\partial u}{\partial x} = bf_u$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = f_u \frac{\partial u}{\partial y} = -af_u$. Portanto,

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = a(bf_u) + b(-af_u) = 0$$

29. Em t min, seja x cm o comprimento do primeiro cateto, y cm o comprimento do segundo cateto e θ radianos a medida do ângulo oposto ao cateto com y cm. de comprimento.

Então, $\theta = \text{tg}^{-1}\frac{y}{x}$; $\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{-y}{x^2+y^2}\frac{dx}{dt} + \frac{x}{x^2+y^2}$

No instante dado $x = 10$, $\frac{dx}{dt} = 1$, $y = 12$, $\frac{dy}{dt} = -2$, e $\frac{d\theta}{dt} = \frac{-12}{244}(1) + \frac{10}{244}(-2) = -\frac{8}{61}$. Logo, a medida do ângulo é decrescente a uma taxa de $\frac{8}{61}$ rad/min.

31. Em t min, seja h cm a altura do cilindro, r cm o seu raio e $V\ cm^3$ seu volume.

$$V = \pi r^2 h;\quad \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt} = 2\pi rh\frac{dr}{dt} + \pi r^2\frac{dh}{dt}$$

Como $h = 50$, $\frac{dh}{dt} = -10$, $r = 16$, $\frac{dr}{dt} = 4$, então $\frac{dV}{dt} = 2\pi(16)(50)(4) + \pi(16)^2(-10) = 3840\pi$. Assim, no instante dado, o volume é crescente, a uma taxa de $3840\pi\ cm^3/min$.

33. $PV = kT$; $V = \frac{kT}{P}$; $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial T}\frac{dT}{dt} + \frac{\partial V}{\partial P}\frac{dP}{dt} = \frac{k}{P}\frac{dT}{dt} - \frac{kT}{P^2}\frac{dP}{dt}$.

Como $k = 1.2$, $T = 300$, $\frac{dT}{dt} = 3$, $P = 6$, $\frac{dP}{dt} = -0.1$, então $\frac{dV}{dt} = \frac{1.2}{6}(3) - \frac{1.2(300)}{6^2}(-0.1) = 1.6$.

Logo, no instante dado o volume é crescente, a uma taxa de 1.6 litros/min.

35. $u = f(x, y)$; $x = \cosh v \cos w$; $y = \operatorname{senh} v \operatorname{sen} w$

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \operatorname{senh} v \cos w\frac{\partial u}{\partial x} + \cosh v \operatorname{sen} w\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial w} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w} = -\cosh v \operatorname{sen} w\frac{\partial u}{\partial x} + \operatorname{senh} v \cos w\frac{\partial u}{\partial y}$$

37. $u = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$; $v = \text{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2};\quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}.\ \text{Portanto, } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{y}{x^2+y^2};\quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)}\cdot\frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}.\ \text{Portanto, } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

39. $u = f(x, y)$, $x = r\cos\theta$, e $y = r\operatorname{sen}\theta$. Então,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r};\quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\operatorname{sen}\theta \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta};\quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}(-r\operatorname{sen}\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}(r\cos\theta) \quad (2)$$

Multiplicando (1) por $r\cos\theta$ e (2) por $(-\operatorname{sen}\theta)$ e adicionando, obtemos

$$r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}(r\cos^2\theta + r\operatorname{sen}^2\theta);\quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}$$

Multiplicando (1) por $r\operatorname{sen}\theta$ e (2) por $\cos\theta$ e adicionando, obtemos

$$r\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial y}(r\operatorname{sen}^2\theta + r\cos^2\theta);\quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\operatorname{sen}\theta + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}$$

EXERCÍCIOS 16.7 Derivadas Parciais de Ordem Superior

1. $f(x, y) = \frac{x^2}{y} - \frac{y}{x^2}$

(a) $D_1f(x, y) = \frac{2x}{y} + \frac{2y}{x^3}$; $D_{11}f(x, y) = \frac{2}{y} - \frac{6y}{x^4}$ (b) $D_2f(x, y) = -\frac{x^2}{y^2} - \frac{1}{x^2}$; $D_{22}f(x, y) = \frac{2x^2}{y^3}$

(c) $D_{12}f(x, y) = -\frac{2x}{y^2} + \frac{2}{x^3}$; $D_{21}f(x, y) = -\frac{2x}{y^2} + \frac{2}{x^3}$

3. $f(x, y) = e^{2x}\operatorname{sen} y$

(a) $D_1f(x, y) = 2e^{2x}\operatorname{sen} y$; $D_{11}f(x, y) = 4e^{2x}\operatorname{sen} y$ (b) $D_2f(x, y) = e^{2x}\cos y$; $D_{22}f(x, y) = -e^{2x}\operatorname{sen} y$

(c) $D_{12}f(x, y) = 2e^{2x}\cos y$; $D_{21}f(x, y) = 2e^{2x}\cos y$

5. $f(x, y) = (x^2 + y^2)\ \operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}$

(a) $D_1f(x, y) = 2x\ \operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x} + (x^2 + y^2)\left(\frac{x^2}{x^2 + y^2}\right)\left(\frac{-y}{x^2}\right) = 2x\ \operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x} - y$

$D_{11}f(x, y) = 2\ \operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x} + 2x\left(\frac{x^2}{x^2 + y^2}\right)\left(\frac{-y}{x^2}\right) = 2\ \operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x} - \frac{2xy}{x^2 + y^2}$

(b) $D_2f(x, y) = 2y\ \operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x} + (x^2 + y^2)\left(\frac{x^2}{x^2 + y^2}\right)\left(\frac{1}{x}\right) = 2y\ \operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x} + x$

$D_{22}f(x, y) = 2\ \operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x} + 2y\left(\frac{x^2}{x^2 + y^2}\right)\left(\frac{1}{x}\right) = 2\ \operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x} + \frac{2xy}{x^2 + y^2}$

(c) $D_{12}f(x, y) = \frac{2x^3}{x^2 + y^2}\left(\frac{1}{x}\right) - 1 = \frac{2x^2}{x^2 + y^2} - \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

$D_{21}f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^2 + y^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) + 1 = \frac{-2y^2}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

7. $f(x, y) = 4x\operatorname{senh} y + 3y\cosh x$

(a) $D_1f(x, y) = 4\operatorname{senh} y + 3y\operatorname{senh} x$; $D_{11}f(x, y) = 3y\cosh x$

(b) $D_2f(x, y) = 4x\cosh y + 3\cosh x$; $D_{22}f(x, y) = 4x\operatorname{senh} y$

(c) $D_{12}f(x, y) = 4\cosh y + 3\operatorname{senh} x$; $D_{21}f(x, y) = 4\cosh y + 3\operatorname{senh} x$

9. $f(x, y) = e^x\cos y + \operatorname{tg}^{-1}x(\ln y)$

(a) $D_1f(x, y) = e^x\cos y + \frac{1}{1 + x^2}(\ln y)$; $D_{11}f(x, y) = e^x\cos y - \frac{2x\ln y}{(1 + x^2)^2}$

(b) $D_2f(x, y) = -e^x\operatorname{sen} y + \operatorname{tg}^{-1}x\left(\frac{1}{y}\right)$; $D_{22}f(x, y) = -e^x\cos y - \frac{\operatorname{tg}^{-1}x}{y^2}$

(c) $D_{12}f(x, y) = -e^x\operatorname{sen} y + \frac{1}{y(1 + x^2)}$; $D_{21}f(x, y) = -e^x\operatorname{sen} y + \frac{1}{y(1 + x^2)}$

11. $f(x, y) = 2x^3y + 5x^2y^2 - 3xy^2$

(a) $f_1(x, y) = 6x^2y + 10xy^2 - 3y^2$; $f_{12}(x, y) = 6x^2 + 20xy - 6y$; $f_{121}(x, y) = 12x + 20y$

(b) $f_2(x, y) = 2x^3 + 0x^2y - 6xy$; $f_{21}(x, y) = 6x^2 + 20xy - 6y$; $f_{211}(x, y) = 12x + 20y$

13. $f(x, y, z) = ye^x + ze^y + e^z$

(a) $f_x(x, y, z) = ye^x$; $f_{xz}(x, y, z) = 0$ (b) $f_y(x, y, z) = e^x + ze^y$; $f_{yz}(x, y, z) = e^y$

15. $f(w, z) = w^2 \cos e^z$

(a) $f_1(w, z) = 2w \cos e^z$; $f_{12}(w, z) = -2we^z \operatorname{sen} e^z$; $f_{121}(w, z) = -2e^z \operatorname{sen} e^z$

(b) $f_2(w, z) = -w^2e^z \operatorname{sen} e^z$; $f_{21}(w, z) = -2we^z \operatorname{sen} e^z$; $f_{212}(w, z) = -2we^z \operatorname{sen} e^z - 2we^{2z} \cos e^z$

17. $g(r, s, t) = \ln(r^2 + 4s^2 - 5t^2)$

(a) $g_1(r, s, t) = \dfrac{2r}{r^2 + 4s^2 - 5t^2}$; $g_{13}(r, s, t) = \dfrac{20rt}{(r^2 + 4s^2 - 5t^2)^2}$

$$g_{132}(r, s, t) = \frac{-2(20rt)(8s)}{(r^2 + 4s^2 - 5t^2)^3} = -\frac{320rst}{(r^2 + 4s^2 - 5t^2)^3}$$

(b) $g_{12}(r, s, t) = \dfrac{-16rs}{(r^2 + 4s^2 - 5t^2)^2}$. Usando a regra do produto, $g_{122}(r, s, t)$

$$= \frac{-16r}{(r^2 + 4s^2 - 5t^2)^2} + \frac{(-16rs)(-2)(8s)}{(r^2 + 4s^2 - 5t^2)^3} = \frac{-16r(r^2 + 4s^2 - 5t^2) + 256rs^2}{(r^2 + 4s^2 - 5t^2)^3} = \frac{192rs^2 - 16r^3 + 80rt^2}{(r^2 + 4s^2 - 5t^2)^3}$$

19. $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2(x^2 + y^2) - 2x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2(x^2 + y^2) - 2y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$ Logo, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

21. $u(x, y) = \operatorname{tg}^{-1}\dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1 + (y/x)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) + \frac{x^2 + y^2 - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2 - x^2y - y^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-2x - 2xy}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2(y^2 - x^2 - x^2y - y^3)(2x)}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{2x^3 - 6xy^2 + 2x^3y + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1 + (y/x)^2}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^3 + xy^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2xy - 2x}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2(x^3 + xy^2 - 2xy)(2y)}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{-2x^3 + 6xy^2 - 2x^3y - 2xy^3}{(x^2 + y^2)^3} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$ Logo, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

23. $u(x, y, z) = \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{(-x)(2x)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = \dfrac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$.

Analogamente, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{2y^2-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$ e $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$. Portanto,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{2x^2-y^2-z^2+2y^2-x^2-z^2+2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = 0$$

25. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$$f_1(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - (0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0$$

Se $y \neq 0$, $f_1(0, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(\Delta x, y) - f(0, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\dfrac{2(\Delta x)y}{(\Delta x)^2+y^2} - 0}{\Delta x} = \dfrac{2}{y}$.

$f_{12}(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \dfrac{f_1(0, \Delta y) - f_1(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \dfrac{\dfrac{2}{\Delta y} - 0}{\Delta y}$ que não existe.

Analogamente, $f_{21}(0, 0)$ não existe.

27. $f(x, y) = \begin{cases} x^2 \operatorname{tg}^{-1}\dfrac{y}{x} - y^2 \operatorname{tg}^{-1}\dfrac{x}{y} & \text{se } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ ou } y = 0 \end{cases}$

$$f_1(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0$$

Se $y \neq 0$, $f_1(0, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(\Delta x, y) - f(0, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{(\Delta x)^2 \operatorname{tg}^{-1}\dfrac{y}{\Delta x} - y^2 \operatorname{tg}^{-1}\dfrac{\Delta x}{y} - 0}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x) \operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{\Delta x} - y^2 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{tg}^{-1}\dfrac{\Delta x}{y}}{\Delta x} = 0 - y^2 \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{y}\bigg|_{x=0} = -y^2 \frac{1}{1+(x/y)^2}\cdot\frac{1}{y}\bigg|_{x=0} = -y$$

Logo, $f_{12}(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \dfrac{f_1(0, \Delta y) - f_1(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \dfrac{-\Delta y - 0}{\Delta y} = -1$.

Analogamente, obtemos $f_2(0, 0) = 0$ e se $x \neq 0$, $f_2(x, 0) = x$. Então,

$$f_{21}(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_2(\Delta x, 0) - f_2(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = 1$$

29. $u = f(x, y)$; $x = F(r, s)$; $y = G(r, s)$; $f_{xy} = f_{yx}$. Omitiremos os argumentos, usando simplicidade

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial r}[f_x F_s + f_y G_s] = \left(\frac{\partial}{\partial r} f_x\right) F_s + f_x F_{sr} + \left(\frac{\partial}{\partial r} f_y\right) G_s + f_y G_{sr}$$

$$= f_{xx} F_r F_s + f_{xy} F_s G_r + f_x F_{sr} + F_{yx} F_r G_s + f_{yy} G_r G_s + f_y G_{sr}$$

Como $f_{xy} = f_{yx}$, temos $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} = f_{xx} F_r F_s + f_{xy}[F_s G_r + F_r G_s] + f_{yy} G_r G_s + f_x F_{sr} + f_y G_{sr}$.

31. $u = 3xy - 4y^2,\ x = 2se^r,$ e $y = re^{-s}$

(a) $u = 3(2se^r)(re^{-s}) - 4(re^{-s})^2 = 6rse^{r-s} - 4r^2e^{-2s},\ \dfrac{\partial u}{\partial r} = 6se^{r-s} + 6rse^{r-s} - 8re^{-2s}$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 6se^{r-s} + 6se^{r-s} + 6rse^{r-s} - 8e^{-2s} = 6se^{r-s}(2 + r) - 8e^{-2s} = 12se^{r-s} + 6rse^{r-s} - 8e^{-2s}$

(b) Seja $f(x, y) = 3xy - 4y^2,\ F(r, s) = 2se^r,\ G(r, s) = re^{-s}$. Então,

$f_x(x, y) = 3y,\ f_{xx}(x, y) = 0,\ f_{xy}(x, y) = 3,\ f_y(x, y) = 3x - 8y,\ f_{yy}(x, y) = -8$

$F_r(r, s) = 2se^r,\ F_{rr}(r, s) = 2se^r;\ G_r(r, s) = e^{-s},\ G_{rr}(r, s) = 0$

Portanto, da fórmula do Exemplo 5, temos

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0[2se^r]^2 + 2(3)(2se^r)(e^{-s}) + (-8)[e^{-s}]^2 + 3y(2se^r) + (3x - 8y)(0)$

$= 12se^{r-s} - 8e^{-2s} + 6yse^r = 12se^{r-s} - 8e^{-2s} + 6se^r(re^{-s}) = 12se^{r-s} + 6rse^{r-s} - 8e^{-2s}$

(c) $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} = 3y(2se^r) + (3x - 8y)e^{-s}$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 3e^{-s}(2se^r) + 3y(2se^r) + (3\cdot 2se^r - 8\cdot e^{-s})e^{-s} = 6se^{r-s} + 3re^{-s}(2se^r) + 6se^{r-s} - 8e^{-2s}$

$= 12se^{r-s} + 6rse^{r-s} - 8e^{-2s}$

33. $u = 9x^2 + 4y^2;\ x = r\cos\theta;\ y = r \operatorname{sen}\theta$

(a) $u = 9r^2\cos^2\theta + 4r^2\operatorname{sen}^2\theta;\ \dfrac{\partial u}{\partial r} = 18r\cos^2\theta + 8r\operatorname{sen}^2\theta;\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 18\cos^2\theta + 8\operatorname{sen}^2\theta = 10\cos^2\theta + 8$

(b) Seja $f(x, y) = 9x^2 + 4y^2;\ F(r, \theta) = r\cos\theta,\ G(r, \theta) = r\operatorname{sen}\theta$.

$f_x(x, y) = 18x;\ f_{xx}(x, y) = 18;\ f_y(x, y) = 8y;\ f_{yy}(x, y) = 8$

$F_r(r, \theta) = \cos\theta,\ F_{rr}(r, \theta) = 0;\ G_r(r, \theta) = \operatorname{sen}\theta,\ G_{rr}(r, \theta) = 0$

Da fórmula do Exemplo 5, temos

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 18\cos^2\theta + 2(0)(\cos\theta)(\operatorname{sen}\theta) + 8\operatorname{sen}^2\theta + 18x(0) + 8y(0) = 18\cos^2\theta + 8\operatorname{sen}^2\theta = 10\cos^2\theta + 8$

(c) $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} = 18x\cos\theta + 8y\operatorname{sen}\theta = 18r\cos^2\theta + 8r\operatorname{sen}^2\theta$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 18\cos^2\theta + 8\operatorname{sen}^2\theta = 10\cos^2\theta + 8$

35. $u = 9x^2 + 4y^2$; $x = r\cos\theta$; $y = r\,\text{sen}\,\theta$

(a) $u = 9r^2\cos^2\theta + 4r^2\text{sen}^2\theta$; $\dfrac{\partial u}{\partial\theta} = -18r^2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta + 8r^2\text{sen}\,\theta\cos\theta = -10r^2\text{sen}\,\theta\cos\theta$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta} = -20r\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = -10r\,\text{sen}\,2\theta$

(b) Seja $f(x, y) = 9x^2 + 4y^2$, $F(r, \theta) = r\cos\theta$, $G(r, \theta) = r\,\text{sen}\,\theta$.

$f_x(x, y) = 18x$, $f_{xx}(x, y) = 18$; $f_y(x, y) = 8y$, $f_{yy}(x, y) = 8$; $f_{xy}(x, y) = 0$. $F_r(r, \theta) = \cos\theta$, $F_\theta(r, \theta) = -r\,\text{sen}\,\theta$, $F_{\theta r}(r, \theta) = -\text{sen}\,\theta$; $G_r(r, \theta) = \text{sen}\,\theta$, $G_\theta(r, \theta) = r\cos\theta$, $G_{\theta r}(r, \theta) = \cos\theta$

Da fórmula do Exercício 29, temos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta} = 18\cos\theta(-r\,\text{sen}\,\theta) + 0 + 8\,\text{sen}\,\theta(r\cos\theta) + 18x(-\text{sen}\,\theta) + 8y(\cos\theta)$$
$$= -18r\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + 8r\,\text{sen}\,\theta\cos\theta - 18\,\text{sen}\,\theta(r\cos\theta) + 8\cos\theta(r\,\text{sen}\,\theta)$$
$$= -20r\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = -10r\,\text{sen}\,2\theta$$

(c) $\dfrac{\partial u}{\partial\theta} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial\theta} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial\theta} = 18x(-r\,\text{sen}\,\theta) + 8y(r\cos\theta) = -18r\,\text{sen}\,\theta(r\cos\theta) + 8r\cos\theta(r\,\text{sen}\,\theta)$

$= -10r^2\text{sen}\,\theta\cos\theta$. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta} = 20r\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = -10r\,\text{sen}\,2\theta$.

37. Temos $\dfrac{d^2 f}{dx^2} = -\lambda^2 f(x)$, $\dfrac{dg}{dt} = -k^2\lambda^2 g(t)$ e $u = f(x)g(t)$. Então, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = g(t)\dfrac{df}{dx}$, e $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g(t)\dfrac{d^2 f}{dx^2} = g(t)[-\lambda^2 f(x)]$. Assim, $\dfrac{\partial u}{\partial t} = f(x)\dfrac{dg}{dt} = f(x)[-k^2\lambda^2 g(t)] = k^2 g(t)[-\lambda^2 f(t)] = k^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

39. $u = f(x + at) + g(x - at)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x + at)\frac{\partial}{\partial x}(x + at) + g'(x - at)\frac{\partial}{\partial x}(x - at) = f'(x + at) + g'(x - at)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x + at)\frac{\partial}{\partial x}(x + at) + g''(x - at)\frac{\partial}{\partial x}(x - at) = f''(x + at) + g''(x - at)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f'(x + at)\frac{\partial}{\partial t}(x + at) + g'(x - at)\frac{\partial}{\partial t}(x - at) = af'(x + at) - ag'(x - at)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = af''(x + at)\frac{\partial}{\partial t}(x + at) - ag''(x - at)\frac{\partial}{\partial t}(x - at) = a^2 f''(x + at) + a^2 g''(x - at) = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

EXERCÍCIOS 16.8 Condições Suficientes para a Diferenciabilidade (Suplementar)

1. $f(b, y_0) - f(a, y_0) = (b - a)D_1 f(\xi_1, y_0)$, onde ξ_1 está entre a e b. (1)

Seja $a = x_0$, $b - a = h$. Então, $b = x_0 + h$ e temos

$f(x_0 + h, y_0) - f(a, y_0) = hD_1 f(\xi_1, y_0)$, onde ξ_1 está entre x_0 e $x_0 + h$ (3).

3. $f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$; x está em $[1, 3]$; $y = 4$. $a = 1$, $b = 3$, $y_0 = 4$. $D_1 f(x, y) = 2x + 3y$.

$f(3, 4) - f(1, 4) = (3 - 1)D_1 f(\xi_1, 4)$; $(9 + 36 - 16) - (1 + 1 - 16) = 2(2\xi_1 + 2)$; $32 = 4\xi_1 + 24$; $\xi_1 = 2$

5. $f(x, y) = \dfrac{4x}{x + y}$; x está em $[0, 4]$; $y = -6$. $a = 0$, $b = 4$, $y_0 = -6$, $D_1 f(x, y) = \dfrac{4y}{(x + y)^2}$.

$f(4, -6) - f(0, -6) = (4 - 0)D_1 f(\xi_1, -6)$; $\dfrac{16}{-2} - \dfrac{0}{-6} = 4\cdot\dfrac{-24}{(\xi_1 - 6)^2}$; $-8 = \dfrac{-96}{(\xi_1 - 6)^2}$; $(\xi_1 - 6)^2 = 12$

$\xi_1 - 6 = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$. ξ_1 está em $(0, 4)$, logo, $\xi_1 = 6 - 2\sqrt{3}$.

7. $f(x, y) = \cos x + y$; x está em $[-\pi, \pi]$; $y = 4$. $a = -\pi$, $b = \pi$, $y_0 = 4$. $D_1f(x, y) = -\operatorname{sen} x$.

$f(\pi, 4) - f(-\pi, 4) = (\pi + \pi) D_1f(\xi_1, 4)$; $3 - 3 = 2\pi(-\operatorname{sen} \xi_1)$; $\operatorname{sen} \xi_1 = 0$. ξ_1 está em $(-\pi, \pi)$ logo $\xi_1 = 0$.

9. $f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$; y está em $[-2, 2]$; $x = 0$. $c = -2$, $d = 2$, $x_0 = 0$. $D_2f(x, y) = 3x - 2y$.

$f(0, 2) - f(0, -2) = (2 + 2) D_2f(0, \xi_2)$; $-4 - (-4) = 4(-2\xi_2)$; $\xi_2 = 0$.

11. $f(x, y) = \dfrac{4x}{x + y}$; y está em $[-2, 2]$; $x = 4$. $c = 2$, $d = 2$, $D_2f(x, y) = \dfrac{-4x}{(x + y)^2}$.

$f(4, 2) - f(4, -2) = (2 + 2) D_2f(4, \xi_2)$; $\dfrac{16}{6} - \dfrac{16}{2} = 4 \cdot \dfrac{-16}{(4 + \xi_2)^2}$; $\dfrac{-32}{6} = \dfrac{-64}{(4 + \xi_2)^2}$; $(4 + \xi_2)^2 = 12$

$4 + \xi_2 = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$. ξ_2 está em $(-2, 2)$ logo $\xi_2 = -4 + 2\sqrt{3}$.

13. $f(x, y) = e^y \operatorname{tg} x$; y está em $[3, 5]$; $x = \frac{1}{4}\pi$. $c = 3$, $d = 5$, $x_0 = \frac{1}{4}\pi$, $D_2f(x, y) = e^y \operatorname{tg} x$.

$f(\frac{1}{4}\pi, 5) - f(\frac{1}{4}\pi, 3) = (5 - 3) D_2f(\frac{1}{4}\pi, \xi_2)$; $e^5 - e^3 = 2 \exp \xi_2$; $\exp \xi_2 = \frac{1}{2}e^3(e^2 - 1)$

$\xi_2 = 3 + \ln[\frac{1}{2}(e^2 - 1)]$.

15. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{x^4 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Se $(x, y) \neq (0, 0)$, então

$$D_1f(x, y) = \frac{3x^2y^3(x^4 + y^4) - x^3y^3(4x^3)}{(x^4 + y^4)^2} = \frac{3x^2y^7 - x^6y^3}{(x^4 + y^4)^2} \quad e \quad D_2f(x, y) = \frac{3x^7y^2 - x^3y^6}{(x^4 + y^4)^2}$$

$$D_1f(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0 \quad e \quad D_2f(0, 0) = 0.$$

Como $x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 - y^2)^2 \geq 0$, então $2x^4 + 2y^4 \geq x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2$. Portanto,

$$|D_1f(x, y)| \leq \frac{3x^2|y^7| + x^6|y^3|}{(x^4 + y^4)^2} \leq \frac{3(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)^{7/2} + (x^2 + y^2)^3(x^2 + y^2)^{3/2}}{\frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2} = 8(x^2 + y^2)^{5/2}$$

Assim, $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} D_1f(x, y) = 0 = D_1f(0, 0)$ logo D_1f é contínua em $(0, 0)$. Analogamente, D_2f é contínua em $(0, 0)$ logo, pelo Teorema 16.5.4, é diferenciável em $(0, 0)$.

17. O Teorema 16.8.1(ii) é: Seja f uma função de duas variáveis definidas para todo x no intervalo fechado $[a, b]$ e para todo y no intervalo fechado $[c, d]$. Se $D_2f(x_0, y)$ existir para algum x_0 em $[a, b]$ e para todo y em $[c, d]$, então haverá um número ξ_2 no intervalo aberto (c, d) tal que $f(x_0, d) - f(x_0, c) = (d - c) D_2f(x_0, \xi_2)$.

Prova: Seja h a função de uma variável y definida por $h(y) = f(x_0, y)$. Então, $h'(y) = D_2f(x_0, y)$. Como $D_2f(x_0, y)$ existe para todo y em $[c, d]$, segue que $h'(y)$ existe para todo y em $[c, d]$ e, portanto, h é contínua em $[c, d]$. Assim, pelo teorema do valor médio para derivadas ordinárias, existe um número ξ_2 em (c, d) tal que

$$h'(\xi_2) = \frac{h(d) - h(c)}{d - c}; \quad D_2f(x_0, \xi_2) = \frac{f(x_0, d) - f(x_0, c)}{d - c}; \quad f(x_0, d) - f(x_0, c) = (d - c) D_2f(x_0, \xi_2)$$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 16

1. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2 - 16}$. O domínio de f é $\{(x, y) \mid x^2 + 4y^2 \geq 16\}$, que é o conjunto de todos os pontos em R^2, fora da elipse $x^2/16 + y^2/4 = 1$.

3. $f(x, y) = \ln(y - x^2)$. o domínio de f é $\{(x, y) \mid y > x^2\}$, que é o conjunto de todos os pontos em R^2, dentro da parábola $y = x^2$.

5. $f(x, y, z) = \dfrac{x}{|y| - |z|}$. $f(x, y, z)$ é definida se $|y| - |z| \neq 0$. Assim, o domínio de f é o conj. de todos os pontos (x, y, z) em R^3, exceto nos planos $y = \pm z$. A variação de f é $(-\infty, +\infty)$.

7. $f(x, y) = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}$. O domínio de f é $\{(x, y) \mid 4x^2 + 9y^2 \leq 36\}$, o conj. de todos os ponto (x, y) em R^2, dentro e sobre a elipse $x^2/9 + y^2/4 = 1$. O gráfico de $z = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}$ é a parte superior do elipsóide $x^2/9 + y^2/4 + z^2/36 = 1$.

9. $f(x, y) = 4x^{1/2}y$. Se $f = k$ temos $k = 4x^{1/2}y$. As curvas de produção constante são $y = k/4x^{1/2}$, $k = 16, 8, 4, 2$.

11. $f(x, y) = 2x^2y - 3xy^2 + 4x - 2y$

(a) $D_1f(x, y) = 4xy - 3y^2 + 4$ (b) $D_2f(x, y) = 2x^2 - 6xy - 2$

(c) $D_{11}f(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial x}(4xy - 3y^2 + 4) = 4y$ (d) $D_{22}f(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial y}(2x^2 - 6xy - 2) = -6x$

(e) $D_{12}f(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial y}(4xy - 3y^2 + 4) = 4x - 6y$ (f) $D_{21}f(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial x}(2x^2 - 6xy - 2) = 4x - 6y$

13. $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y}{3y^2}$

(a) $f_x(x, y) = \dfrac{2x}{3y^2}$ (b) $f_y(x, y) = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{(-1)(y^2) - (x^2 - y)(2y)}{(y^2)^2} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{y^2 - 2x^2y}{y^4} = \dfrac{y - 2x^2}{3y^3}$

(c) $f_{xy}(x, y) = \dfrac{(-2)2x}{3y^3} = -\dfrac{4x}{3y^3}$ (d) $f_{yx}(x, y) = \dfrac{2(-2x)}{3y^3} = -\dfrac{4x}{3y^3}$

15. $g(s, t) = \operatorname{sen}(st^2) + te^s$. (a) $D_sg(s, t) = t^2\cos(st^2) + te^s$; (b) $D_tg(s, t) = 2st\cos(st^2) + e^s$.

(c) $D_{st}g(s, t) = 2t\cos(st^2) + t^2[-2st\operatorname{sen}(st^2)] + e^s = 2t\cos(st^2) - 2st^3\operatorname{sen}(st^2) + e^s$

(d) $D_{ts}g(s, t) = 2t\cos(st^2) + 2st[-t^2\operatorname{sen}(st^2)] + e^s = 2t\cos(st^2) - 2st^3\operatorname{sen}(st^2) + e^s$

17. $f(x, y) = e^{x/y} + \ln\dfrac{x}{y} = e^{x/y} + \ln x - \ln y$

(a) $f_x(x, y) = \dfrac{1}{y}e^{x/y} + \dfrac{1}{x}$ (b) $f_y(x, y) = -\dfrac{x}{y^2}e^{x/y} - \dfrac{1}{y}$ (c) $f_{xx}(x, y) = \dfrac{1}{y^2}e^{x/y} - \dfrac{1}{x^2}$

(d) $f_{yy}(x, y) = \dfrac{2x}{y^3}e^{x/y} - \dfrac{x}{y^2}e^{x/y}\left(-\dfrac{x}{y^2}\right) + \dfrac{1}{y^2} = \left(\dfrac{2x}{y^3} + \dfrac{x^2}{y^4}\right)e^{x/y} + \dfrac{1}{y^2}$

19. $f(x, y, z) = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$

(a) $D_1f(x, y, z) = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2 - x(2x)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \dfrac{y^2 + z^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$

(b) $D_2f(x, y, z) = \dfrac{-x(2y)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \dfrac{-2xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$ (c) $D_3f(x, y, z) = \dfrac{-x(2z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \dfrac{-2xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$

21. $f(u,v,w) = \ln(u^2 + 4v^2 - 5w^2)$, $f_u(u,v,w) = \dfrac{2u}{u^2 + 4v^2 - 5w^2}$.

(a) $f_{uw}(u,v,w) = \dfrac{-(2u)(-10w)}{(u^2 + 4v^2 - 5w^2)^2} = \dfrac{20uw}{(u^2 + 4v^2 - 5w^2)^2}$

$f_{uwv}(u,v,w) = \dfrac{-2(20uv)(8v)}{(u^2 + 4v^2 - 5w^2)^3} = \dfrac{-320uvw}{(u^2 + 4v^2 - 5w^2)^3}$

(b) $f_{uv} = \dfrac{-(2u)(8v)}{(u^2 + 4v^2 - 5w^2)^2} = \dfrac{-16uv}{(u^2 + 4v^2 - 5w^2)^2}$

$f_{uvv} = -16u\left[\dfrac{1}{(u^2 + 4v^2 - 5w^2)^2} - \dfrac{2v(8v)}{(u^2 + 4v^2 - 5w^2)^3}\right] = -16u\dfrac{u^2 + 4v^2 - 5w^2 - 16v^2}{(u^2 + 4v^2 - 5w^2)^3} = \dfrac{16u(12v^2 + 5w^2 - u^2)}{(u^2 + 4v^2 - 5w^2)^3}$

23. $f(r,s,t) = \dfrac{\ln 4rs}{t^2} = \dfrac{\ln r + \ln 4s}{t^2}$

(a) $D_1 f(r,s,t) = \dfrac{1}{rt^2}$ (b) $D_{13} f(r,s,t) = \dfrac{-2}{rt^3}$ (c) $D_{131} f(r,s,t) = \dfrac{2}{r^2t^3}$

25. $w = x^2y - xy^2 + y^2z - z^2y + z^2x - x^2z$

$\dfrac{\partial w}{\partial x} = 2xy - y^2 + z^2 - 2xz$; $\dfrac{\partial w}{\partial y} = x^2 - 2yx + 2yz - z^2$; $\dfrac{\partial w}{\partial z} = y^2 - 2zy + 2zx - x^2$. Assim, $\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0$.

27. $u = y\ln(x^2 + y^2)$, $x = 2s + 3t$, e $y = 3t - 2s$.

(a) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t} = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}(3) + \left[\ln(x^2 + y^2) + \dfrac{2y^2}{x^2 + y^2}\right](3) = \dfrac{6y(x + y)}{x^2 + y^2} + 3\ln(x^2 + y^2)$

$\dfrac{\partial u}{\partial s} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s} = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}(2) + \left[\ln(x^2 + y^2) + \dfrac{2y^2}{x^2 + y^2}\right](-2) = \dfrac{4y(x - y)}{x^2 + y^2} - 2\ln(x^2 + y^2)$

(b) $u = (3t - 2s)\ln(8s^2 + 18t^2)$

$\dfrac{\partial u}{\partial t} = (3t - 2s)\dfrac{18t}{4s^2 + 9t^2} + 3\ln(8s^2 + 18t^2)$; $\dfrac{\partial u}{\partial s} = (3t - 2s)\dfrac{8s}{4s^2 + 9t^2} - 2\ln(8s^2 + 18t^2)$

29. $u = 3x^2y + 2xy - 3yz - 2z^2$; $x = e^{3rs}$; $y = r^3s^2$; $z = \ln 4$

(a) $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial r} = (6xy + 2y)(3se^{3rs}) + (3x^2 + 2x - 3z)(3r^2s^2) + (-3y - 4z)(0)$

$= 18xyse^{3rs} + 6yse^{3rs} + 9x^2r^2s^2 + 6xr^2s^2 - 9zr^2s^2$

(b) $u = 3r^3s^2e^{6rs} + 2r^3s^2e^{3rs} - 3(\ln 4)r^3s^2 - 2\ln^2 4$

$\dfrac{\partial u}{\partial r} = 9r^2s^2e^{6rs} + 18r^3s^3e^{6rs} + 6r^2s^2e^{3rs} + 6r^3s^3e^{3rs} - 9(\ln 4)r^2s^2$

$= [9(1 + 2rs)e^{6rs} + 6(1 + rs)e^{3rs} - 9\ln 4]r^2s^2$

31. $u = xy + x^2$; $x = 4\cos t$; $y = 3\,\text{sen}\,t$

(a) $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial u}{\partial t}\dfrac{dy}{dt} = (y + 2x)(-4\,\text{sen}\,t) + x(3\cos t) = 3x\cos t - 4(y + 2x)\,\text{sen}\,t$

Em $t = \frac{1}{4}\pi$, $x = 2\sqrt{2}$, $y = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ e $\dfrac{du}{dt} = 3(2\sqrt{2})(\frac{1}{2}\sqrt{2}) - 4(\frac{3}{2}\sqrt{2} + 4\sqrt{2})(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = -16$.

(b) $u = 12\,\text{sen}\,t\cos t + 16\cos^2 t = 6\,\text{sen}\,2t + 8 + 8\cos 2t$

$\dfrac{du}{dt} = 12\cos 2t - 16\,\text{sen}\,2t$. Em $t = \frac{1}{4}\pi$, $\dfrac{du}{dt} = 12\cos\frac{1}{2}\pi - 16\,\text{sen}\,\frac{1}{2}\pi = -16$

33. $f(x, y, z) = 3xy^2 - 5xz^2 - 2xyz$

(a) $\Delta f(-1, 3, 2) = f(-1 + \Delta x, 3 + \Delta y, 2 + \Delta z) - f(-1, 3, 2)$

$= 3(-1 + \Delta x)(3 + \Delta y)^2 - 5(-1 + \Delta x)(2 + \Delta z)^2 - 2(-1 + \Delta x)(3 + \Delta y)(2 + \Delta z) - 5$

(b) Quando $\Delta x = 0{,}02$, $\Delta y = -0{,}01$, e $\Delta z = -0{,}02$, então

$\Delta f(-1, 3, 2) = 3(-0{,}98)(2{,}99)^2 - 5(-0{,}98)(1{,}98)^2 - 2(-0{,}98)(2{,}99)(1{,}98) - 5 = -0{,}470$

(c) Em $(-1, 3, 2)$, $D_1 f(x, y, z) = 3y^2 - 5z^2 - 2yz = -5$, $D_2 f(x, y, z) = 6xy - 2xz = -14$,

$D_3 f(x, y, z) = -10xz - 2xy = 26$. Portanto,

$df(-1, 3, 2, \Delta x, \Delta y, \Delta z) = D_1 f(-1, 3, 2)\Delta x + D_2 f(-1, 3, 2)\Delta y + D_3 f(x, y, z)\Delta z = -5\Delta x - 14\Delta y + 26\Delta z.$

(d) $df(-1, 3, 2, 0{,}02, -0{,}01, -0{,}02) = -5(0{,}02) - 14(0{,}01) + 26(-0{,}02) = -0{,}48$

35. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(e,0)} \ln\left(\frac{x^2}{y+1}\right) = \ln\left(\lim_{(x,y)\to(e,0)} \frac{x^2}{y+1}\right) = \ln e^2 = 2$

37. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,3)} \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3x}{2y}\right) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{3x}{2y}\right) = \operatorname{sen}^{-1}\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{6}\pi$

39. Para provar $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,-2)} (3x^2 - 4y^2) = -4$, mostramos que para qualquer $\epsilon > 0$ há um $\delta > 0$ tal que

$$|(3x^2 - 4y^2) + 4| < \epsilon \text{ sempre que } 0 < \sqrt{(x-2)^2 + (y+2)} < \delta \qquad (1)$$

$$|3x^2 - 4y^2 + 4| = |3(x^2 - 4) - 4(y^2 - 4)| \le 3|x - 2||x + 2| + 4|y + 2||y - 2| \qquad (2)$$

Para obter um limite superior para: $|x + 2|$ e $|y - 2|$, restringimos $\delta \le 1$. Então, sempre que $|x - 2| \le \sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2} < \delta \le 1$, temos $-1 < x - 2 < 1$, e logo, $3 < x + 2 < 5$. Também, sempre q $|y + 2| \le \sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2} < \delta \le 1$, temos $-1 < y + 2 < 1$; $-5 < y - 2 < -3$; $3 < |y - 2| < 5$.

Portanto, sempre que $0 < \sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2} < \delta \le 1$, temos

$$3|x - 2||x + 2| + 4|y + 2||y - 2| < 3\cdot\delta\cdot 5 + 4\cdot\delta\cdot 5 = 35\delta \qquad (3)$$

Logo, se $\delta = \min(1, \tfrac{1}{35}\epsilon)$ então de (2) e (3) temos a afirmação (1).

41. $\displaystyle 0 < \left|\frac{x^3y^3}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x|^3|y|^3}{x^2+y^2} \le \frac{(x^2+y^2)^{3/2}(x^2+y^2)^{3/2}}{x^2+y^2} = (x^2+y^2)^2$. Logo, pelo teorema do confronto de limites (teorema do "sanduíche") $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} = 0$.

43. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x=0)}} \frac{x^9y}{(x^6+y^2)^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0;\quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(y=x^3)}} \frac{x^9y}{(x^6+y^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^9x^3}{(x^6+x^6)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{12}}{4x^{12}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

Como esses dois limites não são iguais, então $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^9y}{(x^6+y^2)^2}$ não existe.

45. $f(x, y) = \dfrac{x^2 + 4y^2}{x^2 - 4y^2}$. Como f é uma função racional, ela é contínua em todos os pontos em seu domínio. Assim, f é contínua em todos os pontos (x, y) em R^2 que não estejam nas retas $x = \pm 2y$.

47. $f(x, y) = \dfrac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}\pi x + \cos^2 \frac{1}{2}\pi y}$, f é contínua em todos os pontos em R^2, exceto aqueles para os quais $\cos^2 \frac{1}{2}\pi x + \cos^2 \frac{1}{2}\pi y = 0$; isto é, aqueles para os quais tanto $\cos \frac{1}{2}\pi x = 0$ como $\cos \frac{1}{2}\pi y = 0$. $\cos \frac{1}{2}\pi x = 0$ quando $x = 2n + 1$ onde n é um inteiro qualquer e $\cos \frac{1}{2}\pi y = 0$ quando $y = 2m + 1$ onde m é um inteiro qualquer. Logo, f é contínua em todos os pontos (x, y) em R^2 exceto $(x, y) = (2n + 1, 2m + 1)$ onde n e m são quaisquer inteiros.

49. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Se $(x, y) \neq (0, 0)$, f é uma função racional e, então, é contínua. Além disso, $f(0, 0) = 0$ e do Exercício 41 $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0$, e então f é contínua em $(0, 0)$. Logo, f é contínua em todos os pontos (x, y) em R^2.

51. Seja x metros o comprimento do teto, y m a sua largura e z m a altura do quarto. Se C for o custo do trabalho, então

$$C = 2(2xz + 2yz + xy) = 4xz + 4yz + 2xy; \quad dC = (4z + 2y)\,dx + (4z + 2x)\,dy + (4x + 4y)\,dz$$

Seja $x = 5$, $y = 4$, $z = 3$, $dx = dy = dz = \pm 0,005$. Então,

$$\Delta C \approx dC = 20(\pm 0,005) + 22(\pm 0,005) + 36(\pm 0,005) = \pm 0,39$$

Portanto, o maior erro na estimativa do custo de mão-de-obra é 39 centavos.

53. Seja r cm o raio de um cilindro circular reto e h cm sua altura. Se $V\ cm^3$ for o volume, então

$$V = \pi r^2 h; \quad \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt} = 2\pi r h \frac{dr}{dt} + \pi r^2 \frac{dh}{dt}$$

Quando $r = 20$, $\frac{dr}{dt} = -5$, $h = 40$, $\frac{dh}{dt} = 12$, temos $\frac{dv}{dt} = 2\pi(20)(40)(-5) + \pi(20)^2(12) = -3200\pi$. Assim, no instante dado, o volume é decrescente à taxa de $3200\pi\ cm^3/min$.

55. A lei do gás ideal estabelece que para um gás confinado, se P N/m^2 for a pressão, V m^3 será o volume e T graus for a temperatura, então

$$P = \frac{kT}{V}; \quad \frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial T}\frac{dT}{dt} + \frac{\partial P}{\partial V}\frac{dV}{dt} = \frac{k}{V}\frac{dT}{dt} - \frac{kT}{V^2}\frac{dV}{dt}$$

Se $k = 5$, $V = 80$, $T = 75$, $\frac{dV}{dt} = 3$ e $\frac{dT}{dt} = 0,3$, então $\frac{dP}{dt} = \frac{5}{80}(0,3) - \frac{5}{(80)^2}(3) = -0,158$.

Assim, no instante dado, a pressão é decrescente à taxa de $-0,158\ N/m^2/min$.

57. $f(x, y) = \dfrac{2x + y}{y^2}$. $D_1 f(x, y) = \dfrac{2}{y^2}$ e $D_2 f(x, y) = \dfrac{-4x - y}{y^3}$. Portanto,

$$\Delta f(x, y) - D_1 f(x, y)\Delta x - D_2 f(x, y)\Delta y = \frac{2(x + \Delta x) + (y + \Delta y)}{(y + \Delta y)^2} - \frac{2x + y}{y^2} - \frac{2}{y^2}\Delta x + \frac{4x + y}{y^3}\Delta y$$

$$= \frac{-4y^2\Delta x - 2y(\Delta y)^2}{y^3(y + \Delta y)^2}\Delta x + \frac{y^2\Delta y + 6xy\Delta y + 4x(\Delta y)^2 + y(\Delta y)^2}{y^3(y + \Delta y)^2}\Delta y$$

Na Definição 16.5.2 seja $\epsilon_1 = \dfrac{-4y^2\Delta x - 2y(\Delta y)^2}{y^3(y + \Delta y)^2}$ e $\epsilon_2 = \dfrac{y^2\Delta y + 6xy\Delta y + 4x(\Delta y)^2 + y(\Delta y)^2}{y^3(y + \Delta y)^2}$.

Como $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$, $\epsilon_1 \to 0$ e $\epsilon_2 \to 0$ então f é diferenciável em todos os pontos em seu domínio.

59. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{12x^2y - 3y^2}{x^2 + y} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) $f_2(x,0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x,\Delta y) - f(x,0)}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\dfrac{12x^2\Delta y - 3(\Delta y)^2}{x^2 + \Delta y} - 0}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{12x^2 - 3\Delta y}{x^2 + \Delta y} = \dfrac{12x^2}{x^2} = 12$

(b) $f_2(0,0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(0,\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\dfrac{0 - 3(\Delta y)^2}{0 + \Delta y} - 0}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} (-3) = -3$

61. $z = xy + f(x^2 + y^2)$ e $u = x^2 + y^2$. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y + \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} = y + \dfrac{\partial f}{\partial u}(2x)$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x + \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} = x + \dfrac{\partial f}{\partial u}(2y)$.

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = y\left[y + \frac{\partial f}{\partial u}(2x)\right] - x\left[x + \frac{\partial f}{\partial u}(2y)\right] = y^2 + 2xy\frac{\partial f}{\partial u} - x^2 - 2xy\frac{\partial f}{\partial u} = y^2 - x^2$$

63. $u(x,y,z) = e^{3x+4y}\,\text{sen}\,5z$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3e^{3x+4y}\,\text{sen}\,5z; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 4e^{3x+4y}\,\text{sen}\,5z; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 5e^{3x+4y}\cos 5z$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 9e^{3x+4y}\,\text{sen}\,5z; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 16e^{3x+4y}\,\text{sen}\,5z; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -25e^{3x+4y}\,\text{sen}\,5z$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = e^{3x+4y}\,\text{sen}\,5z(9 + 16 - 25) = 0$$

65. $u(x,t) = \text{sen}\,\dfrac{n\pi x}{L}\exp\left(-\dfrac{n^2\pi^2k^2}{L^2}t\right)$. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{n\pi}{L}\cos\dfrac{n\pi x}{L}\exp\left(-\dfrac{n^2\pi^2k^2}{L^2}t\right)$;

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\dfrac{n^2\pi^2}{L^2}\,\text{sen}\,\dfrac{n\pi x}{L}\exp\left(-\dfrac{n^2\pi^2k^2}{L^2}t\right)$. Então, $\dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{n^2\pi^2k^2}{L^2}\,\text{sen}\,\dfrac{n\pi x}{L}\exp\left(-\dfrac{n^2\pi^2k^2}{L}t\right) = k^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

67. $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$

$D_1f(0,0,0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{0 - 0}{\Delta x} = 0 = D_2f(0,0,0) = D_3f(0,0,0)$. Portanto,

$\Delta f(0,0,0) - D_1f(0,0,0) - D_2f(0,0,0) - D_3f(0,0,0)$

$$= \frac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2(\Delta z)^2}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2]^2} = \frac{(\Delta x)(\Delta y)^2(\Delta z)^2}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2]^2}\Delta x + 0\Delta y + 0\Delta z$$

Na Definição 16.5.7 seja $\epsilon_1 = \dfrac{(\Delta x)(\Delta y)^2(\Delta z)^2}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2]^2}$, $\epsilon_2 = 0$, $\epsilon_3 = 0$. Então,

$$0 \le |\epsilon_1| < \frac{|\Delta x|[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2][(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2]}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2]^2} = |\Delta x|$$

Logo, quando $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \to (0,0,0)$, $\epsilon_1 \to 0$. Também $\epsilon_2 \to 0$ e $\epsilon_3 \to 0$. Assim, f é diferenciável.

69. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-1/x^2}y}{e^{-2/x^2} + y^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

$D_1f(0,0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{0 - 0}{\Delta x} = 0$; $D_2f(0,0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(0,\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{0 - 0}{\Delta y} = 0$

CAPÍTULO DEZESSETE

DERIVADAS DIRECIONAIS, GRADIENTES E APLICAÇÕES DAS DERIVADAS PARCIAIS

EXERCÍCIOS 17.1 Derivadas Direcionais e Gradientes

1. $f(x, y) = 2x^2 + 5y^2$; $U = \cos \frac{1}{4}\pi i + \text{sen}\, \frac{1}{4}\pi j$

$$D_U f(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h\cos\frac{1}{4}\pi, y + h\,\text{sen}\,\frac{1}{4}\pi) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(x + \frac{1}{2}\sqrt{2}h)^2 + 5(y + \frac{1}{2}\sqrt{2}h)^2 - (2x^2 + 5y^2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2x^2 + 2\sqrt{2}hx + h^2 + 5y^2 + 5\sqrt{2}hy + \frac{5}{2}h^2 - 2x^2 - 5y^2}{h} = \lim_{h \to 0}(2\sqrt{2}x + h + 5\sqrt{2}y + \frac{5}{2}h)$$

$$= 2\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}y$$

$$D_U f(x, y) = f_x(x, y)\cos\frac{1}{4}\pi + f_y(x, y)\,\text{sen}\,\frac{1}{4}\pi = 4x(\frac{1}{2}\sqrt{2}) + 10y(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}y$$

3. $h(x, y, z) = 3x^2 + y^2 - 4z^2$; $U = \cos\frac{1}{3}\pi i + \cos\frac{1}{4}\pi j + \cos\frac{2}{3}\pi k$

$$D_U h(x, y, z) = \lim_{t \to 0} \frac{h(x + t\cos\frac{1}{3}\pi, y + t\cos\frac{1}{4}\pi, z + t\cos\frac{2}{3}\pi) - h(x, y, z)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{3tx + \frac{3}{4}t^2 + \sqrt{2}ty + \frac{1}{2}t^2 + 4tz - t^2}{t} = \lim_{t \to 0}(3x + \frac{3}{4}t + \sqrt{2}y + \frac{1}{2}t + 4z - t) = 3x + \sqrt{2}y + 4z$$

$$D_U h(x, y, z) = h_x(x, y, z)\cos\frac{1}{3}\pi + h_y(x, y, z)\cos\frac{1}{4}\pi + h_z(x, y, z)\cos\frac{2}{3}\pi = 6x(\frac{1}{2}) + 2y(\frac{1}{2}\sqrt{2}) - 8z(-\frac{1}{2})$$

$$= 3x + \sqrt{2}y + 4z$$

5. $g(x, y) = \dfrac{1}{x - y}$; $U = -\dfrac{12}{13}i + \dfrac{5}{13}j$

$$D_U g(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{g\left(x - \frac{12}{13}h, y + \frac{5}{13}h\right) - g(x, y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{\left(x - \frac{12}{13}h\right) - \left(y + \frac{5}{13}h\right)} - g(x, y)\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x - y - x + \frac{12}{13}h + y + \frac{5}{13}h}{h(x - y)\left(x - y - \frac{12}{13}h - \frac{5}{13}h\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{17}{13}h}{h(x - y)\left(x - y - \frac{17}{13}h\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{17}{13}}{(x - y)\left(x - y - \frac{17}{13}h\right)}$$

$$= \frac{17}{13(x - y)^2}$$

$$D_U(x, y) = g_x(x, y)\left(-\frac{12}{13}\right) + g_y(x, y)\left(\frac{5}{13}\right) = -\frac{1}{(x - y)^2}\left(-\frac{12}{13}\right) + \frac{1}{(x - y)^2}\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{17}{13(x - y)^2}$$

7. $f(x, y) = 4x^2 - 3xy + y^2$, $\nabla f(x, y) = f_x(x, y)i + f_y(x, y, z)j = (8x - 3y)i + (2y - 3x)j$

9. $g(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$. $\nabla g(x, y) = g_x(x, y)\mathbf{i} + g_y(x, y)\mathbf{j} = \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$

11. $f(x, y, z) = \frac{x - y}{x + z}$. $\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k} = \frac{y + z}{(x + z)^2}\mathbf{i} - \frac{1}{x + z}\mathbf{j} - \frac{x - y}{(x + z)^2}\mathbf{k}$

13. $g(x, y, z) = xe^{-2y}\sec z$

$\nabla g(x, y, z) = g_x(x, y, z)\mathbf{i} + g_y(x, y, z)\mathbf{j} + g_z(x, y, z)\mathbf{k} = e^{-2y}\sec z\,\mathbf{i} - 2xe^{-2y}\sec z\,\mathbf{j} + xe^{-2y}\sec z\ \mathrm{tg}\ z\,\mathbf{k}$

15. $f(x, y) = x^2 - 2xy^2$; $\mathbf{U} = \cos\pi\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,\pi\,\mathbf{j} = -\mathbf{i}$

$\nabla f(x, y) = (2x - 2y^2)\mathbf{i} - 4xy\mathbf{j}$; $\nabla f(1, -2) = -6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$. $D_{\mathbf{U}}f(1, -2) = \mathbf{U}\cdot\nabla f(1, -2) = -\mathbf{i}\cdot(-6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}) = 6$

17. $g(x, y) = y^2\ \mathrm{tg}^2 x$; $\mathbf{U} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$. $\nabla g(x, y) = 2y^2\ \mathrm{tg}\ x\sec^2 x\,\mathbf{i} + 2y\ \mathrm{tg}^2 x\,\mathbf{j}$.

$\nabla g(\frac{1}{3}\pi, 2) = 8\ \mathrm{tg}\ \frac{1}{3}\pi\sec^2\frac{1}{3}\pi\,\mathbf{i} + 4\ \mathrm{tg}^2\frac{1}{3}\pi\,\mathbf{j} = 8(\sqrt{3})(2)^2\mathbf{i} + 4(\sqrt{3})^2\mathbf{j} = 32\sqrt{3}\,\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$

$D_{\mathbf{U}}g(\frac{1}{3}\pi, 2) = \mathbf{U}\cdot\nabla g(\frac{1}{3}\pi, 2) = (-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j})\cdot(32\sqrt{3}\,\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) = -48 + 6 = -42$

19. $h(x, y, z) = \cos(xy) + \mathrm{sen}(xy)$; $\mathbf{U} = -\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$

$\nabla h(x, y, z) = h_x(x, y, z)\mathbf{i} + h_y(x, y, z)\mathbf{j} + h_z(x, y, z)\mathbf{k}$

$= -y\,\mathrm{sen}(xy)\,\mathbf{i} + [-x\,\mathrm{sen}(xy) + z\cos(yz)]\mathbf{j} + y\cos(yz)\mathbf{k}$

$\nabla h(2, 0, -3) = 0\mathbf{i} + [-2\cdot 0 - 3\cdot 1]\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = -3\mathbf{j}$

$D_{\mathbf{U}}h(2, 0, -3) = \mathbf{U}\cdot\nabla h(2, 0, -3) = (-\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k})\cdot(-3\mathbf{j}) = -2$

21. $f(x, y) = e^{-3x}\cos 3y$; $\mathbf{U} = \cos(-\frac{1}{12}\pi)\mathbf{i} + \mathrm{sen}(-\frac{1}{12}\pi)\mathbf{j}$

$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} = -3e^{-3x}\cos 3y\,\mathbf{i} - 3e^{-3x}\mathrm{sen}\,3y\,\mathbf{j}$. $\nabla f(-\frac{1}{12}\pi, 0) = -3e^{\pi/4}\mathbf{i}$.

$D_{\mathbf{U}}f(-\frac{1}{12}\pi, 0) = [\cos(-\frac{1}{12}\pi)\mathbf{i} + \mathrm{sen}(-\frac{1}{12}\pi)\mathbf{j}]\cdot(-3e^{\pi/4}\mathbf{i}) = -3e^{\pi/4}\cos\frac{1}{12}\pi$

23. $f(x, y) = x^2 - 4y$; $\mathbf{U} = \cos\frac{1}{3}\pi\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,\frac{1}{3}\pi\,\mathbf{j} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathbf{j}$

(a) $\nabla f(x, y) = 2x\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$; $\nabla f(-2, 2) = -4\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

(b) $D_{\mathbf{U}}f(-2, 2) = (\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathbf{j})\cdot(-4\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) = -2 - 2\sqrt{3}$

25. $f(x, y, z) = y^2 + z^2 - 4xz$; $\mathbf{U} = \frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{6}{7}\mathbf{j} + \frac{3}{7}\mathbf{k}$

(a) $\nabla f(x, y, z) = -4z\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + (2z - 4x)\mathbf{k}$; $\nabla f(-2, 1, 3) = -12\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 14\mathbf{k}$

(b) $D_{\mathbf{U}}f(-2, 1, 3) = \left(\frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{6}{7}\mathbf{j} + \frac{3}{7}\mathbf{k}\right)\cdot(-12\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 14\mathbf{k}) = -\frac{24}{7} - \frac{12}{7} + \frac{42}{7} = \frac{6}{7}$

27. $f(x, y) = x^2 - 4y$. As curvas de nível de f em 8, 4, 0, −4, e −8 são, respectivamente, as parábolas $x^2 - 4y = 8$, $x^2 - 4y = 4$, $x^2 - 4y = 0$, $x^2 - 4y = -4$, e $x^2 - 4y = -8$.

29. $f(x, y) = e^x \operatorname{tg}^{-1} y$; $P = (0, 1)$; $Q = (3, 5)$. $V(\overrightarrow{PQ}) = \langle 3 - 0, 5 - 1\rangle = \langle 3, 4\rangle$; $\|V(\overrightarrow{PQ})\| = \sqrt{9 + 16} = 5$

Portanto, um vetor unitário na direção e sentido de $\overrightarrow{PQ}$ é $U = \frac{3}{5}i + \frac{4}{5}j$.

$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)i + f_y(x, y)j = e^x \operatorname{tg}^{-1} y i + \frac{e^x}{1 + y^2}j$; $\nabla f(0, 1) = \frac{\pi}{4}i + \frac{1}{2}j$.

$$D_U f(0, 1) = \left(\frac{3}{5}i + \frac{4}{5}j\right)\cdot\left(\frac{\pi}{4}i + \frac{1}{2}j\right) = \frac{3}{20}\pi + \frac{2}{5} \approx 0,871$$

O máximo de $D_U f(0, 1)$ é $\|\nabla f(0, 1)\| = \sqrt{\frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\sqrt{\pi^2 + 4} \approx 0,931$.

31. $f(x, y, z) = x - 2y + z^2$; $P = (3, 1, -2)$; $Q = (10, 7, 4)$

$$V(\overrightarrow{PQ}) = \langle 10 - 3, 7 - 1, 4 + 2\rangle = \langle 7, 6, 6\rangle; \quad \|V(\overrightarrow{PQ})\| = \sqrt{49 + 36 + 36} = \sqrt{121} = 11$$

Portanto, um vetor unitário na direção e sentido de $\overrightarrow{PQ}$ é $U = \frac{7}{11}i + \frac{6}{11}j + \frac{6}{11}k$.

$\nabla f(x, y, z) = i - 2j + 2zk$. Logo, $\nabla f(3, 1, -2) = i - 2j - 4k$. Portanto,

$$D_U f(3, 1, -2) = \left(\frac{7}{11}i + \frac{6}{11}j + \frac{6}{11}k\right)\cdot(i - 2j - 4k) = \frac{7}{11} - \frac{12}{11} - \frac{24}{11} = -\frac{29}{11} \approx -2,64$$

O máximo de $D_U f(3, 1, -2)$ é $\|\nabla f(3, 1, -2)\| = \sqrt{1 + 4 + 16} = \sqrt{21} \approx 4,58$.

33. $f(x, y) = e^{2y} \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{3x}$. $\nabla f(x, y) = f_x(x, y)i + f_y(x, y)j = -\frac{3ye^{2y}}{9x^2 + y^2}i + \left(2e^{2y} \operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{3x} + \frac{3xe^{2y}}{9x^2 + y^2}\right)j$

$\nabla f(1, 3) = -\frac{1}{2}e^6 i + \left(\frac{1}{2}\pi e^6 + \frac{1}{6}e^6\right)j$. Seja $U = \cos\theta i + \operatorname{sen}\theta j$. Procuramos os valores de θ para os quais $\nabla f(1, 3)\cdot U = 0$; $-\frac{1}{2}e^6\cos\theta + \left(\frac{1}{2}\pi e^6 + \frac{1}{6}e^6\right)\operatorname{sen}\theta = 0$; $-\cos\theta + \left(\pi + \frac{1}{3}\right)\operatorname{sen}\theta = 0$; $\operatorname{tg}\theta = \frac{3}{3\pi + 1}$

Portanto, $\theta = \operatorname{tg}^{-1}\frac{3}{3\pi + 1}$ e $\theta = \operatorname{tg}^{-1}\frac{3}{3\pi + 1} - \pi$.

35. $T = 3x^2 + 2xy$

(a) $\nabla T(x, y) = T_x(x, y)i + T_y(x, y)j = (6x + 2y)i + 2xj$; $\nabla T(3, -6) = 6i + 6j$. O número de degraus por metro na taxa de variação máxima de T em $(3, -6)$ é

$$\|\nabla T(3, -6)\| = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

(b) A taxa de variação máxima de T ocorre na direção e sentido de $\nabla T(3, -6) = 6i + 6j$. Um vetor unitário nesta direção e sentido é $\frac{1}{2}\sqrt{2}i + \frac{1}{2}\sqrt{2}j$.

37. $V = e^{-2x}\cos 2y$

(a) $U = \cos\frac{1}{6}\pi i + \operatorname{sen}\frac{1}{6}\pi j = \frac{1}{2}\sqrt{3}i + \frac{1}{2}j$. $\nabla V(x, y) = V_x(x, y)i + V_y(x, y)j = -2e^{-2x}\cos 2y i - 2e^{-2x}\operatorname{sen} 2y j$

$\nabla V(0, \frac{1}{4}\pi) = -2e^0\cos\frac{1}{2}\pi i - 2e^0\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi j = -2j$. A taxa de variação de V no ponto $(0, \frac{1}{4}\pi)$ na direção e sentido de U é $D_U V(0, \frac{1}{4}\pi) = U\cdot\nabla V(0, \frac{1}{4}\pi) = (\frac{1}{2}\sqrt{3}i + \frac{1}{2}j)\cdot(-2j) = -1$.

(b) A taxa de variação máxima de V em $(0, \frac{1}{4}\pi)$ ocorre na direção e sentido de $\nabla V(0, \frac{1}{4}\pi)$. A direção e sentido é o vetor unitário $-j$ e seu módulo é 2.

EXERCÍCIOS 17.2 Planos Tangentes e Normais a Superfícies

1. A superfície dada é $x^2 + y^2 + z^2 = 17$. Seja $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 7$.

   $\nabla f(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$; $\nabla f(2, -2, 3) = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$. Em $(2, -2, 3)$,

   uma equação do plano tangente é $4(x - 2) - 4(y + 2) + 6(z - 3) = 0$; $2x - 2y + 3z = 17$;

   As equações da reta normal são $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-3}{3}$.

3. A superfície dada é: $x^2 + y^2 - 3z = 2$. Seja $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 3z - 2$.

   $\nabla f(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; $\nabla f(-2, -4, 6) = -4\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. Em $(-2, -4, 6)$,

   uma equação do plano tangente é $-4(x + 2) - 8(y + 4) - 3(z - 6) = 0$; $4x + 8y + 3z + 22 = 0$;

   as equações da reta normal são $\dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y+4}{8} = \dfrac{z-6}{3}$.

5. A superfície dada é $y = e^x \cos z$. Seja $f(x, y, z) = e^x \cos z - y$.

   $\nabla f(x, y, z) = e^x \cos z\,\mathbf{i} - \mathbf{j} - e^x \operatorname{sen} z\,\mathbf{k}$; $\nabla f(1, e, 0) = e\mathbf{i} - \mathbf{j} + 0\mathbf{k}$. Em $(1, e, 0)$,

   uma equação do plano tangente é $e(x - 1) - (y - e) + 0(z - 0) = 0$; $ex - y = 0$;

   as equações da reta normal são $\dfrac{x-1}{e} = \dfrac{y-e}{-1}$, $z = 0$.

7. A superfície dada é $x^2 = 12y$. Seja $f(x, y, z) = x^2 - 12y$.

   $\nabla(x, y, z) = 2x\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$; $\nabla f(6, 3, 3) = 12\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$. Em $(6, 3, 3)$,

   uma equação do plano tangente é $12(x - 3) - 12(y - 3) + 0(z - 3) = 0$; $x - y - 3 = 0$;

   as equações da reta normal são $\dfrac{x-6}{1} = \dfrac{y-3}{-1}$, $z = 3$.

9. A superfície dada é $x^{1/2} + y^{1/2} + z^{1/2} = 4$. Seja $f(x, y, z) = x^{1/2} + y^{1/2} + z^{1/2} - 4$.

   $\nabla f(x, y, z) = \frac{1}{2}x^{-1/2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}y^{-1/2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}z^{-1/2}\mathbf{k}$; $\nabla f(4, 1, 1) = \frac{1}{4}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$. Em $(4, 1, 1)$,

   uma equação do plano tangente é $\frac{1}{4}(x - 4) + \frac{1}{2}(y - 1) + \frac{1}{2}(z - 1) = 0$; $x + 2y + 2z - 8 = 0$;

   as equações da reta normal são $\dfrac{x-4}{\frac{1}{4}} = \dfrac{y-1}{\frac{1}{2}} = \dfrac{z-1}{\frac{1}{2}}$; $2(x - 4) = y - 1 = z - 1$.

11. A superfície dada é $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = 14$. Seja $f(x, y, z) = x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} - 14$.

    $\nabla f(x, y, z) = \dfrac{2}{3}x^{-1/3}\mathbf{i} + \dfrac{2}{3}y^{-1/3}\mathbf{j} + \dfrac{2}{3}z^{-1/3}\mathbf{k}$; $\nabla f(-8, 27, 1) = -\dfrac{1}{3}\mathbf{i} + \dfrac{2}{9}\mathbf{j} + \dfrac{2}{3}\mathbf{k}$. Em $(-8, 27, 1)$,

    uma equação do plano tangente é $-\dfrac{1}{3}(x + 8) + \dfrac{2}{9}(y - 27) + \dfrac{2}{3}(z - 1) = 0$; $3x - 2y - 6z + 84 = 0$;

    as equações da reta normal são $\dfrac{x+8}{-3} = \dfrac{y-27}{2} = \dfrac{z-1}{6}$.

13. As superfícies são $x^2 + y^2 - z = 8$ e $x - y^2 + z^2 = -2$. Seja $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 8$ e

    $G(x, y, z) = x - y^2 + z^2 + 2$. Então, $\nabla F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - \mathbf{k}$ e $G(x, y, z) = \mathbf{i} - 2y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$.

    $N_1 = \nabla F(2, -2, 0) = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$; $N_2 = \nabla G(2, -2, 0) = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$. $N_1 \times N_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -4 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 20\mathbf{k}$.

    As equações da reta tangente da curva de intersecção são $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{20}$.

15. As superfícies dadas são $y = x^2$ e $y = x^2$ e $y = 16 - z^2$. Seja $F(x, y, z) = x^2 - y$ e $G(x, y, z) = y^2 + z^2 - 16$. Então, $\nabla F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} - \mathbf{j}$ e $\nabla G(x, y, z) = \mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$.

$\mathbf{N}_1 = \nabla F(4, 16, 0) = 8\mathbf{i} - \mathbf{j}$; $\mathbf{N}_2 = \nabla G(4, 16, 0) = \mathbf{j}$. $\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 8 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 8\mathbf{k}$.

As equações da reta tangente da curva de intersecção são $x = 4$, $y = 16$.

17. As superfícies dadas são $y = e^x \operatorname{sen} 2\pi z + 2$ e $z = y^2 - \ln(x + 1) - 3$.

Seja $F(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} 2\pi z - y + 2$ e $G(x, y, z) = y^2 - \ln(x + 1) - z - 3$.

$\nabla F(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} 2\pi z\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\pi e^x \cos 2\pi z\mathbf{k}$ e $\nabla G(x, y, z) = -\dfrac{1}{x + 1}\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

$\mathbf{N}_1 = \nabla F(0, 2, 1) = -\mathbf{j} + 2\pi\mathbf{k}$; $\mathbf{N}_2 = \nabla G(0, 2, 1) = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$. $\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -1 & 2\pi \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (1 - 8\pi)\mathbf{i} - 2\pi\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

As equações da reta tangente da curva de intersecção são $\dfrac{x}{1 - 8\pi} = \dfrac{y - 2}{-2\pi} = \dfrac{z - 1}{-1}$.

19. As superfícies dadas são $x^2 + z^2 + 4y = 0$ e $x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 7 = 0$.

Seja $F(x, y, z) = x^2 + z^2 + 4y$ e $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 7$.

$\nabla F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ e $\nabla G(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + (2z - 6)\mathbf{k}$.

$\mathbf{N}_1 = \nabla F(0, -1, 2) = 0\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ e $\mathbf{N}_2 = \nabla G(0, -1, 2) = 0\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k} = -\frac{1}{2}\mathbf{N}_1$.

Logo, $\mathbf{N}_1$ é paralelo a $\mathbf{N}_2$; e, portanto, as superfícies são tangentes em $(0, -1, 2)$. As superfícies tangentes podem ter uma curva de intersecção, mas somando a primeira equação a duas vezes a segunda, obtemos $3x^2 + 2y^2 + 4y + 3z^2 - 2z + 14 = 0$; $3x^2 + 2(y + 1)^2 + 3(z - 2)^2 = 0$, e, portanto, as superfícies interceptam-se apenas em $(0, -1, 2)$.

21. As esferas dadas são $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e $(x - b)^2 + y^2 + z^2 = (b - a)^2$.

Seja $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$ e $G(x, y, z) = (x - b)^2 + y^2 + z^2 - (b - a)^2$.

$\nabla F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ e $\nabla G(x, y, z) = 2(x - b)\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$. $\mathbf{N}_1 = \nabla F(a, 0, 0) = 2a\mathbf{i}$ e $\mathbf{N}_2 = \nabla G(a, 0, 0) = 2(a - b)\mathbf{i} = \dfrac{a - b}{a}\mathbf{N}_1$. Logo, $\mathbf{N}_1$ é paralela a $\mathbf{N}_2$, e, portanto, as esferas são tangentes em $(a, 0, 0)$. As esferas tangentes não podem ter uma curva de intersecção.

23. A superfície $x^2 - 2yz + y^3 = 4$ será perpendicular a todo membro da família de superfícies $x^2 + (4c - 2)y^2 - cz^2 + 1 = 0$ no ponto $(1, -1, 2)$ se os seus valores normais forem ortogonais.

Seja $F(x, y, z) = x^2 - 2yz + y^3 - 4$ e $G(x, y, z) = x^2 + (4c - 2)y^2 - cz^2 + 1$.

$\nabla F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + (3y^2 - 2z)\mathbf{j} - 2y\mathbf{k}$ e $\nabla G(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 4(2c - 1)y\mathbf{j} - 2cz\mathbf{k}$.

Seja $\mathbf{N}_1 = \nabla F(1, -1, 2) = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ e $\mathbf{N}_2 = \nabla G(1, -1, 2) = 2\mathbf{i} - 4(2c - 1)\mathbf{j} - 4c\mathbf{k}$. Então,

$\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2 = 4 + 4(2c - 1) - 8c = 0$ logo $\mathbf{N}_1$ e $\mathbf{N}_2$ são ortogonais.

EXERCÍCIOS 17.3 Extremos de Funções de Duas Variáveis

1. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6x^2 + y - 1$. $f_x(x, y) = 3x^2 - 12x$ $f_y(x, y) = 2y + 1$

$f_{xx}(x, y) = 6x - 12$ $f_{yy}(x, y) = 2$ $f_{xy}(x, y) = 0$

$f_x(x, y) = 0$: $3x^2 - 12x = 0$; $3x(x - 4) = 0$; $x = 0$, $x = 4$. $f_y(x, y) = 0$: $2y + 1 = 0$; $y = -\frac{1}{2}$

Os pontos críticos de f são $(0, -\frac{1}{2})$ e $(4, -\frac{1}{2})$. Os resultados da aplicação do teste da derivada segunda nesses pontos, estão resumidos na tabela a seguir.

Pontos críticos	f_{xx}	f_{yy}	f_{xy}	$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$	f	Conclusão
$(0, -\frac{1}{2})$	-12	2	0	-24		não tem extremo relativo
$(4, -\frac{1}{2})$	12	2	0	24	$-\frac{133}{4}$	valor mínimo relativo

3. $f(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{64}{y} + xy$. $f_x(x, y) = -\frac{1}{x^2} + y$ $f_y(x, y) = \frac{64}{y^2} + x$

$f_{xx}(x, y) = \frac{2}{x^3}$ $f_{yy}(x, y) = -\frac{128}{y^3}$ $f_{xy}(x, y) = 1$

$f_x(x, y) = 0$: $y = \frac{1}{x^2}$. $f_y = 0$: $64 + xy^2 = 0$; $64 + \frac{1}{x^3} = 0$; $x = -\frac{1}{4}$, $y = 16$. Ponto crítico : $(-\frac{1}{4}, 16)$

Ponto crítico	f_{xx}	f_{yy}	f_{xy}	$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$	f	Conclusão
$(-\frac{1}{4}, 16)$	-128	$-\frac{1}{32}$	1	3	-12	valor máximo relativo

5. $f(x, y) = e^{xy}$. $f_x(x, y) = ye^{xy}$ $f_y(x, y) = xe^{xy}$

$f_{xx}(x, y) = y^2e^{xy}$ $f_{yy}(x, y) = x^2e^{xy}$ $f_{xy}(x, y) = e^{xy} + xye^{xy}$

$f_x = 0$: $ye^{xy} = 0$; $y = 0$. $f_y = 0$: $xe^{xy} = 0$; $x = 0$. Ponto crítico: $(0, 0)$

Em $(0, 0)$, $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -1$; logo , f não tem um extremo relativo.

7. $f(x, y) = 4xy^2 - 2x^2y - x$. $f_x(x, y) = 4y^2 - 4xy - 1$ $f_y = 8xy - 2x^2$

$f_{xx}(x, y) = -4y$ $f_{yy}(x, y) = 8x$ $f_{xy}(x, y) = 8y - 4x$

$f_x(x, y) = 0$: $8xy - 2x^2 = 0$; $2x(4y - x) = 0$; $x = 0$ ou $x = 4y$

$f_y(x, y) = 0$: $4y^2 - 4xy - 1 = 0$. Se $x = 0$, $4y^2 - 1 = 0$; $y = \pm\frac{1}{2}$.

Se $x = 4y$, $4y^2 - 16y^2 - 1 = 0$; $12y^2 = -1$; Não há solução. Pontos críticos: $(0, \frac{1}{2})$ e $(0, -\frac{1}{2})$.

Ponto crítico	f_{xx}	f_{yy}	f_{xy}	$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$	Conclusão
$(0, \frac{1}{2})$	-2	0	4	-16	não tem extremo relativo
$(0, -\frac{1}{2})$	2	0	-4	-16	não tem extremo relativo

9. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3y^2 - 3x - 9y + 2$ $f_x(x, y) = 3x^2 - 3$ $f_y(x, y) = 3y^2 + 6y - 9$

$f_{xx}(x, y) = 6x$ $f_{yy}(x, y) = 6y + 6$ $f_{xy}(x, y) = 0$

$f_{xx}(x, y) = 0$: $x^2 - 1 = 0$; $x = \pm 1$. $f_{yy}(x, y) = 0$: $y^2 + 2y - 3 = 0$; $(y - 1)(y + 3) = 0$; $y = 1, -3$

Ponto crítico	f_{xx}	f_{yy}	f_{xy}	$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$	f	Conclusão
(1, 1)	6	12	0	72	-5	valor mínimo relativo
(1, -3)	6	-12	0	-72		não tem extremo relativo
(-1, 1)	-6	12	0	-72		não tem extremo relativo
(-1, -3)	-6	-12	0	72	31	valor máximo relativo.

11. $f(x, y) = \text{sen}(x + y) + \text{sen } x + \text{sen } y; \quad 0 \le x \le 2\pi; \quad 0 \le y \le 2\pi$

$f_x(x, y) = \cos(x + y) + \cos x \qquad f_y(x, y) = \cos(x + y) + \cos y$

$f_{xx}(x, y) = -\text{sen}(x + y) - \text{sen } x \qquad f_{yy}(x, y) = -\text{sen}(x + y) - \text{sen } y \quad f_{xy}(x, y) = -\text{sen}(x + y)$

$f_x(x, y) = 0$: $\cos(x + y) + \cos x = 0$. $f_y(x, y) = 0$: $\cos(x + y) + \cos y = 0$.

Logo $\cos x = \cos y$ de modo que $y = x$ ou $y = 2\pi - x$.

Se $y = x$, $\cos 2x + \cos x = 0$; $2\cos^2 x - 1 + \cos x = 0$; $(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$; $\cos x = \frac{1}{2}$,

$x = y = \frac{1}{3}\pi$, $x = y = \frac{5}{3}\pi$ ou $\cos x = -1$, $x = y = \pi$.

Se $y = 2\pi - x$, $\cos 2\pi + \cos x = 0$; $\cos x = -1$; $x = \pi$, $y = \pi$.

Ponto crítico	f_{xx}	f_{yy}	f_{xy}	$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$	f	Conclusão
$(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi)$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$	máximo relativo
$(\frac{5}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi)$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{9}{4}$	$-\frac{3}{2}\sqrt{3}$	mínimo relativo
(π, π)	0	0	0	0	0	não há conclusão

Como $f(\pi, \pi) = 0$ e $f(x, y)$ têm valores positivos e negativos em pontos próximos a (π, π), f não tem um extremo relativo em (π, π).

Nota: Uma função de duas variáveis definida em um conjunto que não é fechado nem limitado, pode não ter máximo absoluto e, apesar disso, ter um máximo relativo em seu único ponto crítico. Em tal caso, precisamos mostrar que o extremo desejado não pode ocorrer fora de um certo conjunto fechado e limitado, nem em sua fronteira.

13. Sejam x, y, e z os três números positivos cuja soma é 24. Seja P o seu produto

$x + y + z = 24$; $z = 24 - x - y$. Então, $P(x, y) = xyz = xy(24 - x - y) = 24xy - x^2y - xy^2$.

Se $x \ge 24$ ou $y \ge 24$ ou $x = 0$ ou $y = 0$, então $P \le 0$. Logo, o máximo de P ocorre em um ponto crítico dentro do quadrado e $0 \le x \le 24$, $0 \le y \le 24$.

$P_x(x, y) = 24y - 2xy - y^2 \qquad P_y(x, y) = 24x - x^2 - 2xy$

$P_x(x, y) = 0$: $y(24 - 2x - y) = 0$. $P_y(x, y) = 0$: $x(24 - x - 2y) = 0$.

Como $x > 0$, $y > 0$, o único ponto crítico é $(8, 8)$ que dá o máximo absoluto.

Então, $z = 8$, e, portanto, os três números positivos são 8, 8, e 8.

15. Seja w unidades a distância do ponto $(1, -2, 3)$ a um ponto (x, y, z) no plano $3x + 2y - z = 5$; $z = 3x + 2y - 5$. Então,

$$w^2 = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2; \quad w^2 = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (3x + 2y - 8)^2$$

Como w será um mínimo quando w^2 for um mínimo, procuramos o valor mínimo absoluto de $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (3x + 2y - 8)^2$. Como $f(x, y) \ge 100$ quando $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 \ge 100$ o mínimo deve ocorrer em um ponto crítico dentro da circunferência $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 100$.

$f_x(x, y) = 2(x - 1) + 2(3x + 2y - 8)(3) = 20x + 12y - 50$. $f_x(x, y) = 0$: $10x + 6y = 25$

$f_y(x, y) = 2(y + 2) + 2(3x + 2y - 8)(2) = 12x + 10y - 28$. $f_y(x, y) = 0$: $6x + 5y = 14$

O único ponto crítico é $\left(\frac{41}{14}, -\frac{5}{7}\right)$ que deve ser o mínimo absoluto. Então, $z = \frac{33}{14}$.

Portanto, o ponto no plano mais próximo a $(1, -2, 3)$ é $\left(\frac{41}{14}, -\frac{5}{7}, \frac{33}{14}\right)$ e a distância mínima é $\sqrt{\left(\frac{41}{14} - 1\right)^2 + \left(-\frac{5}{7} + 2\right)^2 + \left(\frac{33}{14} - 3\right)^2} = \frac{9}{14}\sqrt{14}$.

17. Seja w unidades a distância do ponto $P(x, y, z)$ do elipsóide $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4$ à origem. Então, $y^2 + z^2 = 1 - \frac{1}{4}x^2$ de modo que $w^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (1 - \frac{1}{4}x^2) = \frac{3}{4}x^2 + 1$ que tem um valor mínimo absoluto de 1 quando $x = 0$. Como P está no elipsóide e no plano $x - 4y - z = 0$, encontramos as coordenadas y e z de P resolvendo o sistema $y^2 + z^2 = 1$, $4y + z = 0$. Então, $z = -4y$; $y^2 + 16y^2 = 1$; $y = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$, $z = \mp\frac{4}{\sqrt{17}}$.

Os pontos são $\left(0, \frac{1}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$ e $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}\right)$.

19. $R = x^2y^3(c - x - y) = cx^2y^3 - x^3y^3 - x^2y^4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Se $x \geq c$, $y \geq c$, $x = 0$, ou $y = 0$, então $R \leq 0$. Logo, o máximo que procuramos deve ocorrer em um ponto crítico dentro do quadrado $0 \leq x \leq c$, $0 \leq y \leq c$. $R_x = 2cxy^3 - 3x^2y^3 - 2xy^4$ e $R_y = 3cx^2y^2 - 3x^3y^2 - 4x^2y^3$.

$R_x = 0$: $xy^3(2c - 3x - 2y) = 0$; $3x + 2y = c$. $R_y = 0$: $x^2y^2(3c - 3x - 4y) = 0$; $3x + 4y = 3c$

O único ponto crítico é quando $x = \frac{1}{3}c$, $y = \frac{1}{2}c$. Logo, a resposta máxima é quando $\frac{1}{3}c$ mg da droga A e $\frac{1}{2}c$ mg da droga B são injetadas.

21. Seja 2ℓ, $2w$ e $2h$ o número de unidades de comprimento, largura e altura, respectivamente do paralelepípedo P. Então, no primeiro octante, o vértice de P está em (ℓ, w, h). Desde que esse ponto não esteja no elipsóide $36\ell^2 + 9w^2 + 4h^2 = 36$; $h^2 = \frac{9}{4}(4 - 4\ell^2 - w^2)$. Se V unidades for o volume de P, então $V = (2\ell)(2w)(2h) = 8\ell wh$. Seja

$$f(\ell, w) = V^2 = 64\ell^2w^2h^2 = 144\ell^2w^2(4 - 4\ell^2 - w^2) = 144(4\ell^2w^2 - 4\ell^4w^2 - \ell^2w^4)$$

O domínio de f é a região fechada limitada pela elipse $4\ell^2 + w^2 = 4$, e $f(\ell, w) = 0$ na fronteira. Logo, o máximo que procuramos deve ocorrer em um ponto crítico interior

$$f_\ell(\ell, w) = 144(8\ell w^2 - 16\ell^3w^2 - 2\ell w^4), \quad f_w(\ell, w) = 144(8\ell^2w - 8\ell^4w - 4\ell^2w^3)$$

$f_\ell(\ell, w) = 0$: $288\ell w^2(4 - 8\ell^2 - w^2) = 0$; $8\ell^2 + w^2 = 4$ ($\ell = 0$ ou $w = 0$ dá um ponto (na fronteira).

$f_w(\ell, w) = 0$: $576\ell^2w(2 - 2\ell^2 - w^2) = 0$; $2\ell^2 + w^2 = 2$

Logo, $\ell^2 = \frac{1}{3}$ e $w^2 = \frac{4}{3}$. O único ponto crítico, e então o valor máximo absoluto, ocorre quando $\ell = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e $w = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Então, $h^2 = \frac{9}{4}\left(4 - \frac{4}{3} - \frac{4}{3}\right) = 3$; $h = \sqrt{3}$ e o volume máximo é

$8\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)(\sqrt{3}) = \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{16}{3}\sqrt{3}$.

23. Seja ℓ cm, w cm e h cm o comprimento, a largura e a altura, respectivamente, da caixa. Seja C centavos o custo de materiais. Então,

$$\ell wh = 16; \quad h = \frac{16}{\ell w} \quad e \quad C = 18\ell w + 16wh + 12\ell h = 18\ell w + \frac{256}{\ell} + \frac{192}{w}$$

Se $\ell \geq 1000$ e $w \geq 0,1$, ou $\ell \geq 0,1$ e $w \geq 1000$, Então $C \geq 18(1000)(0,1) = 1800$. Se $\ell \leq 0,1$, então $C \geq 256/(0,1) = 2560$; se $w \leq 1$, então $C \geq 192/(0,1) = 1920$. Logo, o valor mínimo absoluto de C deve ocorrer em um ponto crítico no interior do quadrado $0,1 \leq \ell \leq 1000$, $0,1 \leq w \leq 1000$.

$$\frac{\partial C}{\partial \ell} = 18w - \frac{256}{\ell^2} = 0; \quad w = \frac{64}{9\ell^2}. \quad \frac{\partial C}{\partial w} = 18\ell - \frac{192}{w^2} = 0; \quad 18\ell - 192\left(\frac{9\ell^2}{64}\right)^2; \quad \ell^3 = \frac{512}{27}$$

O único ponto crítico e, portanto, o valor mínimo absoluto, é quando $\ell = 8/3$ e $w = 2$. Então, $h = 3$ e $C = 288$.

25. Quando a produção de um produto requer x horas por máquina e y horas por pessoa, o custo de produção é dado por $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + y^2 + 500$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

$$f_x(x, y) = 6x^2 - 6y = 0; \quad y = x^2 \quad e \quad f_y(x, y) = -6x + 2y = 0; \quad -6x + 2x^2 = 0; \quad x = 0, \ 3$$

Os pontos críticos são $(0, 0)$ e $(3, 9)$. $f(0, 0) = 500$ e $f(3, 9) = 473$. Agora $f(x, y) = x^2(2x - 9) + (3x - y)^2 + 500$. Se $x \geq 10$, $f(x, y) \geq 100(11) + 500 = 1600 > 473$; se $0 \leq x \leq 10$ e $y \geq 60$ então $f(x, y) \geq -9(100) + (30)^2 + 500 = 500 > 473$. Logo, o mínimo absoluto deve ocorrer em um ponto crítico dentro do retângulo $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 60$, isto é, em $(3, 9)$.

Nesses exercícios, apenas os parênteses realmente necessários numa calculadora serão usados. Toda multiplicação será indexada por *. Os números negativos são introduzidos seguindo-se o número com a chave +/-. As respostas são dadas até 3 digitais.

27. Seja x o número de períodos de 20 anos desde 1915, e seja y o valor da pintura 20 x anos após 1915

x	0	1	2	3
y	1	46	110	200

$\sum_{i=1}^{4} x_i y_i = 866$, $\sum_{i=1}^{4} x_i = 6$, $\sum_{i=1}^{4} y_i = 357$, $\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 14$, $m = \frac{(4*866 - 6*357)}{(4*14 - 6^2)} = 66,1$,

$b = \frac{(357 - 66,1*6)}{4} = -9,9$. A reta de regressão tem a equação $y = 66,1x - 9,9$.

Quando $x = 4$, $y = 66,1*4 - 9,9 = 254,8$, logo, em 1995 a pintura valerá \$25.450.

29.

x (semana)	1	2	3	4	5
y (público/100)	50	45	41	39	35

$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 594$, $\sum_{i=1}^{5} x_i = 15$, $\sum_{i=1}^{5} y_i = 210$, $\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 55$.

(a) $m = \frac{(5*594 - 15*210)}{(5*55 - 15^2)} = -3,6$, $b = \frac{(210 + 3,6*15)}{5} = 52,8$.

ℓ $y = -3,6x + 52,8$. Quando $x = 6$,

$y = -3,6*6 + 52,8 = 31,2$. O público esperado para a sexta semana é $100\,y = 3.120$.

(b) Encontramos a reta de regressão para prever x. $\sum_{i=1}^{5} y_i^2 = 8952$.

$m = \frac{(5*594 - 15*210)}{(5*8952 - 210^2)} = -0,273$, $b = \frac{(15 + 0,273*210)}{5} = 14,5$. A reta de regressão tem a equação $x = -0,273y + 14,5$. Essa não é a mesma reta que na parte (a). Quando $y = 22,5$, $x = -0,273*22,5 + 14,5 = 8,35$. O filme sairá de cartaz na nona semana.

31.

x (sec)	300,5	350,6	407,3	326,2	512,8
y (ml/min/kg)	350,2	325,8	375,6	418,5	400,2

$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 714.179{,}72$, $\sum_{i=1}^{5} x_i = 1897{,}4$,

$\sum_{i=1}^{5} y_i = 1870{,}3$, $\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 748.484{,}18$. $m = \dfrac{(5 * 714.179{,}72 - 1897{,}4 * 1870{,}3)}{(5 * 748.484{,}18 - 1897^2)} = 0{,}156$,

$b = \dfrac{(1870{,}3 - 0{,}156 * 1897{,}4)}{5} = 314{,}9$. A reta de regressão tem a equação $y = 0{,}156x + 314{,}9$.

Quando $x = 340{,}4$, $y = 0{,}156 * 340{,}4 + 314{,}9 = 368{,}0$.

33. O lucro do monopolista é dado por

$$f(p, q) = 1.000\left(\frac{10}{pq}\right)p + 1.000\left(\frac{20}{pq}\right)q - 2.000\left(\frac{10}{pq}\right) - 1.000\left(\frac{20}{pq}\right) = 10.000\left(\frac{1}{q} + \frac{2}{p} - \frac{4}{pq}\right), \quad p > 0, \quad q > 0$$

Se escolhemos $p = M$ e $q = 1/M$, então $f > M - 4$. Logo, não há lucro total máximo.

35. Sejam ℓ, w e h as unidades de comprimento, largura e altura da caixa. Seja S unidades a sua área de superfície (S é uma constante) e V unidades cúbicas o seu volume.

$$S = \ell w + 2\ell h + 2wh; \quad h = \frac{S - \ell w}{2(\ell + w)}. \quad V = \ell wh = \frac{S\ell w - \ell^2 w^2}{2(\ell + w)}, \quad \ell > 0, \quad w > 0.$$

$$\frac{\partial V}{\partial \ell} = \frac{Sw^2 - \ell^2 w^2 - 2\ell w^3}{2(\ell + w)^2} = 0; \quad S - \ell^2 - 2\ell w = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial V}{\partial w} = \frac{S\ell^2 - \ell^2 w^2 - 2\ell^3 w}{2(\ell + w)^2} = 0; \quad S - w^2 - 2\ell w = 0$$

Subtraindo, obtemos $\ell^2 = w^2$; $\ell = w$ e, portanto, $(\sqrt{S/3}, \sqrt{S/3})$ é o único ponto crítico. Então, $h = \frac{1}{2}\sqrt{S/3}$ e $V = \frac{1}{2}(S/3)^{3/2}$. Se $\ell \geq 10\sqrt{S}$ e $w \geq 0{,}1\sqrt{S}$ ou $\ell \geq 0{,}1\sqrt{S}$ e $w \geq 10\sqrt{S}$, então $V = \dfrac{\ell w(S - \ell w)}{2(\ell + w)} \leq 0$. Se $w \leq 0{,}1\sqrt{S}$, $V \leq \dfrac{\ell(0{,}1\sqrt{S})S}{2\ell} = \dfrac{S^{3/2}}{20} < \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{S}{3}\right)^{3/2}$ e, do mesmo modo se $\ell \leq 0{,}1\sqrt{S}$.

Logo, o volume máximo absoluto ocorre em um ponto crítico dentro do quadrado $0{,}1\sqrt{S} \leq \ell \leq 10\sqrt{S}$, $0{,}1\sqrt{S} \leq w \leq 10\sqrt{S}$, que é quando $\ell : w : h = 1 : 1 : \frac{1}{2}$.

37. Temos que $f_y(x_0, y_0)$ existe e f tem um máximo relativo em (x_0, y_0). Seja $g(y) = f(x_0, y)$ de modo que $g'(y_0) = f_y(x_0, y_0)$ existe e g tem um valor máximo relativo em y_0. Pelo Teorema 4.1.3, $g'(y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.

39. Sabemos que: $D = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b) > 0$ e $f_{xx}(a, b) < 0$. Seja $g(x, y) = -f(x, y)$. Então, $g_{xx}(a, b)g_{yy}(a, b) - g_{xy}^2 = [-f_{xx}(a, b)][-f_{yy}(a, b)] - [-f_{xy}(a, b)]^2 = D > 0$ e $g_{xx}(a, b) > 0$. Pela parte (i) do teorema, g tem um valor mínimo relativo em (a, b). Logo, f tem um valor máximo relativo em (a, b).

41. Omitimos os limites. Multiplicamos a primeira equação por n e a segunda por $\sum x_i$ para obte

$$n(\sum x_i^2)m + n(\sum x_i)b = n\sum x_i y_i$$

$$(\sum x_i)^2 m + n(\sum x_i)b = \sum x_i \sum y_i$$

Subtraímos para obter $[n(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2]m = (n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i]$. Dividimos para chegar a equação (6).

EXERCÍCIOS 17.4 Funções Implícitas, Derivação

1. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y\,e^{xy} + 2\cos(2x - 3y)}{xe^{xy} - 3\cos(2x - 3y)}$

3. $\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos 2y}{\cos 2x}$

5. $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x\,(2\,\text{sen}\,x + \cos y)}{\text{sen}\,y\,(\text{sen}\,x + 2\cos y)}$

7. $\frac{dy}{dx} = -\frac{2ye^{-xy}}{2xe^{-xy}} = -\frac{y}{x}$

9. $x - 1 = 0$

11. $y = x - 1$

13. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{9x^2 v^2 - 4v^3}{12\,(u^2v^3 + v^2u^3)}$

15. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{ye^{v} - xy - uve^{v} - v}{e^{y+v} - xe^{v} - ue^{v} - 1}$

17. $\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta$ e $\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-\text{sen}\,\theta}{r}$

19. Como a equação do plano tangente a $z = f(x, y)$ no ponto (x_0, y_0, z_0) é dada por $z - z_0$

$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}_{(x_0,y_0)}\right)(x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}_{(x_0,y_0)}\right)(y - y_0)$ então, no caso,

$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x} \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{2\,xz}{x^2 + y^2}$ e $\frac{\partial z}{\partial x}_{(1,1,1)} = -1$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y} \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{2yz}{x^2 + y^2}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}_{(1,1,1)} = -1$ Logo, a equação procurada é

$z - 1 = -(x - 1) - (y - 1)$, ou seja, $x + y + 2 - 3 = 0$

21. Sabemos que para uma função contínua em [-a, a] os extremos estão entre os pontos que anulam f'(x). Mas

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{2x}{a^2} \quad \frac{2y}{b^2} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

Para que f'(x)=0 devemos ter x = 0 e se x = o, substituindo em F(x,y) = o, teremos y = ± b. Logo, teremos extremos em (0,b) e (0,-b). Observe que, na realidade, temos duas funções $y = \pm\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) b^2}$ * sendo (0,-b) o extremo para $y = \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) b^2}$ enquanto que (0,-b) é o extremo de $y = -\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) b^2}$.

Em x = 0 temos os extremos y = ±b.

23. Os pontos críticos acontecem nas soluções das equações

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \text{ e } \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Mas

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{6 - 2x}{2z} = \frac{3 - x}{z}$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{4 - 4y}{2z} = -\frac{2 - 2y}{z}$$

Assim sendo, se x = 3 e y = -1, teremos pontos críticos para z = f(x,y).

EXERCÍCIOS 17.5 Multiplicadores de Lagrange

1. $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$, e $x^2 + y^2 - 4y = 0$. $F(x, y, \lambda) = 25 - x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4y)$.

$$F_x(x, y, \lambda) = 2x + 2\lambda x; \quad F_y(x, y, \lambda) = -2y + \lambda(2y - 4); \quad F_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 4y$$

Tomando $F_x(x, y, \lambda) = 0$, obtemos $\lambda = 1$ ou $x = 0$. Estabelecendo $F_y(x, y, \lambda) = 0$, vemos que $\lambda = 1$ é impossível. Tomando $F_\lambda(x, y, \lambda) = 0$ e com $x = 0$, obtemos $y = 0$ e $y = 4$. Logo, os pontos críticos são $(0, 0)$ e $(0, 4)$.

3. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, e $3x - 2y + z - 4 = 0$. $F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(3x - 2y + z - 4)$.

$$F_x = 2x + 3\lambda = 0; \quad F_y = 2y - 2\lambda = 0; \quad F_z = 2z + \lambda = 0; \quad F_\lambda = 3x - 2y + z - 4 = 0$$

Resolvendo essas equações simultaneamente, obtemos $\lambda = -\frac{4}{7}$, $x = \frac{6}{7}$, $y = -\frac{4}{7}$ e $z = \frac{2}{7}$. Logo, o ponto crítico é $\left(\frac{6}{7}, -\frac{4}{7}, \frac{2}{7}\right)$.

5. $f(x, y) = x^2 + y$, e $x^2 + y^2 = 9$. $F(x, y, \lambda) = x^2 + y + \lambda(x^2 + y^2 - 9)$.

$$F_x(x, y, \lambda) = 2x + 2\lambda x = 0; \quad F_y(x, y, \lambda) = 1 + 2\lambda y = 0; \quad F_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 9 = 0$$

Resolvendo essas equações simultaneamente, obtemos as soluções:

$x = 0$, $y = 3$, $\lambda = -1/6$; $x = 0$, $y = -3$, $\lambda = 1/6$; $x = \frac{1}{2}\sqrt{35}$, $y = \frac{1}{2}$, $\lambda = -1$; $x = -\frac{1}{2}\sqrt{35}$, $y = \frac{1}{2}$, $\lambda = -1$

De $x^2 + y^2 = 9$, tratando y como uma função de x, obtemos $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$. Então,

$$\frac{df}{dx} = 2x + \frac{dy}{dx} = 2x - \frac{x}{y}; \quad \frac{d^2f}{dx^2} = 2 - \frac{y - x\frac{dy}{dx}}{y^2} = 2 - \frac{y + \frac{x^2}{y}}{y^2} = 2 - \frac{x^2 + y^2}{y^2} = 2 - \frac{9}{y^2}$$

$f(0, 3) = 3$, $\frac{d^2f}{dx^2} = 2 - \frac{9}{27} > 0$, mínimo relativo. $f(0, -3) = -3$, $\frac{d^2f}{dx^2} = 2 + \frac{9}{27} > 0$, mínimo relativo.

$f(\pm\frac{1}{2}\sqrt{35}, \frac{1}{2}) = \frac{37}{4}$, $\frac{d^2f}{dx^2} = 2 - \frac{9}{1/8} = -70 < 0$, máximo relativo.

7. $f(x, y, z) = xyz$, e $x^2 + 2y^2 + 4z^2$. $F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 4)$.

$F_x = yz + 2x\lambda = 0$; $xyz = -2x^2\lambda$. $F_y = xz + 4y\lambda = 0$; $xyz = -4y^2\lambda$. $F_z = xy + 8z\lambda = 0$; $xyz = -8z^2\lambda$

$$F_\lambda = x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 4 = 0$$

Logo, $x^2 = 4z^2$, $y^2 = 2z^2$, e $4z^2 + 2(2z^2) + 4z^2 = 4$; $z^2 = 1/3$, $z = \pm\sqrt{1/3}$. Então, $x = \pm\sqrt{4/3}$, $y = \pm\sqrt{2/3}$. Assim, há 8 pontos críticos.

$$f(-\sqrt{4/3}, -\sqrt{2/3}, -\sqrt{1/3}) = f(-\sqrt{4/3}, \sqrt{2/3}, \sqrt{1/3}) = f(\sqrt{4/3}, -\sqrt{2/3}, \sqrt{1/3}) = f(\sqrt{4/3}, \sqrt{2/3}, -\sqrt{1/3}) = -\tfrac{2}{9}\sqrt{6}$$

$$f(\sqrt{4/3}, \sqrt{2/3}, \sqrt{1/3}) = f(\sqrt{4/3}, -\sqrt{2/3}, -\sqrt{1/3}) = f(-\sqrt{4/3}, \sqrt{2/3}, -\sqrt{1/3}) = f(-\sqrt{4/3}, -\sqrt{2/3}, \sqrt{1/3}) = \tfrac{2}{9}\sqrt{6}$$

Como o conjunto de vínculos é fechado e limitado, f tem extremos tomados nos pontos críticos. Logo, f tem um valor máximo de $\frac{2}{9}\sqrt{6}$ e um valor mínimo de $-\frac{2}{9}\sqrt{6}$.

9. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, e $xyz = 1$. $F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(xyz - 1)$.

$F_x(x, y, z, \lambda) = 2x + \lambda yz = 0$; $2x^2 = -\lambda xyz = -\lambda$. $F_y(x, y, z, \lambda) = 2y + \lambda xz = 0$; $2y^2 = -\lambda xyz = -\lambda$.

$F_z(x, y, z, \lambda) = 2z + \lambda xy = 0$; $2z^2 = -\lambda xyz = -\lambda$.

Logo, $x^2 = y^2 = z^2$. De $xyz = 1$ temos os quatro pontos críticos $(1, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$, e $(-1, -1, 1)$. Em cada um desses pontos $(x, y, z) = 3$ que é o número de f.

11. $f(x, y, z) = x + y + z$, e $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. $F(x, y, z, \lambda) = x + + z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$.

$F_x = 1 + 2\lambda x = 0$; $x = -1/2\lambda$. $F_y = 1 + 2\lambda y = 0$; $y = -1/2\lambda$. $F_z = 1 + 2\lambda z = 0$; $z = -1/2\lambda$. $x = y = z$.

$F_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$; $x^2 + y^2 + x^2 - 9 = 0$; $x = \pm\sqrt{3}$

Os pontos críticos são $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3})$. $f(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$, $f(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}$

Como o conjunto de vínculos é fechado e limitado, f tem valores extremos que supostamente estão nos pontos críticos. Portanto, o valor máximo de f é $3\sqrt{3}$.

13. $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 16z^2$, e (a) $xyz = 1$; (b) $xy = 1$; (c) $x = 1$.

Como z, e portanto $f(x, y, z)$, podem ser arbitrariamente grandes, f não tem máximo, logo, esperamos que os pontos críticos tenham mínimos.

(a) $xyz = 1$. $F(x, y, z, \lambda) = x^2 + 4y^2 + 16z^2 + \lambda(xyz - 1)$.

$F_x = 2x + yz\lambda = 0$; $2x^2 = -xyz\lambda$. $F_y = 8y + xz\lambda = 0$; $8y^2 = -xyz\lambda$. $F_z = 32z + xy\lambda = 0$; $32z^2 = -xyz\lambda$.

Logo, $x^2 = 16z^2$; $x = \pm 4z$ e $y^2 = 4z^2$; $y = \pm 2z$. De $xyz = 1$ temos $(\pm 4z)(\pm 2z)z = 1$; $z = \pm\frac{1}{2}$.

Como $xyz = 1$, os pontos críticos são $(2, 1, \frac{1}{2})$, $(2, -1, -\frac{1}{2})$, $(-2, 1, -\frac{1}{2})$ e $(-2, -1, \frac{1}{2})$.

Em cada um deles, $f(x, y, z) = 4 + 4 + 4 = 12$. Portanto, o valor mínimo de f é 12.

(b) $xy = 1$. $F(x, y, z, \lambda) = x^2 + 4y^2 + 16z^2 + \lambda(xy - 1)$.

$F_x = 2x + \lambda y = 0$; $2x^2 = -\lambda xy$. $F_y = 8y + \lambda x = 0$; $8y^2 = -\lambda xy$. $x^2 = 4y^2$; $x = \pm 2y$. $F_z = 32z = 0$; $z = 0$.

De $xy = 1$, se $x = 2y$, $2y^2 = 1$, $y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $x = -2y$ é impossível. Os 2 pontos críticos são $(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 0)$ e $(-\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0)$. Em cada um deles $f(x, y, z) = 4$. Logo, o valor mínimo de f é 4.

(c) $x = 1$. $F(x, y, z, \lambda) = x^2 + 4y^2 + 16z^2 + \lambda(x - 1)$

$F_x = 2x + \lambda = 0$. $F_y = 8y = 0$; $y = 0$. $F_z = 32z = 0$; $z = 0$. Assim, o ponto crítico é $(1, 0, 0)$.

Como $f(1, 0, 0) = 1$, o valor mínimo de f é 1.

15. Seja w unidades a distância do ponto $(1, -1, -1)$ ao ponto (x, y, z) no plano $x + 4y + 3z = 2$. w tem um mínimo quando w^2 também possui e não tem valor máximo . Seja $f(x, y, z) = w^2 = (x - 1)^2 + (y + 1)^2$. $F(x, y, z, \lambda) = (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 + \lambda(x + 4y + 3z - 2)$

$F_x = 2(x - 1) + \lambda$; $x = 1 - \frac{1}{2}\lambda$. $F_y = 2(y + 1) + 4\lambda$; $y = -1 - 2\lambda$. $F_z = 2(z + 1) + 3\lambda$; $z = -1 - \frac{3}{2}\lambda$

$F_\lambda = x + 4y + 3z - 2 = 0$; $\left(1 - \frac{1}{2}\lambda\right) + 4(-1 - 2\lambda) + 3\left(-1 - \frac{3}{2}\lambda\right) - 2 = 0$; $\lambda = -\frac{8}{13}$, $x = \frac{17}{13}$, $y = \frac{3}{13}$, $z = -\frac{1}{13}$.

Portanto, f tem o ponto crítico $\left(\frac{17}{13}, \frac{3}{13}, -\frac{1}{13}\right)$ e nesse ponto

$$w = \sqrt{\left(\frac{17}{13} - 1\right)^2 + \left(\frac{3}{13} + 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{13} + 1\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{13}\right)^2 + \left(\frac{16}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{4}{13}\sqrt{26}$$

17. Seja w unidades a distância da origem a um ponto (x, y, z) no elipsóide $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$. O elipsóide é um conjunto fechado e limitado, de modo que há extremos para w obtidos nos extremos de w^2. Seja

$$f(x, y, z) = w^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(9x^2 + 4y^2 + z^2 - 36)$$

$F_x(x, y, z, \lambda) = 2x + 18\lambda x = 0$; $x = 0$ ou $\lambda = -\frac{1}{9}$. $F_y(x, y, z, \lambda) = 2y + 8\lambda y = 0$; $y = 0$ ou $\lambda = -\frac{1}{4}$.

$F_z(x, y, z, \lambda) = 2z + 2\lambda z = 0$; $z = 0$ ou $\lambda = -1$. $F_\lambda(x, y, z, \lambda) = 9x^2 + 4y^2 + z^2 - 36 = 0$.

As três soluções possíveis são:

$\lambda = -\frac{1}{9}$, $y = 0$, $z = 0$; $9x^2 - 36 = 0$; $x = \pm 2$. Os pontos críticos são $(2, 0, 0)$ e $(-2, 0, 0)$. $w = 2$.

$x = 0$, $\lambda = -\frac{1}{4}$, $z = 0$; $4y^2 - 36 = 0$; $y = \pm 3$. Os pontos críticos são $(0, 3, 0)$ e $(0, -3, 0)$. $w = 3$.

$x = 0$, $y = 0$, $\lambda = -1$. $z^2 - 36 = 0$; $z = \pm 6$. Os pontos críticos são $(0, 0, 6)$ e $(0, 0, -6)$. $w = 6$.

Portanto, a distância mínima da origem a um ponto no elipsóide é 2 e a distância máxima é 6. Os pontos $(0, \pm 3, 0)$ são pontos de sela de f.

19. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, e $x + 2y + 3z = 6$, e $x - y - z = -1$.

$F(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x + 2y + 3z - 6) + \mu(x - y - z + 1)$ O conjunto de vínculos é uma reta, fechada mas não limitada, de modo que f tem um mínimo, mas nenhum máximo.

$F_x = 2x + \lambda + \mu = 0$; $x = -\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\mu$. $F_y = 2y + 2\lambda - \mu = 0$; $y = -\lambda + \frac{1}{2}\mu$. $F_z = 2z + 3\lambda - \mu = 0$; $z = -\frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2}\mu$.

$F_\lambda = x + 2y + 3z - 6 = 0$; $-7\lambda + 2\mu = 6$. $F_\mu = x - y - z + 1 = 0$; $2\lambda - \frac{3}{2}\lambda = -1$.

Portanto $\lambda = -\frac{14}{13}$, $\mu = -\frac{10}{13}$, $x = \frac{12}{13}$, $y = \frac{9}{13}$, $z = \frac{16}{13}$. O ponto crítico é $\left(\frac{12}{13}, \frac{9}{13}, \frac{16}{13}\right)$.

$f\left(\frac{12}{13}, \frac{9}{13}, \frac{16}{13}\right) = \left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{9}{13}\right)^2 + \left(\frac{16}{13}\right)^2 = \frac{481}{169} = \frac{37}{13}$, que é o valor mínimo de f.

21. $f(x, y, z) = xyz$, $x + y + z = 4$, $x - y - z = 3$. $F(x, y, z, \lambda, \mu) = xyz + \lambda(x + + z - 4) + \mu(x - y - z - 3)$.

$F_x = yz + \lambda + \mu = 0$ (1). $F_y = xz + \lambda - \mu = 0$ (2). $F_z = xy + \lambda - \mu = 0$ (3).

$$F_\lambda = x + y + z - 4 = 0 \ (4) \quad F_\mu = x - y - z - 3 = 0 \ (5)$$

De (4) e (5) temos $2x - 7 = 0$; $x = \frac{7}{2}$. De (2) e (3) obtemos $y = z$. De (4) obtemos $y = \frac{1}{4}$, $z = \frac{1}{4}$. O ponto crítico é $P(\frac{7}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. $f(\frac{7}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = (\frac{7}{2})(\frac{1}{4})(\frac{1}{4}) = \frac{7}{32}$.

Considere x e y como funções de z e denote $D_z x$ de x' e $D_z y$ por y'. Dos vínculos, $x' + y' + 1 = 0$, $x' - y' - 1 = 0$. Logo, $x' = 0$, $y' = -1$. $f' = x'yz + xy'z + xy = -xz + xy$.

$f'' = -x'z - x + x'y + xy' = -2x = -7 < 0$ em P. Assim, f tem um valor máximo relativo em P.

23. Sejam x, y e z os números. Então, $f(x, y, z) = xyz$ e $x + y + z = 24$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. O conjunto de vínculos é um triângulo, que é fechado e limitado, de modo que f tenha um máximo e um mínimo. O mínimo é 0, obtido em todos os pontos do limite, logo, qualquer ponto crítico é o máximo. Seja $F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(x + y + z - 24)$.

$F_x = yz + \lambda = 0$; $xyz = -\lambda x$. $F_y = xz + \lambda = 0$; $xyz = -\lambda y$. $F_z = xy + \lambda = 0$; $xyz = -\lambda z$. $x = y = z$.

$F_\lambda = x + y + z - 24 = 0$; $3x = 24$. Logo, $x = 8$, $y = 8$, $z = 8$ dá o máximo $xyz = 512$ de f.

25. Seja w unidades a distância do ponto $(1, -2, 3)$ a um ponto (x, y, z) no plano $3x + 2y - z - 5 = 0$. w será um mínimo quando w^2 for um mínimo.

$$f(x, y, z) = w^2 = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2$$

$$F(x, y, z, \lambda) = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 + \lambda(3x + 2y - z - 5)$$

$F_x = 2(x - 1) + 3\lambda = 0$; $x = 1 - \frac{3}{2}\lambda$. $F_y = 2(y + 2) + 2\lambda = 0$; $y = -2 - \lambda$. $F_z = 2(z - 3) - \lambda = 0$; $z = 3 + \frac{1}{2}\lambda$.

$F_\lambda = 3x + 2y - z - 5 = 0$; $3(1 - \frac{3}{2}\lambda) + 2(-2 - \lambda) - (3 + \frac{1}{2}\lambda) - 5 = 0$; $7\lambda = -9$.

Logo, $\lambda = -\frac{9}{7}$, $x = \frac{41}{14}$, $y = -\frac{5}{7}$, $z = \frac{33}{14}$, no ponto crítico $P\left(\frac{41}{14}, -\frac{5}{7}, \frac{33}{14}\right)$,

$$w = \sqrt{\left(\frac{41}{14} - 1\right)^2 + \left(-\frac{5}{7} + 2\right)^2 + \left(\frac{33}{14} - 3\right)^2} = \frac{9}{14}\sqrt{14}$$

Como x, e portanto $f(x, y, z)$, podem ser arbitrariamente grandes, w tem um mínimo em P.

27. Sejam w unidades a distância até a origem de um ponto (x, y, z) em $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4$ e $x - 4y - z = 0$. w será um mínimo quando w^2 for um mínimo. Seja $f(x, y, z) = w^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4) + \mu(x - 4y - z)$$

$$F_x = 2x + 2\lambda x + \mu = 0. \quad F_y = 2y + 8\lambda y - 4\mu = 0. \quad F_z = 2z + 8\lambda z - \mu = 0.$$

$F_y - 4F_z$: $(2 + 8\lambda)(y - 4z) = 0$; $y = 4z$ ou $\lambda = -\frac{1}{4}$. Se $\lambda = -\frac{1}{4}$, de F_y obtemos $\mu = 0$ e de F_x obtemos $x = 0$.

$$F_\lambda = x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4 = 0. \quad F_\mu = x - 4y - z = 0.$$

Se $y = 4z$, então $x - 16z - = 0$; $x = 17z$ e $289z^2 + 64z^2 + 4z^2 - 4 = 0$; $357z^2 = 4$. Portanto,

$z = \pm\frac{2}{\sqrt{357}}$, os pontos críticos são $\left(\frac{34}{\sqrt{357}}, \frac{8}{\sqrt{357}}, \frac{2}{\sqrt{357}}\right)$ e $\left(-\frac{34}{\sqrt{357}}, -\frac{8}{\sqrt{357}}, -\frac{2}{\sqrt{357}}\right)$ logo, $f = \frac{1.12}{35}$

Se $x = 0$, então $0 - 4y - z = 0$; $z = -4y$ e $0 + 4y^2 + 64y^2 - 4 = 0$; $17y^2 = 1$. Portanto,

$y = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$, os pontos críticos são $P\left(0, \frac{1}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$ e $Q\left(0, -\frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}\right)$, logo, $f = 1$.

Como o conjunto de vínculos é fechado e limitado, f atinge um mínimo em um ponto crítico. Logo, P e Q são os mais próximos à origem, e a distância mínima é 1.

29. Sejam ℓ cm, w cm, h cm o comprimento, a largura e a altura da caixa. C centavos é o custo

$$C = 18\ell w + 16wh + 12\ell h \quad \text{e} \quad \ell wh = 16. \quad F(\ell, w, h, \lambda) = 18\ell w + 16wh + 12\ell h + \lambda(\ell wh - 16).$$

$\frac{\partial F}{\partial \ell} = 18w + 12h + \lambda wh = 0$; $\frac{18}{h} + \frac{12}{w} = -\lambda$

$\frac{\partial F}{\partial w} = 18\ell + 16h + \lambda\ell h = 0$; $\frac{18}{h} + \frac{16}{\ell} = -\lambda$; $\frac{12}{w} = \frac{16}{\ell}$; $w = \frac{3}{4}\ell$

$\frac{\partial F}{\partial h} = 16w + 12\ell + \lambda\ell w = 0$; $\frac{16}{\ell} + \frac{12}{w} = -\lambda$; $\frac{18}{h} = \frac{16}{\ell}$; $h = \frac{9}{8}\ell$

$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \ell wh - 16 = 0$; $\ell\left(\frac{3}{4}\ell\right)\left(\frac{9}{8}\ell\right) = 16$; $\ell^3 = \frac{512}{27}$; $\ell = \frac{8}{3}$. O ponto crítico é $P\left(\frac{8}{3}, 2, 3\right)$.

Como wh, e portanto C, podem ser arbitrariamente grandes, C tem um mínimo em P.

31. Sejam l, w, e h as unidades de comprimento, largura e altura da caixa. Sejam v unidades cúbicas o seu volume e S unidades quadradas a sua área de superfície (S é uma constante) $V = \ell wh$ e $S = \ell w + 2\ell h + 2wh$, $\ell > 0$, $w > 0$, $h > 0$. $F(\ell, w, h, \lambda) = \ell wh + \lambda(\ell w + 2\ell h + 2wh - S)$. $wh < \frac{1}{2}S$, então $V < \frac{1}{2}\ell S$, e V pode ser arbitrariamente pequeno. Qualquer ponto crítico é o máximo $\frac{\partial F}{\partial \ell} = wh + \lambda(w + 2h) = 0$; $\frac{1}{h} + \frac{2}{w} = -\frac{1}{\lambda}$. $\frac{\partial F}{\partial w} = \ell h + \lambda(\ell + 2h) = 0$; $\frac{1}{h} + \frac{2}{\ell} = -\frac{1}{\lambda}$.

$\frac{\partial F}{\partial h} = \ell w + \lambda(2\ell + 2w) = 0$; $\frac{2}{w} + \frac{2}{\ell} = -\frac{1}{\lambda}$. Logo, $\frac{1}{\ell} = -\frac{1}{4\lambda}$, $\frac{1}{w} = -\frac{1}{4\lambda}$, $\frac{1}{h} = -\frac{1}{2\lambda}$.

Portanto, V tem um máximo quando $\ell : w : h = 1 : 1 : \frac{1}{2}$.

33. $T = 2x^2 + y^2 - y$. Como o disco $x^2 + y^2 \leq 1$ é fechado e limitado, os extremos são obtidos em um ponto crítico ou em um ponto lateral. Em um ponto crítico

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 4x = 0; \quad x = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 2y - 1 = 0; \quad y = \tfrac{1}{2}. \quad T(0, \tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{4}.$$

Na lateral, $x^2 = 1 - y^2$, $-1 \leq y \leq 1$, $T = 2(1 - y^2) + y^2 - y = 2 - y^2 - y$. $\frac{dT}{dy} = -2y - 1$; $y = \frac{1}{2}$.

Quando $y = -1$, $x = 0$ e $T = 2$. Quando $y = -\frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$ e $T = \frac{9}{4}$. Quando $y = 1$, $x = 0$ e $T = 0$.

Assim, a temperatura é mais quente nos pontos $(\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$ e mais fria no ponto $(0, \frac{1}{2})$.

EXERCÍCIOS 17.6 Obtenção de uma Função a partir de seu Gradiente e Diferencial Exata

Nos Exercícios 1-23 seguiremos o procedimento detalhado no Exercício 1.

1. Aplicamos o Teorema 16.5.1 ao vetor $4x\mathbf{i} - 3y\mathbf{j}$. Seja $M(x, y) = 4x$ e $N(x, y) = 3y$. Então,

$$M_y(x, y) = 0 \quad \text{e} \quad N_x(x, y) = 0$$

Assim, $M_y(x, y) = N_x(x, y)$, e, portanto, o vetor dado é um gradiente $\nabla f(x, y)$, onde

$$f_x(x, y) = 4x \quad (1) \qquad \text{e} \qquad f_y(x, y) = -3y \quad (2)$$

Integrando ambos os membros de (1) com relação a x, obtemos $f(x, y) = 2x^2 + g(y)$ (3)

Derivando ambos os membros de (3) com relação a y, obtemos $f_y(x, y) = g'(y)$ (4)

Igualando os segundos membros de (2) e (4), temos $g'(y) = -3y$; $g(y) = -\frac{3}{2}y^2 + C$ (5)

Substituindo de (5) em (3), temos $f(x, y) = 2x^2 - \frac{3}{2}y^2 + C$.

3. $(6x - 5y)\mathbf{i} - (5x - 6y^2)\mathbf{j}$. Seja $M(x, y) = 6x - 5y$ e $N(x, y) = -5x + 6y^2$. Então,

$$M_y(x, y) = -5 \quad \text{e} \quad N_x(x, y) = -5$$

Como $M_y(x, y) = N_x(x, y)$, o vetor dado é um gradiente $\nabla f(x, y)$ onde

$$f_x(x, y) = 6x - 5y \quad \text{e} \quad f_y = -5x + 6y^2$$

Portanto, $f(x, y) = 3x^2 - 5xy + g(y)$; $f_y(x, y) = -5x + g'(y)$.

Assim, $-5x + g'(y) = -5x + 6y^2$; $g'(y) = 6y^2$; $g(y) = 2y^3 + C$.

Portanto, $f(x, y) = 3x^2 - 5xy + 2y^3 + C$.

5. $(6x^2y^2 - 14xy + 3)\mathbf{i} + (4x^3y - 7x^2 - 8)\mathbf{j}$. Seja, $M(x, y) = 12x^2y - 14x$ e $N(x, y) = 12x^2y - 14x$.

Então, $M_y(x, y) = 12x^2y - 4x$ e $N_y(x, y) = 12x^2y - 14x$

Como $M_y(x, y) = N_x(x, y)$, o vetor dado é um gradiente $\nabla f(x, y)$ onde

$$f_x(x, y) = 6x^2y^2 - 14xy + 3 \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = 4x^3y - 7x^2 - 8$$

Assim, $f(x, y) = 2x^3y^2 - 7x^2y + 3x + g(y)$; $f_y(x, y) = 4x^3y - 7x^2 + g'(y)$.

Portanto, $4x^3y - 7x^2 + g'(y) = 4x^3y - 7x^2 - 8$; $g'(y) = -8$; $g(y) = -8y + C$.

Logo, $f(x, y) = 2x^3y^2 - 7x^2y + 3x - 8y + C$.

7. $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{1 - 2x}{y^3}\right)\mathbf{j}$. Seja $M(x, y) = x^{-2} + y^{-2}$ e $N(x, y) = y^{-3} - 2xy^{-3}$. Então,

$$M_y(x, y) = -2y^{-3} \quad \text{e} \quad N_x(x, y) = -2y^{-3}$$

Como $M_y(x, y) = N_x(x, y)$, o vetor dado é um gradiente $\nabla f(x, y)$ onde

$$f_x(x, y) = x^{-2} + y^{-2} \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = y^{-3} - 2xy^{-3}$$

Portanto, $f(x, y) = -x^{-1} + xy^{-2} + g(y)$; $f_y(x, y) = -2xy^{-3} + g'(y)$.

Logo, $-2xy^{-3} + g'(y) = y^{-3} - 2xy^{-3}$; $g'(y) = y^{-3}$; $g(y) = -\frac{1}{2}y^{-2} + C$.

Assim, $f(x, y) = -x^{-1} + xy^{-2} - \frac{1}{2}y^{-2} + C = \dfrac{2x^2 - 2y^2 - x}{2xy^2} + C$.

9. $2x \sec 2y\,\mathbf{i} + 2x^2 \sec 2y \operatorname{tg} 2y\,\mathbf{j}$. Seja $M(x, y) = 4x \sec 2y \operatorname{tg} 2y$ e $N(x, y) = 4x \sec 2y \operatorname{tg} 2y$.

Como $M_y(x, y) = N_x(x, y)$, o vetor dado é um gradiente $\nabla f(x, y)$ onde

$$f_x(x, y) = 2x \sec 2y \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = 2x^2 \sec 2y \operatorname{tg} 2y$$

Portanto, $f(x, y) = x^2 \sec 2y + g(y)$; $f_y(x, y) = 2x^2 \sec 2y \operatorname{tg} 2y + g'(y)$.

Assim, $2x^2 \sec 2y \operatorname{tg} 2y + g'(y) = 2x^2 \sec 2y \operatorname{tg} 2y$; $g'(y) = 0$; $g(y) = C$.

Portanto, $f(x, y) = x^2 \sec 2y + C$.

11. $(2x \cos y - 1)\mathbf{i} - x^2 \operatorname{sen} y\,\mathbf{j}$. Seja $M(x, y) = 2x \cos y - 1$ e $N(x, y) = -x^2 \operatorname{sen} y$. Então,

$$M_y(x, y) = -2x \operatorname{sen} y \quad \text{e} \quad N_x(x, y) = -2x \operatorname{sen} y$$

Como $M_y(x, y) = N_x(x, y)$, o vetor dado é um gradiente $\nabla f(x, y)$ onde where

$$f_x(x, y) = 2x \cos y - 1 \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = -x^2 \operatorname{sen} y$$

Assim, $f(x, y) = x^2 \cos y - x + g(y)$; $f_y(x, y) = -x^2 \operatorname{sen} y + g'(y)$.

Logo, $-x^2 \operatorname{sen} y + g'(y) = -x^2 \operatorname{sen} y$; $g'(y) = 0$; $g(y) = C$.

Portanto, $f(x, y) = x^2 \cos y - x + C$.

13. $(2xy + y^2 + 1)\,dx + (x^2 + 2xy + x)\,dy$. Seja $M(x, y) = 2xy + y^2 + 1$ e $N(x, y) = x^2 + 2xy + x$.

Então, $M_y(x, y) = 2x + 2y$ e $N_x(x, y) = 2x + 2y + 1$

Como $M_y(x, y) \neq N_x(x, y)$, a expressão não é uma diferencial exata.

15. $(e^x - 2xy)\,dx + (xe^y - x^2)\,dy = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$. Então, $M_y(x, y) = e^y - 2x$ e $N_x(x, y) = e^y - 2x$.

Como $M_y(x, y) = N_x(x, y)$, a expressão é uma diferencial exata de uma função $f(x, y)$

onde $f_x(x, y) = e^y - 2xy$ e $f_y(x, y) = xe^y - x^2$. Portanto, $f(x, y) = xe^y - x^2y + g(y)$.

Logo, $f_y(x, y) = xe^y - x^2 + g'(y) = xe^y - x^2$; $g'(y) = 0$; $g(y) = C$; e portanto $f(x, y) = xe^y - x^2y + C$.

Nos Exercícios 17-23, quando integramos $g'(y)$, escolhemos a constante igual a 0.

17. $(x + y)\,dx + (2y + x)\,dy = 0 = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$. $M_y(x, y) = 1$ e $N_x(x, y) = 1$.

Como $M_y(x, y) = N_y(x, y)$, a equação diferencial é exata com solução geral

$f(x, y) = C$ onde $f_x(x, y) = x + y$ e $f_y(x, y) = 2y + x$. Portanto, $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + xy + g(y)$.

Logo, $f_y(x, y) = x + g'(y) = 2y + x$; $g'(y) = 2y$; $g(y) = y^2$; e portanto $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + xy + y^2 = C$.

19. $ye^x - 2x + e^x \dfrac{dy}{dx} = 0$. Seja $M(x, y) = ye^x - 2x$ e $N(x, y) = e^x$. $M_y(x, y) = e^x$ e $N_x(x, y) = e^x$.

Como $M_y(x, y) = N_y(x, y)$, a equação diferencial é exata com solução geral

$f(x, y) = C$, onde $f_x(x, y) = ye^x - 2x$ e $f_y(x, y) = e^x$. Portanto, $f(x, y) = ye^x - x^2 + g(y)$.

Logo, $f_y(x, y) = e^x + g'(y) = e^x$; $g'(y) = 0$; $g(y) = 0$; e, portanto $f(x, y) = ye^x - x^2 = C$.

21. $(xy^2 + 2y)\,dx + (2y^3 - x^2y + 2x)\,dy = 0 = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$. $M_y(x, y) = 2xy + 2$, $N_x(x, y) = -2xy + 2$.

Como $M_x(x, y) \neq N_x(x, y)$, a equação diferencial não é exata.

23. $\left(\dfrac{x^2}{y^2}\cos\dfrac{x}{y}\right)\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}\cos\dfrac{x}{y} + \operatorname{sen}\dfrac{x}{y} + \cos x$. Seja $M(x, y) = -\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{x}{y} - \operatorname{sen}\dfrac{x}{y} - \cos x$, $N(x, y) = \dfrac{x^2}{y^2}\cos\dfrac{x}{y}$.

$M_y(x, y) = \dfrac{x}{y^2}\cos\dfrac{x}{y} + \dfrac{x}{y}\operatorname{sen}\dfrac{x}{y}\left(-\dfrac{x}{y^2}\right) - \cos\dfrac{x}{y}\left(-\dfrac{x}{y^2}\right) = \dfrac{2x}{y^2}\cos\dfrac{x}{y} - \dfrac{x^2}{y^3}\operatorname{sen}\dfrac{x}{y}$, $N_x(x, y)\dfrac{2x}{y^2}\cos\dfrac{x}{y} - \dfrac{x^2}{y^2}\operatorname{sen}\dfrac{x}{y}\left(\dfrac{1}{y}\right)$

$f(x, y) = C$ onde $f_x(x, y) = -\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{x}{y} - \operatorname{sen}\dfrac{x}{y} - \cos x$ e $f_y(x, y) = \dfrac{x^2}{y^2}\cos\dfrac{x}{y}$.

$f(x, y) = -x\operatorname{sen}\dfrac{x}{y} - \operatorname{sen} x + g(y)$. $f_y(x, y) = \dfrac{x^2}{y^2}\cos\dfrac{x}{y} + g'(y) = \dfrac{x^2}{y^2}\cos\dfrac{x}{y}$; $g'(y) = 0$; $g(y) = 0$.

Portanto, $f(x, y) = -x\operatorname{sen}\dfrac{x}{y} - \operatorname{sen} x = C$.

Nos Exercícios 25-33, seguiremos o procedimento detalhado no Exercício 25.

25. Aplicamos o Teorema 17.6.4 ao vetor $(2y - 5z)\mathbf{i} + (2x + 8z)\mathbf{j} - (5x - 8y)\mathbf{k}$. Seja

$M(x, y, z) = 2y - 5z$, $N(x, y, z) = 2x + 8z$, e $R(x, y, z) = -5x + 8y$. Então,

$M_y(x, y, z) = 2$ $\quad N_x(x, y, z) = 2$ $\quad R_x(x, y, z) = -5$

$M_z(x, y, z) = -5$ $\quad N_z(x, y, z) = 8$ $\quad R_y(x, y, z) = 8$

Como $M_y = N_x$, $M_z = R_x$, e $N_z = R_y$, o vetor dado é o gradiente $\nabla f(x, y, z)$ onde

$f_x(x, y, z) = 2y - 5z$ (1) $\quad f_y(x, y, z) = 2x + 8z$ (2) $\quad f_z(x, y, z) = -5x + 8y$ (3)

integrando ambos os membros de (1) com relação a x, obtemos

$$f(x, y, z) = 2xy - 5xz + g(y, z) \quad (4); \quad f_y(x, y, z) = 2x + g_y(y, z) \quad (5)$$

De (2) e (5) obtemos $2x + g_y(y, z) = 2x + 8z$; $g_y(y, z) = 8z$; $g(y, z) = 8yz + h(z)$ (6)

De (4) e (6) obtemos $f(x, y, z) = 2xy - 5xz + 8yz + h(z)$ (7); $f_z(x, y, z) = -5x + 8y + h'(z)$ (8)

De (3) e (8) obtemos $-5x + 8y + h'(z) = -5x + 8y$; $h'(z) = 0$; $h(z) = C$.

Substituindo em (7), obtemos $f(x, y, z) = 2xy - 5xz + 8yz + C$.

27. $e^y \operatorname{sen} z\,\mathbf{i} + xe^y \operatorname{sen} z\,\mathbf{j} + xe^y \cos z\,\mathbf{k} = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} = R(x, y, z)\mathbf{k}$.

$M_y(x, y, z) = e^y \operatorname{sen} z$ $\quad N_x(x, y, z) = e^y \operatorname{sen} z$ $\quad R(x, y, z) = e^y \cos z$

$M_z(x, y, z) = e^y \cos z$ $\quad N_z(x, y, z) = xe^y \cos z$ $\quad R_y(x, y, z) = xe^y \cos z$

Como $M_y = N_x$, $M_z = R_x$, e $N_z = R_y$, o vetor dado é um gradiente $\nabla f(x, y, z)$ onde

$f_x(x, y, z) = e^y \operatorname{sen} z$ $\quad f_y(x, y, z) = xe^y \operatorname{sen} z$ $\quad f_z(x, y, z) = xe^y \cos z$

De f_x, $f(x, y, z) = xe^y \operatorname{sen} z + g(y, z)$; $f_y = xe^y \operatorname{sen} z + g_y(y, z) = xe^y \operatorname{sen} z$.

$g_y(y, z) = 0$; $g(y, z) = h(z)$. Portanto, $f(x, y, z) = xe^y \operatorname{sen} z + h(z)$.

$f_z(x, y, z) = xe^y \cos z + h'(z) = xe^y \cos z$; $h'(z) = 0$; $h(z) = C$. Logo, $f(x, y, z) = xe^y \operatorname{sen} z + C$.

29. $e^x(e^z - \ln y)\mathbf{i} + (e^y \ln z - e^x y^{-1})\mathbf{j} + (e^{x+z} + e^y z^{-1})\mathbf{k} = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$.

$M_y(x, y, z) = -e^x y^{-1}$ $\quad N_x(x, y, z) = -e^x y^{-1}$ $\quad R_x(x, y, z) = e^{x+z}$

$M_z(x, y, z) = e^{x+z}$ $\quad N_z(x, y, z) = e^y z^{-1}$ $\quad R_y(x, y, z) = e^y z^{-1}$

Como $M_y = N_x$, $M_z = R_x$, e $N_z = R_y$, o vetor dado é um gradiente $\nabla f(x, y, z)$ onde

$f_x(x, y, z) = e^{x+z} - e^x \ln y$ $\quad f_y(x, y, z) = e^y \ln z - e^x y^{-1}$ $\quad f_z(x, y, z) = e^{x+z} + e^y z^{-1}$

De f_x, $f(x, y, z) = e^{x+z} - e^x \ln y + g(y, z)$; $f_y(x, y, z) = -e^x y^{-1} + g_y(y, z) = e^y \ln z - e^x y^{-1}$.

$g_y(y, z) = e^y \ln z$; $g(y, z) = e^y \ln z + h(z)$. Logo, $f(x, y, z) = e^{z+}{}_z - e^x \ln y + e^y \ln z + h(z)$.

$f_z(x, y, z) = e^{x+z} + e^y z^{-1} + h'(z) = e^{x+z} + e^y z^{-1}$; $h'(z) = 0$; $h(z) = C$.

Portanto, $f(x, y, z) = e^{x+z} - e^x \ln y + e^y \ln z + C$.

31. $(4xy + 3yz - 2)\,dx + (2x^2 + 3xz - 5z^2)\,dy + (3xy - 10yz + 1)\,dz = M(x, y, z)\,dx + N(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$

$M_y(x, y, z) = 4x + 3z$ $N_x(x, y, z) = 4x + 3z$ $R_x(x, y, z) = 3y$

$M_z(x, y, z) = 3y$ $N_z(x, y, z) = 3x - 10z$ $R_y = 3x - 10z$

Como $M_y = N_x$, $M_z = R_x$, e $N_z = R_y$, a expressão é a diferencial exata de $f(x, y, z)$

onde $f_x(x, y, z) = 4xy + 3yz - 2$ $f_y(x, y, z) = 2x^2 + 3xz - 5z^2$ $f_z(x, y, z) = 3xy - 10yz + 1$

De f_x, $f(x, y, z) = 2x^2y + 3xyz - 2x + g(y, z)$; $f_y(x, y, z) = 2x^2 + 3xz + g_y(y, z) = 2x^2 + 3xz - 5z^2$.

$g_y(y, z) = -5z^2$; $g(y, z) = -5yz^2 + h(z)$. Logo, $f(x, y, z) = 2x^2 + 3xyz - 2x - 5yz^2 + h(z)$.

$f_z(x, y, z) = 3xy - 10yz + h'(z) = 3xy - 10yz + 1$; $h'(z) = z + C$.

Portanto, $f(x, y, z) = 2x^2y + 3xyz - 2x - 5yz^2 + z + C$.

33. $z \operatorname{tg} y\,dx + xz\sec^2 y\,dy + x \operatorname{tg} y\,dz = M(x, y, z)\,dx + N(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$

$M_y(x, y, z) = z\sec^2 y$ $N_x(x, y, z) = z\sec^2 y$ $R_x(x, y, z) = \operatorname{tg} y$

$M_z(x, y, z) = \operatorname{tg} y$ $N_z(x, y, z) = x\sec^2 y$ $R_y(x, y, z) = x\sec^2 y$

Como $M_y = N_x$, $M_z = R_x$, e $N_z = R_y$, a expressão é a diferencial exata de $f(x, y, z)$

onde $f_x(x, y, z) = z \operatorname{tg} y$ $f_y(x, y, z) = xz\sec^2 y$ $f_z(x, y, z) = x \operatorname{tg} y$

De f_x, $f(x, y, z) = xz \operatorname{tg} y + g(y, z)$; $f_y(x, y, z) = xz\sec^2 y + g_y(y, z) = xz\sec^2 y$; $g_y(y, z) = 0$;

$g(y, z) = h(z)$. Assim, $f(x, y, z) = xz \operatorname{tg} y + h(z)$; $f_z(x, y, z) = x \operatorname{tg} y + h'(z) = x \operatorname{tg} y$; $h(z) = C$.

Portanto, $f(x, y, z) = xz \operatorname{tg} y + C$.

35. Desejamos provar que se M, N, e R são funções de três variáveis x, y, e z definidas em uma bola aberta B em R^3 onde M_y, M_z, N_x, N_z, R_x, e R_y são contínuas em B e o vetor $M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ é um gradiente em B, então

$$M_y(x, y, z) = N_x(x, y, z),\quad M_z(x, y, z) = R_x(x, y, z),\quad e\quad N_z(x, y, z) = R_y(x, y, z).$$

Prova: Como $M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ é um gradiente em B, existe uma função f, tal que para todo (x, y, z) em B

$f_x(x, y, z) = M(x, y, z)$ $f_y(x, y, z) = N(x, y, z)$ $f_z(x, y, z) = R(x, y, z)$

Como M_y, M_z, N_x, N_z, R_x, e R_y existem e são contínuas em B, segue do Teorema 16.7.1 que para todo (x, y, z) em B,

$$M_y(x, y, z) = f_{xy}(x, y, z) = f_{yx}(x, y, z) = N_x(x, y, z)$$

$$M_z(x, y, z) = f_{xz}(x, y, z) = f_{zx}(x, y, z) = R_x(x, y, z)$$

$$N_z(x, y, z) = f_{yz}(x, y, z) = f_{zy}(x, y, z) = R_y(x, y, z).$$

37. Seja $g(x)\,dx = h(y)\,dy$ a equação diferencial de primeira ordem cujas variáveis são distintas. Então, $g(x)\,dx - h(y)\,dy = 0$ de modo que $M(x, y) = g(x)$ e $N(x, y) = -h(y)$. Logo, $M_y(x, y) = 0 = N_x(x, y)$. Portanto, a equação diferencial é exata.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 17

1. $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 1$; $U = \frac{3}{5}i - \frac{4}{5}j$.

$D_U f(x, y) = f_x(x, y)\left(\frac{3}{5}\right) + f_y(x, y)\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}(6x - 2y) - \frac{4}{5}(-2x) = \frac{26}{5}x - \frac{6}{5}y.$

$D_U f(5, 10) = \frac{26}{5}(5) - \frac{6}{5}(10) = 14$

3. $h(x, y) = e^x + y^2 \cos x$; $U = \frac{1}{2}\sqrt{2}i - \frac{1}{2}\sqrt{2}j$

$D_U h(x, y) = h_x(x, y)(\frac{1}{2}\sqrt{2}) + h_y(x, y)(-\frac{1}{2}\sqrt{2}) = (e^x - y^2 \operatorname{sen} x)(\frac{1}{2}\sqrt{2}) + 2y \cos x(-\frac{1}{2}\sqrt{2})$

$D_U h(0, 3) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 - 9 \cdot 0) - \frac{1}{2}\sqrt{2}(6 \cdot 1) = \frac{1}{2}\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = -\frac{5}{2}\sqrt{2}$

5. $f(x, y, z) = xy^2z - 2xyz + 2xz^2$; $U = -\frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j - \frac{1}{3}k$

$D_U f(x, y, z) = [f_x(x, y, z)i + f_y(x, y, z)j + f_z(x, y, z)k] \cdot U$

$= [(y^2z - 3yz + 2z^2)i + (2xyz - 3xz)j + (xy^2 - 3xy + xz)k] \cdot U$

$D_U f(2, 1, 1) = [(1 - 3 + 2)i + (4 - 6)j + (2 - 6 + 8)k] \cdot U = (-2j + 4k)(-\frac{2}{3}i + \frac{2}{3}j - \frac{1}{3}k) = -2 \cdot \frac{2}{3} - 4 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{8}{3}$

7. $f(x, y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$; $U = \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\sqrt{3}j$

(a) $\nabla f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}i + \frac{y}{x^2 + y^2}j$; $\nabla f(1, 1) = \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j$

(b) A taxa de variação de $f(x, y)$ na direção e sentido de U é

$$D_U f(1, 1) = \nabla f(1, 1) \cdot U = (\tfrac{1}{2}i + \tfrac{1}{2}j) \cdot (\tfrac{1}{2}i + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}j) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\sqrt{3}$$

9. $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + 2xyz$; $U = \frac{3}{\sqrt{14}}i - \frac{2}{\sqrt{14}}j + \frac{1}{\sqrt{14}}k$

(a) $\nabla f(x, y, z) = (3x^2 + 2yz)i + (3y^2 + 2xz)j + 2xyk$; $\nabla f(2, -1, 0) = 12i + 3j - 4k$

(b) A taxa de variação de $f(x, y, z)$ na direção e sentido de U em $(2, -1, 0)$ é

$$D_U f(2, -1, 0) = \nabla f(2, -1, 0) \cdot U = (12i + 3j - 4k) \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{14}}i - \frac{2}{\sqrt{14}}j + \frac{1}{\sqrt{14}}k\right) = \frac{36}{\sqrt{14}} - \frac{6}{\sqrt{14}} - \frac{4}{\sqrt{14}} = \frac{13}{7}\sqrt{14}$$

11. Aplicamos o Teorema 17.5.1 ao vetor $2xe^{x^2}\ln y\, i + \frac{e^{x^2}}{y}j = M(x, y)i + N(x, y)j$. Então,

$M_y(x, y) = \frac{2x}{y}e^{x^2}$ e $N_x(x, y) = \frac{2x}{y}e^{x^2}$. $M_y = N_x$, logo, o vetor dado é um gradiente $\nabla f(x, y)$.

$f_x(x, y) = 2xe^{x^2}\ln y$ e $f_y = \frac{e^{x^2}}{y}$. $f(x, y) = e^{x^2}\ln y + g(y)$; $f_y(x, y) = \frac{e^{x^2}}{y} + g'(y) = \frac{e^{x^2}}{y}$.

$g'(y) = 0$; $g(y) = C$. Portanto, $f(x, y) = e^{x^2}\ln y + C$.

13. Aplicamos o Teorema 17.5.2 ao vetor $\left[\frac{-y}{(x+z)^2} + \frac{1}{x^2}\right]\mathbf{i} + \frac{1}{x+z}\mathbf{j} + \left[\frac{-y}{(x+z)^2} + \frac{2}{z^2}\right]\mathbf{k}$.

Seja $M(x, y, z) = \frac{-y}{(x+z)^2} + \frac{1}{x^2}$, $N(x, y, z) = \frac{1}{x+z}$, e $R(x, y, z) = \frac{-y}{(x+z)^2} + \frac{2}{z^2}$.

$M_y(x, y, z) = \frac{-1}{(x+z)^2}$ $\quad N_x(x, y, z) = \frac{-1}{(x+z)^2}$ $\quad R_x(x, y, z) = \frac{2y}{(x+z)^3}$

$M_z(x, y, z) = \frac{2y}{(x+z)^3}$ $\quad N_z(x, y, z) = \frac{-1}{(x+z)^2}$ $\quad R_y(x, y, z) = \frac{-1}{(x+z)^2}$

Como $M_y = N_x$, $M_z = R_x$ e $N_z = R_y$, o vetor dado é um gradiente $\nabla f(x, y, z)$ onde

$f_x(x, y, z) = \frac{-y}{(x+z)^2} + \frac{1}{x^2}$ $\quad f_y(x, y, z) = \frac{1}{x+z}$ $\quad f_z(x, y, z) = \frac{-y}{(x+z)^2} + \frac{2}{z^2}$

De f_x, $f(x, y, z) = \frac{y}{x+z} - \frac{1}{x} + g(y, z)$; $f_y(x, y, z) = \frac{1}{x+z} + g_y(y, z) = \frac{1}{x+z}$. $g_y(y, z) = 0$;

$g(y, z) = h(z)$. Logo, $f(x, y, z) = \frac{y}{x+z} - \frac{1}{x} + h(z)$. $f_z(x, y, z) = \frac{-y}{(x+z)^2} + h'(z) = \frac{-y}{(x+z)^2} + \frac{2}{z^2}$;

$h'(z) = \frac{2}{z^2}$; $h(z) = -\frac{2}{z} + C$. Portanto, $f(x, y, z) = \frac{y}{x+z} - \frac{1}{x} - \frac{2}{z} + C$.

15. Seja $F(x, y, z) = x^2 + 2y + z - 8$. Então, $\nabla F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Logo, $\nabla F(2, 1, 2) = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.
Uma equação do plano tangente em $(2, 1, 2)$ é

$$4(x-2) + 2(y-1) + (z-2) = 0; \quad 4x + 2y + z - 12 = 0$$

As equações da reta normal em $(2, 1, 2)$ são $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}$.

17. Seja $F(x, y, z) = x^2 - 3xy + y^2 - z$ e $G(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 3z + 27$.
$\nabla F(x, y, z) = (2x - 3y)\mathbf{i} + (-3x + 2y)\mathbf{j} - \mathbf{k}$ e $\nabla G(x, y, z) = 4x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.
Seja $N_1 = \nabla F(1, -2, 11) = 8\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - \mathbf{k}$ e $N_2 = \nabla G(1, -2, 11) = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.
$N_1 \times N_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 8 & -7 & -1 \\ 4 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 17\mathbf{i} + 20\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$. As equações da reta tangente à curva de intersecção em $(1, -2, 11)$ são $\frac{x-1}{17} = \frac{y+2}{20} = \frac{z-11}{-4}$.

19. $z = 900 - 3xy$. Seja $f(x, y) = 900 - 3xy$. $\nabla f(x, y) = -3y\mathbf{i} - 3x\mathbf{j}$.

(a) A direção e sentido de subida mais íngreme em $(50, 4, 300)$ é $\nabla f(50, 4) = -12\mathbf{i} - 150\mathbf{j}$.

(b) O eixo y aponta para o sul; portanto, a direção do norte é $-\mathbf{j}$. Se $\mathbf{U} = -\mathbf{j}$, então $D_U f(x, y) = (-12\mathbf{i} - 150\mathbf{j}) \cdot (-\mathbf{j}) = 150 > 0$. Portanto, o alpinista está subindo.

(c) Seja $\mathbf{U} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$. O alpinista está passando por uma curva de nível quando sua direção é aquela para a qual $D_U f(x, y) = 0$, isto é,

$$(-12\mathbf{i} - 150\mathbf{j}) \cdot (\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}) = 0; \quad -12\cos\theta - 150\operatorname{sen}\theta = 0; \quad \operatorname{tg}\theta = -\frac{2}{25}$$

Então, $\cos\theta = \frac{25}{\sqrt{629}}$ e $\operatorname{sen}\theta = -\frac{2}{\sqrt{629}}$ ou $\cos\theta = -\frac{25}{\sqrt{629}}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{\sqrt{629}}$.

Uma curva de nível fica nas direções $\frac{25}{\sqrt{629}}\mathbf{i} - \frac{-2}{\sqrt{629}}\mathbf{j}$ ou $-\frac{25}{\sqrt{629}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{629}}\mathbf{j}$.

21. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$. $f_x(x, y) = 3x^2 + 3y$; $f_y(x, y) = 3y^2 + 3x$.

$$f_{xx}(x, y) = 6x \quad f_{yy}(x, y) = 6y \quad f_{xy}(x, y) = 3$$

$f_x(x, y) = 0$: $x^2 + y = 0$; $y = -x^2$. $f_y(x, y) = 0$: $y^2 + x = 0$; $x^4 + x = 0$; $x(x^3 + 1) = 0$; $x = 0, -1$.
Os pontos críticos são $(0, 0)$ e $(-1, -1)$. Aplicamos o teste da derivada segunda.
$f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - f_{xy}(0, 0) = 0 \cdot 0 - 3^2 < 0$. Logo, $f(0, 0)$ não é um extremo relativo.

$f_{xx}(-1, -1) = -6 < 0$ e $f_{xx}(-1, -1)f_{yy}(-1, -1) - f_{xy}{}^2(-1, -1) = (-6)(-6) - 3^2 = 27 > 0$

Portanto, $f(-1, -1) = 1$ é um valor máximo relativo.

23. $f(x, y) = 5 + x^2 - y^2$, e $x^2 - 2y^2 = 5$. $F(x, y, \lambda) = 5 + x^2 - y^2 + \lambda(x^2 - 2y^2 - 5)$.
$F_x(x, y, \lambda) = 2x + 2\lambda x = 0$; $x = 0$ ou $\lambda = -1$. $F_y(x, y, \lambda) = -2y - 4\lambda y = 0$; $y = 0$ ou $\lambda = -\frac{1}{2}$.
$F_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 - 2y^2 - 5 = 0$. Se $x = 0$, $-2y^2 - 5 = 0$ é impossível. Se $y = 0$, $x^2 - 5 = 0$; $x = \pm\sqrt{5}$.
Os números críticos são $(\sqrt{5}, 0)$ e $(-\sqrt{5}, 0)$. Considere y como uma função de x.
De vínculo, $2x - 4y\frac{dy}{dx} = 0$; $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y}$. $\frac{df}{dx} = 2x - 2y\frac{dy}{dx} = 2x - 2y \cdot \frac{x}{2y} = x$, $\frac{d^2f}{dx^2} = 1 > 0$.
Portanto, f tem um mínimo relativo em cada ponto crítico em $f(\pm\sqrt{5}, 0) = 10$.

25. $f(x, y, z) = y + xz - 2x^2 - y^2 - z^2$, e $z = 35 - x - y$.
$F(x, y, z, \lambda) = y + xz - 2x^2 - y^2 - z^2 + \lambda(35 - x - y - z)$.
$F_x(x, y, z, \lambda) = z - 4x - \lambda = 0$; $z = 4x + \lambda$. $F_y(x, y, z, \lambda) = 1 - 2y - \lambda = 0$; $y = \frac{1}{2}(1 - \lambda)$.
$F_z(x, y, z, \lambda) = x - 2z - \lambda = 0$; $x - 8x - 2\lambda - \lambda = 0$; $x = -\frac{3}{7}\lambda$, $z = -\frac{5}{7}\lambda$.
$F_\lambda(x, y, z, \lambda) = 35 - x - y - z = 0$; $- \lambda + \frac{1}{2}(1 - \lambda) - \frac{5}{7}\lambda = 35$; $-6\lambda + 7 - 7\lambda - 0\lambda = 490$; $-23\lambda = 4$
$\lambda = -21$. $x = - \lambda = -(-21) = 9$. $y = \frac{1}{2}(1 - \lambda) = \frac{1}{2}(1 + 21) = 11$, $z = -\frac{5}{7}\lambda = -\frac{5}{7}(-21) = 15$.
O ponto crítico é $P(9, 11, 15)$ e $f(9, 11, 15) = -362$.

Considere z como uma função de x e y. Do vínculo $\frac{\partial z}{\partial x} = -1$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = -1$.
$f_x = z + x\frac{\partial z}{\partial x} - 4x - 2z\frac{\partial z}{\partial x} = z - x - 4x + 2z = 3z - 5x$; $f_y = 1 + x\frac{\partial z}{\partial y} - 2y - 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 1 - x - 2y + 2z$.

$$f_{xx} = 3\frac{\partial z}{\partial x} - 5 = -3 - 5 = -8 < 0; \quad f_{yy} = -2 + 2\frac{\partial z}{\partial y} = -2 - 2 = -4; \quad f_{xy} = 3\frac{\partial z}{\partial y} = -3.$$

$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}{}^2 = (-8)(-4) - (-3)^2 = 23$. Logo, f tem um máximo relativo em P.

27. Seja w unidades a distância do ponto $(4, 1, 2)$ a um ponto (x, y, z) no plano $x - y + 2z = 0$. w será um mínimo quando w^2 for um mínimo. Seja

$$f(x, y, z) = w^2 = (x - 4)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2$$

$$F(x, y, z, \lambda) = (x - 4)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 + \lambda(x - y + 2z)$$

$F_x = 2x - 8 + \lambda = 0$; $x = \frac{1}{2}(8 - \lambda)$. $F_y = 2y - 2 - \lambda = 0$; $y = \frac{1}{2}(2 + \lambda)$. $F_z = 2z - 4 + 2\lambda = 0$; $z = 2 - \lambda$.
$F_\lambda = x - y + 2z = 0$; $\frac{1}{2}(8 - \lambda) - \frac{1}{2}(2 + \lambda) + 2(2 - \lambda) = 0$. $\lambda = \frac{7}{3}$, $x = \frac{17}{6}$, $y = \frac{13}{6}$, $z = -\frac{1}{3}$. O ponto crítico é $P\left(\frac{17}{6}, \frac{13}{6}, -\frac{1}{3}\right)$ e em P, $w = \sqrt{\left(\frac{17}{6} - 4\right)^2 + \left(\frac{13}{6} - 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{3} - 2\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{36} + \frac{49}{36} + \frac{49}{9}} = \frac{7}{6}\sqrt{6}$.
Como $f(x, y, z) \geq 10$ dentro ou fora da esfera $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 10$, tem um mínimo em um ponto crítico dentro *do conjunto fechado e limitado* de vínculos pela intersecção dessa esfera e o plano dado, isto é ,em P.

29. $(6x^2y + 5x)\,dx + (2x^3 + 3y)\,dy = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$. $M_y(x, y) = 6x^2$, $N_y(x, y) = 6x^2$.

Como $M_x(x, y) = M_y(x, y)$, a expressão é a diferencial exata de f, onde

$f_x(x, y) = 6x^2y + 5x$ e $f_y(x, y) = 2x^3 + 3y$. $f(x, y) = 2x^3y + \frac{5}{2}x^2 + g(y)$;

$f_y(x, y) = 2x^3 + g'(y) = 2x^3 + 3y$; $g'(y) = 3y$; $g(y) = \frac{3}{2}y^2 + C$. Logo, $f(x, y) = 2x^3y + \frac{5}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + C$.

31. $e^x \operatorname{tg} y\,dx + (e^x \sec^2 y - z \operatorname{cosec}^2 y)\,dy + \operatorname{cotg} y\,dz = M(x, y, z)\,dx + N(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$

$M_y(x, y, z) = e^x \sec^2 y$ $\qquad N_x(x, y, z) = e^x \sec^2 y$ $\qquad R_x(x, y, z) = 0$

$M_z(x, y, z) = 0$ $\qquad N_z(x, y, z) = -\operatorname{cosec}^2$ $\qquad R_x(x, y, z) = -\operatorname{cosec}^2 y$

Como $M_y = N_x$, $R_x = M_z$, e $N_z = R_y$, a expressão é a diferencial exata de $f(x, y, z)$

onde $f_x(x, y, z) = e^x \operatorname{tg} y$ $\qquad f_y(x, y, z) = e^x \sec^2 y - z \operatorname{cosec}^2 y$ $\quad f_z(x, y, z) = \operatorname{cotg} y$

De f_x, $f(x, y, z) = e^x \operatorname{tg} y + g(y, z)$. $f_y(x, y, z) = e^x \sec^2 y + g_y(y, z) = e^x \sec^2 y - z \operatorname{cosec}^2 y$;

$g_y(y, z) = -z \operatorname{cosec}^2 y$; $g(y, z) = z \operatorname{cotg} y + h(z)$. Portanto, $f(x, y, z) = e^x \operatorname{tg} y + z \operatorname{cotg} y + h(z)$.

$f_z(x, y, z) = \operatorname{cotg} y + h'(z) = \operatorname{cotg} y$; $h'(z) = 0$; $h(z) = C$. Logo, $f(x, y, z) = e^x \operatorname{tg} y + z \operatorname{cotg} y + C$.

33. $(3x^2y^2 + 2y^3)\,dx + (2x^3y + 6xy^2)\,dy = 0$. Seja $M(x, y) = 3x^2 + 2y^3$ e $N(x, y) = 2x^3y + 6xy^2$.

$$M_y(x, y) = 6x^2y + 6y^2 \quad \text{e} \quad N_x(x, y) = 6x^2y + 6y^2$$

Como $M_y(x, y) = N_x(x, y)$, a equação diferencial é exata com solução geral

$f(x, y) = C$ onde $f_x(x, y) = 3x^2y^2 + 2y^3$ e $f_y(x, y) = 2x^3y + 6xy^2$. $f(x, y) = x^3y^2 + 2xy^3 + g(y)$.

$f_y(x, y) = 2x^3y + 6xy^2 + g'(y) = 2x^3 + 6xy^2$; $g'(y) = 0$; $g(y) = 0$. Logo, $f(x, y) = x^3y^2 + 2xy^3$ e

a solução geral é $x^3y^2 + 2xy^3 = C$.

35. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ye^{-x} - \operatorname{sen} x}{e^{-x} + 2y}$. Seja $M(x, y) = ye^{-x} - \operatorname{sen} x$, $N(x, y) = -e^{-x} - 2y$. $M_y(x, y) = e^{-x}$, $N_x(x, y) = e^{-x}$.

Como $M_y(x, y) = N_x(x, y)$, a equação diferencial é exata com solução geral

$f(x, y) = C$ onde $f_x(x, y) = ye^{-x} - \operatorname{sen} x$ e $f_y(x, y) = -e^{-x} - 2y$. $f(x, y) = -ye^{-x} + \cos x + g(y)$.

$f_y(x, y) = -e^{-x} + g'(y) = -e^{-x} - 2y$; $g'(y) = -2y$; $g(y) = -y^2$. Logo, $f(x, y) = -ye^{-x} + \cos x - y^2$

e a solução geral é $ye^{-x} - \cos x + y^2 = C$.

37. Sejam os três números x, y, e $100 - x - y$. Seja $f(x, y) = x^2 + y^2 + (100 - x - y)^2$.

$f_x(x, y) = 4x + 2y - 200 = 0$; $f_y(x, y) = 4y + 2x - 200 = 0$. Então, $x = \frac{100}{3}$, $y = \frac{100}{3}$, $100 - x - y = \frac{100}{3}$.

$f\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right) = \frac{10.000}{3}$. Se $|x| \geq 100$ ou $|y| \geq 100$, então $f(x, y) \geq 10.000$, logo, f tem um mínimo absoluto em um ponto crítico dentro do quadrado $|x| \leq 100$, $|y| \leq 100$, isto é, em $\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right)$.

Assim, os três números são $\frac{100}{3}$, $\frac{100}{3}$, e $\frac{100}{3}$.

39. Sejam 2r, 2s e 2t as medidas das arestas do paralelepípedo retangular P paralelo aos eixos x, y e z, respectivamente. Se V unidades cúbicas for o volume de P, então $V = 8rst$. Seja $f = V^2/64 = r^2s^2t^2$, $r \geq 0$, $s \geq 0$, $t \geq 0$. Como o vértice (r, s, t) está no elipsóide $x^2 + 9y^2 + z^2 = 9$, então $r^2 + 9s^2 + t^2 = 9$; $r^2 = 9 - 9s^2 - t^2$. Portanto,

$$f = (9 - 9s^2 - t^2)s^2t^2 = 9s^2t^2 - 9s^4t^2 - s^2t^4$$

Se $s \geq 1$, $s = 0$, $t \geq 3$, ou $t = 0$, então $f \leq 0$. Logo, f tem um valor máximo absoluto em um ponto crítico dentro do retângulo $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq 3$.

$$f_s = 18st^2 - 36s^3t^2 - 2st^4 = 2st^2(9 - 18s^2 - 2t^2) = 0; \quad 18s^2 + 2t^2 = 9$$

$$f_t = 18s^2t - 18s^4t - 4s^2t^3 = 2s^2t(9 - 9s^2 - 4t^2) = 0; \quad 9s^2 + 4t^2 = 9$$

Resolvendo simultaneamente por s^2 e t^2 obtemos $s^2 = \frac{1}{3}$, $t^2 = 3$, então apenas o ponto crítico em R é $(\frac{1}{3}\sqrt{3}, \sqrt{3})$ que deve dar o máximo. Então, $r^2 = 3$; $r = \sqrt{3}$ logo, as dimensões do paralelepípedo retangular de maior volume são $2\sqrt{3}$ por $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ por $2\sqrt{3}$.

41. A temperatura é T graus em qualquer ponto (x, y) e $T(x, y) = \dfrac{44}{x^2 + y^2 + 9}$, onde a distância da origem é medida em centímetros

(a) Queremos encontrar $D_U T(3, 2)$ onde $U = \cos \frac{1}{6}\pi i + \text{sen}\, \frac{1}{6}\pi j$.

$T_x(x, y) = \dfrac{-88x}{(x^2 + y^2 + 9)^2}$; $T_x(3, 2) = \dfrac{-88 \cdot 3}{(22)^2} = -\dfrac{6}{11}$. $T_y(x, y) = \dfrac{-88y}{(x^2 + y^2 + 9)^2}$; $T_y(3, 2) = \dfrac{-88 \cdot 2}{(22)^2} = -\dfrac{4}{11}$

$\nabla T(3, 2) = -\dfrac{6}{11} i - \dfrac{4}{11} j$. Logo, $D_U T(3, 2) = U \cdot \nabla T(3, 2) = (\frac{1}{2}\sqrt{3} i + \frac{1}{2} j) \cdot \left(-\dfrac{6}{11} i - \dfrac{4}{11} j\right) = -\dfrac{3}{11}\sqrt{3} - \dfrac{2}{11}$.

Assim, a taxa de variação da temperatura no ponto (3, 2) na direção e sentido de U é $-\dfrac{3}{11}\sqrt{3} - \dfrac{2}{11}$ graus por cm.

(b) $D_U T(3, 2)$ é um máximo quando U está na direção e sentido de $\nabla T(3, 2)$.

$$|\nabla T(3, 2)| = \frac{1}{11}\sqrt{36 + 16} = \frac{1}{11}\sqrt{52} = \frac{2}{11}\sqrt{13}$$

Portanto, a taxa de variação máxima de T no ponto (3, 2) é $\dfrac{2}{11}\sqrt{13}$ graus por cm, na direção e sentido do vetor $-\dfrac{3}{13}\sqrt{13} i - \dfrac{2}{13}\sqrt{13} j$.

43. Sejam x cm , y cm z cm o comprimento, a largura e a altura do caixote. Então,

$$4x + 4y + 4z = 216; \quad x + y + z = 54; \quad z = 54 - x - y$$

Se v cm^3 for o volume da caixa, então $V = xyz = xy(54 - x - y) = 54xy - x^2y - xy^2$.

Se $x \geq 54$, $x = 0$, $y \geq 54$, ou $y = 0$, então, $V \leq 0$. Logo, V tem um valor máximo absoluto em um ponto crítico dentro do quadrado $0 \leq x \leq 54$, $0 \leq y \leq 54$.

$$V_x = 54y - 2xy - y^2 = y(54 - 2x - y) = 0; \quad 2x + y = 54$$

$$V_y = 54x - x^2 - 2xy = x(54 - x - 2y) = 0; \quad x + 2y = 54$$

O único ponto crítico é (18, 18), que dá o máximo desejado. As dimensões do caixote de maior volume são 18 cm por 18 cm.

45. Veja os Exercícios 17.3.31 e 17.4.31 para duas soluções diferentes.

47.

x (anos)	54	46	40	36	30
y (dias)	15	12	9	10	8

$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 2322$, $\sum_{i=1}^{5} x_i = 206$, $\sum_{i=1}^{5} y_i = 54$, $\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 8828$.

$m = \dfrac{(5*2322 - 206*54)}{(5*8828 - 206^2)} = 0,285$, $b = \dfrac{(54 - 0,285*206)}{5} = -0,951$. A reta de regressão tem a equação

$y = 0,285x - 0,951$. Quando $x = 42$, $y = 0,285*42 - ,951 = 11,0$. O tempo de internação é 11 dias.

49.

x (mm/ano/100)	1	2	4	5	6	6.5
y (kg/ha/100)	10	19	32	44	58	64

$\sum_{i=1}^{6} x_i y_i = 1160$, $\sum_{i=1}^{6} x_i = 24.5$, $\sum_{i=1}^{6} y_i = 227$,

$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 124,25$. $m = \dfrac{(6*1.160 - 24.5*227)}{(6*124,25 - 24,5^2)} = 9,628$, $b = \dfrac{(227 - 9,628*24.5)}{6} = -1,482$.

A reta de regressão tem a equação $y = 9,628x - 1,482$.

Quando $x = 3$, $100y = 100*(9,628*3 - 1,482) = 2740$.

CAPÍTULO DEZOITO

INTEGRAÇÃO MÚLTIPLA

EXERCÍCIOS 18.1 A Integral Dupla

1. Seja $f(x, y) = 3x - 2y + 1$. $\iint_R (3x - 2y + 1)\,dA$

$\approx f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)\cdot 1$

$= \frac{7}{2} + \frac{13}{2} + \frac{19}{2} + \frac{11}{2} + \frac{17}{2} + \frac{23}{2} = 45$

3. Seja $f(x, y) = x^2 + y$. $\iint_R (x^2 + y)\,dA$

$\approx f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)\cdot 1$

$= \frac{3}{4} + \frac{11}{4} + \frac{27}{4} + \frac{51}{4} + \frac{7}{4} + \frac{15}{4} + \frac{31}{4} + \frac{55}{4} = 50$

5. Seja $f(x, y) = xy + 3y^2$. $\iint_R (xy + 3y^2)\,dA$

$\approx f(-1, 1)\cdot 4 + f(1, 1)\cdot 4 + f(3, 1)\cdot 4 + f(3, 3)\cdot 4 + f(1, 3)\cdot 4 + f(-1, 3)\cdot 4 + f(-1, 5)\cdot 4 + f(1, 5)\cdot 4 + f(3, 5)\cdot 4$

$= 2\cdot 4 + 4\cdot 4 + 6\cdot 4 + 36\cdot 4 + 30\cdot 4 + 24\cdot 4 + 70\cdot 4 + 80\cdot 4 + 90\cdot 4 = 1368$

7. Seja $f(x, y) = x^2y - 2xy^2$. $\iint_R (x^2y - 2xy^2)\,dA$

$\approx f(-2, -1)\cdot 4 + f(0, -1)\cdot 4 + f(-2, 1)\cdot 4 + f(0, 1)\cdot 4 + f(-2, 3)\cdot 4 + f(0, 3)\cdot 4 + f(-2, 5)\cdot 4 + f(0, 5)\cdot 4$

$= 0\cdot 4 + 0\cdot 4 + 8\cdot 4 + 0\cdot 4 + 48\cdot 4 + 0\cdot 4 + 120\cdot 4 + 0\cdot 4 = 704$

9. Seja $f(x, y) = x^2 + y$. Como $\Delta_i A = 1$, $\iint_R (x^2 + y)\,dA$

$\approx [f(,25;\ ,5) + f(1,75;\ 0) + f(2,5;\ ,25) + f(4, 1) + f(,75,\ 1;75) + f(1,25;\ 1,5) + f(2,5;\ 2) + f(3, 1)]$

$= (,25^2 +; 5) + 1,75^2 + (2,45^2 +, 25) + (4^2 + 1) + (,75^2 + 1,75) + (1,25^2 + 1,5) + (2,5^2 + 2) + (3^2 + 1)$

$= 50,75$

11. Seja $f(x, y) = xy + 3y^2$. Como $\Delta_i A = 4$, $\iint_R (xy + 3y^2)\,dA$

$\approx [f(-,5;\ ,5) + f(1;\ 1,5) + f(2,5;\ 2) + f(-1,5;\ 3,5) + f(0, 3) + f(4, 4) + f(-1;\ 4,5) + f(1;\ 4,5) + f(3;\ 4,5)]\,4$

$= [0,5 + 8,75 + 17 + 31,5 + 27 + 64 + 56,25 + 165,25 + 74,75]\,4 = 1376$

13. Seja V unidades cúbicas o volume do sólido. Então,

$V = \iint_R \sqrt{64 - x^2 - y^2}\,dA$. Seja $f(x, y) = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$.

$V \approx f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)\cdot 1$

$= \sqrt{64 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}} + \sqrt{64 - \frac{9}{4} - \frac{1}{4}} + \sqrt{64 - \frac{25}{4} - \frac{1}{4}} + \sqrt{64 - \frac{1}{4} - \frac{9}{4}} + \sqrt{64 - \frac{9}{4} - \frac{9}{4}} + \sqrt{64 - \frac{25}{4} - \frac{9}{4}} + \sqrt{64 - \frac{1}{4} - \frac{25}{4}} + \sqrt{64 - \frac{9}{4} - \frac{25}{4}} + \sqrt{64 - \frac{25}{4} - \frac{25}{4}}$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{254} + \sqrt{246} + \sqrt{230} + \sqrt{246} + \sqrt{238} + \sqrt{222} + \sqrt{230} + \sqrt{222} + \sqrt{206}) \approx 68,6$

15. Seja V unidades cúbicas o volume do sólido. Então,

$V = \iint_R \left(10 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2\right) dA$. Seja $f(x, y) = 10 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2$.

$$V \approx f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)\cdot 1$$

$$= \left(10 - \frac{1}{16} - \frac{1}{36}\right) + \left(10 - \frac{9}{16} - \frac{1}{36}\right) + \left(10 - \frac{1}{16} - \frac{9}{36}\right) + \left(10 - \frac{9}{16} - \frac{9}{36}\right) \approx 38,2$$

17. Seja $f(x, y) = 2x + 5y$. Como f é linear, os extremos absolutos de f ocorrem em vértices da região retangular R.

$$f(0, 0) = 0 \quad f(1, 0) = 2 \quad f(1, 2) = 12 \quad f(0, 2) = 10$$

Portanto, $0 \le f(x, y) \le 12$ para todo (x, y) em R. Como $A = 2$, temos do Teorema 17.1.8

$$0\cdot 2 \le \iint_R (2x + 5y)\, dA \le 12\cdot 2; \quad 0 \le \iint_R (2x + 5y)\, dA \le 24$$

19. Seja $f(x, y) = e^{xy}$. Como e^t é crescente $e^{xy} \ge e^{0,0} = 1$ e $e^{xy} \le e^{1,1} = e$ para todo (x, y) em R. Como $A = 1$, temos do Teorema 17.1.8 17.1.8

$$1\cdot 1 \le \iint_R e^{xy} dA \le e\cdot 1; \quad 1 \le \iint e^{xy} dA \le e$$

21. Seja $f(x, y) = \text{sen}(x + y) + \text{sen}\, x + \text{sen}\, y$. Do Exercício 16.3.11, o ponto crítico de f em R é $P(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi)$. Logo, os extremos absolutos de f ocorrem em P ou na lateral de R. $f(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$. Se $y = 0$, $f(x, y) = 2\,\text{sen}\, x$ com extremos 0 e 1. Se $x = 0$, $f(x, y) = 2\,\text{sen}\, y$ com extremos 0 e 1. Se $x = \pi$ ou $y = \pi$, $f(x, y) \equiv 0$. Assim, $0 \le \text{sen}(x + y) + \text{sen}\, x + \text{sen}\, y \le \frac{3}{2}\sqrt{3}$ para todo (x, y) em R. Como $A = \pi^2$, temos do Teorema 17.1.8

$$0 = 0\cdot\pi^2 \le \iint_R [\text{sen}(x + y) + \text{sen}\, x + \text{sen}\, y]\, dA \le \tfrac{3}{2}\sqrt{3}\cdot\pi^2$$

EXERCÍCIOS 18.2 Cálculo de Integrais Duplas e Integrais Iteradas

V unidades cúbicas de volume é o volume requerido e A unidades quadradas é a área pedida.

1. $\int_1^2\int_0^{2x} xy^3\, dy\, dx = \int_1^2\left[\int_0^{2x} xy^3\, dy\right] dx = \int_1^2\left[\frac{1}{4}xy^4\right]_0^{2x} dx = \int_1^2 4x^5\, dx = \frac{2}{3}x^6\Big]_1^2 = \frac{2}{3}(64 - 1) = 42$

3. $\int_0^4\int_0^y \sqrt{9 + y^2}\, dx\, dy = \int_0^4\left[\int_0^y \sqrt{9 + y^2}\, dx\right] dy = \int_0^4\left[x\sqrt{9 + y^2}\right]_0^y = \int_0^4 y(9 + y^2)^{1/2} dy = \frac{1}{3}(9 + y^2)^{3/2}\Big]_0^4$

$$= \frac{1}{3}(125 - 27) = \frac{98}{3}$$

5. $\int_1^4\int_{y^2}^{y}\sqrt{\frac{y}{x}}\,dx\,dy = \int_1^4\left[\int_{y^2}^{y} y^{1/2}x^{-1/2}dx\right]dy = \int_1^4\left[2y^{1/2}x^{1/2}\right]_{y^2}^{y}dy = 2\int_1^4(y - y^{3/2})\,dy = 2\left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{2}{5}y^{5/2}\right]_1^4$

$= 2\left[\left(8 - \frac{64}{5}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right)\right] = -\frac{49}{5}$

7. Como $|x - y|$ é simétrico em relação à reta $y = x$,

$\int_0^1\int_0^1|x - y|\,dy\,dx = 2\int_0^1\left[\int_0^x|x - y|\,dy\right]dx = 2\int_0^1\left[\int_0^x(x - y)\,dy\right]dx = 2\int_0^1\left[xy - \frac{1}{2}y^2\right]_0^x dx = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}x^3\Big]_0^1 = \frac{1}{3}$

9. $\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^x \operatorname{sen}(4x - y)\,dy\,dx = \int_{\pi/2}^{\pi}\left[\int_0^x \operatorname{sen}(4x - y)\,dy\right]dx = \int_{\pi/2}^{\pi}\left[\cos(4x - y)\right]_0^x dx$

$= \int_{\pi/2}^{\pi}(\cos 3x - \cos 4x)\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x\Big]_{\pi/2}^{\pi} = 0 - \left(\frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\pi\right) = \frac{1}{3}$

11. $\iint_R(3x - 2y + 1)\,dA = \int_0^3\int_{-2}^0(3x - 2y + 1)\,dy\,dx = \int_0^3\left[3xy - y^2 + y\right]_{-2}^0 dx = \int_0^3(6x + 6)\,dx = 3x^2 + 6x\Big]_0^3 = 45$

13. $\iint_R(x^2 + y)\,dA = \int_0^4\int_0^2(x^2 + y)\,dy\,dx = \int_0^4\left[x^2y + \frac{1}{2}y^2\right]_0^2 dx = \int_0^4(2x^2 + 2)\,dx = \frac{2}{3}x^3 + 2x\Big]_0^4 = \frac{128}{3} + 8 = \frac{152}{3}$

15. $\iint_R \operatorname{sen} x\,dA = \int_0^{\pi}\int_{x/2}^{2x}\operatorname{sen} x\,dy\,dx = \int_0^{\pi}\left[y\operatorname{sen} x\right]_{x/2}^{2x}dx = \int_0^{\pi}\frac{3}{2}x\operatorname{sen} x\,dx = \frac{3}{2}\left[\operatorname{sen} x - x\cos x\right]_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi$

17. Como o integrando é simétrico em relação aos eixos x e y.

$\iint_R x^2\sqrt{9 - y^2}\,dA = 4\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-y^2}}x^2\sqrt{9 - y^2}\,dx\,dy = 4\int_0^3\left[\frac{1}{3}x^3\sqrt{9 - y^2}\right]_0^{\sqrt{9-y^2}}dy = \frac{4}{3}\int_0^3(9 - y^2)^2dy$

$= \frac{4}{3}\int_0^3(81 - 18y^2 + y^4)\,dy = \frac{4}{3}\left[81y - 6y^3 + \frac{1}{5}y^5\right]_0^3 = \frac{4}{3}(81\cdot 3 - 6\cdot 3^3 + \frac{1}{5}\cdot 3^5) = \frac{864}{5}$

19. $V = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}4\xi_i\Delta_i A = 4\iint_R x\,dA = 8\int_0^4\int_0^{\sqrt{16-x^2}}x\,dy\,dx = 8\int_0^4\left[xy\right]_0^{\sqrt{16-x^2}}dx = 8\int_0^4 x(16 - x^2)^{1/2}dx$

$= -\frac{8}{3}(16 - x^2)^{3/2}\Big]_0^4 = \frac{512}{3}$

21. $V = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{4 - \xi_i^2}\,\Delta_i A = \iint_R\sqrt{4 - x^2}\,dA = \int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{4 - x^2}\,dy\,dx = \int_0^2\left[y\sqrt{4 - x^2}\right]_0^{\sqrt{4-x^2}}dx$

$= \int_0^2(4 - x^2)\,dx = 4x - \frac{1}{3}x^3\Big]_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$

23. $V = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1 - \xi_i}\,dA = \iint_R\sqrt{1 - x}\,dA = \int_0^1\int_{y^2}^{y}(1 - x)^{1/2}dx\,dy = \int_0^1\left[-\frac{2}{3}(1 - x)^{3/2}\right]_{y^2}^{y}dy$

$= -\frac{2}{3}\int_0^1[(1 - y)^{3/2} - (1 - y^2)^{3/2}]\,dy$. Seja $y = \operatorname{sen}\theta$, $dy = \cos\theta\,d\theta$ no segundo termo. Então,

$V = \left[\frac{4}{15}(1 - y)^{5/2}\right]_0^1 + \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta = -\frac{4}{15} + \frac{2}{3}\left[\frac{1}{4}\cos^3\theta\operatorname{sen}\theta + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\cos\theta\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}\theta\right)\right]_0^{\pi/2}$

$= -\frac{4}{15} + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{8}\pi - \frac{4}{15}$

25. $A = \iint_R dA = \int_0^1\int_{x^3}^{x^2}dy\,dx = \int_0^1\left[y\right]_{x^3}^{x^2}dx = \int_0^1(x^2 - x^3)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\Big]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

27. Como a região é simétrica em relação aos eixos x e y.

$$A = \iint_R dA = 4\int_0^3\int_0^{9-x^2} dy\,dx = 4\int_0^3 \Big[y\Big]_0^{9-x^2} dx = 4\int_0^3 (9 - x^2)\,dx = 4\left[9x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = 4(27 - 9) = 72$$

29. $$V = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} c\sqrt{1 - \frac{\xi_i^2}{a^2} - \frac{\gamma_i^2}{b^2}}\,\Delta_i A = c\iint_R \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dA = c\int_{-a}^{a}\int_{-b\sqrt{1-(x/a)^2}}^{b\sqrt{1-(x/a)^2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dy\,dx$$

Para avaliar essa integral, seja $x = au$, $dx = a\,du$, $y = bv$, $dy = b\,dv$. Então,

$$V = abc\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} \sqrt{1 - u^2 - v^2}\,dv\,du = abc\cdot(\text{volume da esfera}) = \frac{4}{3}\pi abc$$

31. A parábola $y^2 = 2x$ e a reta $2x + 3y = 10$ interceptam-se no primeiro quadrante em (2, 2), a parábola intercepta o eixo x em (0, 0), e a reta intercepta o eixo x em (5, 0).

$$V = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n}\left(4 - \frac{1}{2}\xi_i - \frac{4}{3}\gamma_i\right)\Delta_i A = \iint_R \left(4 - \frac{1}{2}x - \frac{4}{3}y\right)dA$$

(a) $$V = \int_0^2\int_{y^2/2}^{(10-3y)/2}\left(4 - \frac{1}{2}x - \frac{4}{3}y\right)dx\,dy = \int_0^2\left[4x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{4}{3}xy\right]_{y^2/2}^{(10-3y)/2} dy$$

$$= \int_0^2\left(\frac{55}{4} - \frac{107}{12}y - \frac{9}{16}y^2 + \frac{2}{3}y^3 + \frac{1}{16}y^4\right)dy = \frac{55}{4}y - \frac{107}{24}y^2 - \frac{3}{16}y^3 + \frac{1}{6}y^4 + \frac{1}{80}y^5\Big]_0^2$$

$$= \frac{55}{2} - \frac{107}{6} - \frac{3}{2} + \frac{8}{3} + \frac{2}{5} = \frac{337}{30}$$

(b) $$V = \int_0^2\int_0^{\sqrt{2x}}\left(4 - \frac{1}{2}x - \frac{4}{3}y\right)dy\,dx + \int_2^5\int_0^{(10-2x)/3}\left(4 - \frac{1}{2}x - \frac{4}{3}y\right)dy\,dx$$

$$= \int_0^2\left[4y - \frac{1}{2}xy - \frac{2}{3}y^2\right]_0^{\sqrt{2x}} dx + \int_2^5\left[4y - \frac{1}{2}xy - \frac{2}{3}y^2\right]_0^{(10-2x)/3} dx$$

$$= \int_0^2\left(4\sqrt{2}x^{1/2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}x^{3/2} - \frac{4}{3}x\right)dx + \int_2^5\left(\frac{160}{27} - \frac{37}{27}x + \frac{1}{27}x^2\right)dx$$

$$= \left[\frac{8}{3}\sqrt{2}x^{3/2} - \frac{1}{5}\sqrt{2}x^{5/2} - \frac{2}{3}x^2\right]_0^2 + \left[\frac{160}{27}x - \frac{37}{54}x^2 + \frac{1}{81}x^3\right]_2^5 = \frac{32}{5} + \frac{87}{18} = \frac{337}{30}$$

33. (b) $$\frac{2}{3}\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}(2x + y)\,dy\,d = \frac{2}{3}\int_0^a\left[2xy + \frac{1}{2}y^2\right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \frac{2}{3}\int_0^a\left[2x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}(a^2 - x^2)\right]dx$$

$$= \frac{2}{3}\left[-\frac{2}{3}(a^2 - x^2)^{3/2} + \frac{1}{2}\left(a^2x - \frac{1}{3}x^3\right)\right]_0^a = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{3}a^3\right) = \frac{2}{3}a^3$$

(c) $$\frac{2}{3}\iint_R (2x + y)\,dA = \frac{2}{3}\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}(2x + y)\,dx\,dy$$

35. $$\int_0^4\int_{\sqrt{x}}^2 \operatorname{sen}\pi y^3\,dy\,dx = \int_0^2\int_0^{y^2}\operatorname{sen}\pi y^3\,dx\,dy = \int_0^2\Big[x\operatorname{sen}\pi y^3\Big]_0^{y^2} dy = \int_0^2 y^2\operatorname{sen}\pi y^3\,dy = -\frac{1}{3\pi}\cos\pi y^3\Big]_0^2$$

$$= -\frac{1}{3\pi}(\cos 8\pi - \cos 0) = -\frac{1}{3\pi}(1 - 1) = 0$$

EXERCÍCIOS 18.3 Centro de Massa e Momentos de Inércia

Nos Exercícios 1-11, M kg é a massa da lâmina R, M_x kg-m e M_y kg-m são os momentos de massa em relação aos eixos x e y, e o centro de massa está em $(\bar{x}, \bar{y})$. $\rho(x, y)$ kg/m² é a densidade de massa por unidade de área no ponto (x,y) e K é uma constante de proporcionalidade.

1. R é limitada por x = 3, y = 2, e pelos eixos coordenados $\rho(x, y) = xy^2$.

$$M = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \gamma_i^2 \Delta_i A = \iint_R xy^2 dA = \int_0^3\int_0^2 xy^2 dy\, dx = \int_0^3 \frac{1}{3} xy^3\Big]_0^2 dx = \int_0^3 \frac{8}{3} x\, dx = \frac{4}{3}x^2\Big]_0^3 = 12$$

$$M_x = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(\xi_i\gamma_i^2)\Delta_i A = \iint_R xy^3 dA = \int_0^3\int_0^2 xy^3 dy\, dx = \int_0^3 \frac{1}{4} xy^4\Big]_0^2 dx = \int_0^3 4x\, dx = 2x^2\Big]_0^3 = 18$$

$$M_y = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\xi_i\gamma_i^2)\Delta_i A = \iint_R x^2y^2 dA = \int_0^3\int_0^2 x^2y^2 dy\, dx = \int_0^3 \frac{1}{3} x^2y^3\Big]_0^2 dx = \int \frac{8}{3}x^2 dx = \frac{8}{9}x^3\Big]_0^3 = 24$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{24}{12} = 2 \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

3. R é limitada pelos eixos coordenados e x + 2y = 6. $\rho(x, y) = y^2$.

$$M = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 \Delta_i A = \iint_R y^2 dA = \int_0^3\int_0^{6-2y} y^2 dx\, dy = \int_0^3 xy^2\Big]_0^{6-2y} dy = \int_0^3 (6y^2 - 2y^3)\, dy = 2y^3 - \frac{1}{2}y^4\Big]_0^3$$

$$= 54 - \frac{81}{2} = \frac{27}{2}$$

$$M_x = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i\gamma_i^2 \Delta_i A = \iint_R y^3 dA = \int_0^3\int_0^{6-2y} y^3 dx\, dy = \int_0^3 xy^3\Big]_0^{6-2y} dy = \int_0^3 (6y^3 - 2y^4)\, dy = \frac{3}{2}y^4 - \frac{2}{5}y^5\Big]_0^3$$

$$= \frac{1}{2}(3^5) - \frac{2}{5}(3^5) = \frac{1}{10}(3^5) = \frac{243}{10}. \quad \bar{y} = \frac{1}{M}M_x = \frac{2}{27}\cdot\frac{243}{10} = \frac{9}{5}.$$

$$M_y = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i\gamma_i^2 \Delta_i A = \iint_R xy^2 dA = \int_0^3\int_0^{6-2y} xy^2 dx\, dy = \int_0^3 \frac{1}{2}x^2y^2\Big]_0^{6-2y} dy = 2\int_0^3 (3-y)^2 y^2 dy$$

$$= 2\int_0^3 (9y^2 - 6y^3 + y^4)\, dy = 2\left[3y^3 - \frac{3}{2}y^4 + \frac{1}{5}y^5\right]_0^3 = 2\left[3^4 - \frac{3}{2}(3^4) + \frac{3}{5}(3^4)\right] = \frac{81}{5}. \quad \bar{x} = \frac{1}{M}M_y = \frac{2}{27}\cdot\frac{81}{5} = \frac{6}{5}.$$

5. R está no primeiro quadrante, limitada por $x^2 = 8y$, y = 2 e pelo eixo y $\rho(x, y) = k(y + 1)$.

$$M = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} k(\gamma_i + 1)\Delta_i A = k\iint_R (y+1)\, dA = k\int_0^2\int_0^{\sqrt{8y}} (y+1)\, dx\, dy = k\int_0^2 x(y+1)\Big]_0^{\sqrt{8y}} dy$$

$$= k\sqrt{8}\int_0^2 (y^{3/2} + y^{1/2})\, dy = k\sqrt{8}\left[\frac{2}{5}y^{5/2} + \frac{2}{3}y^{3/2}\right]_0^2 = k\sqrt{8}\left(\frac{8}{5}\sqrt{2} + \frac{4}{3}\sqrt{2}\right) = k\sqrt{8}\left(\frac{44}{15}\sqrt{2}\right) = \frac{176}{15}k$$

$$M_x = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i[k(\gamma_i + 1)]\Delta_i A = k\iint_R (y^2 + y)\, dA = k\int_0^2\int_0^{\sqrt{8y}} (y^2 + y)\, dx\, dy = k\int_0^2 x(y^2 + y)\Big]_0^{\sqrt{8y}}$$

$$= k\sqrt{8}\int_0^2 (y^{5/2} + y^{3/2})\, dy = k\sqrt{8}\left[\frac{2}{7}y^{7/2} + \frac{2}{5}y^{5/2}\right]_0^2 = k\sqrt{8}\left(\frac{16}{7}\sqrt{2} + \frac{8}{5}\sqrt{2}\right) = k\sqrt{8}\left(\frac{136}{35}\sqrt{2}\right) = \frac{544}{35}k$$

$$M_y = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i[k(\gamma_i + 1)]\Delta_i A = k\iint_R x(y+1)\, dA = k\int_0^2\int_0^{\sqrt{8y}} x(y+1)\, dx\, dy = k\int_0^2 \frac{1}{2}x^2(y+1)\Big]_0^{\sqrt{8y}} dy$$

$$= k\int_0^2 4y(y+1)\, dy = 4k\left[\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2\right]_0^2 = 4k\left(\frac{8}{3} + 2\right) = \frac{56}{3}k$$

$$\bar{x} = \frac{1}{M}M_y = \frac{15}{176k}\cdot\frac{56k}{3} = \frac{35}{22} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{1}{M}M_x = \frac{15}{176k}\cdot\frac{544k}{35} = \frac{102}{77}$$

7. R está no primeiro quadrante, limitada por $x^2 + y^2 = a^2$. $\rho(x, y) = k(x + y)$.

$$M = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k(\xi_i + \gamma_i)\Delta_i A = \iint_R k(x + y)\, dA = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} k(x + y)\, dy\, x = k\int_0^a \left[xy + \frac{1}{2}y^2\right]_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

$$= k\int_0^a \left[x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}(a^2 - x^2)\right]dx = k\left[-\frac{1}{3}(a^2 - x^2)^{3/2} + \frac{1}{2}a^2 x - \frac{1}{6}x^3\right]_0^a = k\left[\frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{3}a^3\right] = \frac{2}{3}ka^3$$

$$M_x = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i[k(\xi_i + \gamma_i)]\Delta_i A = \iint_R k(xy + y^2)\, dA = k\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} (xy + y^2)\, dy\, dx = k\int_0^a \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{3}y^3\Big]_0^{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= k\int_0^a \left[\frac{1}{2}x(a^2 - x^2) + \frac{1}{3}(a^2 - x^2)^{3/2}\right]dx$$

Seja $x = a \operatorname{sen}\theta$, $dx = a\cos\theta$ no segundo termo. Do Exercício 18.2.23,

$$M_x = k\left[\frac{1}{4}a^2x^2 - \frac{1}{8}x^4\right]_0^a + \frac{ka^4}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta = k\left(\frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{8}a^4\right) + \frac{ka^4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{16}ka^4(2 + \pi)$$

$\bar{y} = \frac{1}{M}M_x = \frac{3}{2ka^3}\cdot\frac{ka^4(2 + \pi)}{16} = \frac{3}{32}a(2 + \pi)$. $\bar{x} = \bar{y}$ devido à simetria em torno da reta $y = x$.

9. R é limitada por $y = \operatorname{sen} x$ e $[0, \pi]$ sobre o eixo. $\rho(x, y) = ky$.

$$M = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k\gamma_i \Delta_i A = \iint_R ky\, dA = k\int_0^\pi \int_0^{\operatorname{sen} x} y\, dy\, dx = k\int_0^\pi \frac{1}{2}y^2\Big]_0^{\operatorname{sen} x} dx = \frac{1}{2}k\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}k\left[-\frac{1}{2}\operatorname{sen} x\cos x + \frac{1}{2}x\right]_0^\pi = \frac{1}{4}k\pi$$

$$M_x = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(k\gamma_i)\Delta_i A = \iint_R ky^2 dA = k\int_0^\pi \int_0^{\operatorname{sen} x} y^2 dy\, dx = k\int_0^\pi \frac{1}{3}y^3\Big]_0^{\operatorname{sen} x} dx = \frac{1}{3}k\int_0^\pi \operatorname{sen}^3 x\, dx$$

$$= \frac{1}{3}k\int_0^\pi (1 - \cos^2 x)\operatorname{sen} x\, dx = \frac{1}{3}k\left[-\cos + \frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^\pi = \frac{1}{3}k\left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right)\right] = \frac{4}{9}k. \quad \bar{y} = \frac{1}{M}M_x = \frac{4}{k\pi}\cdot\frac{4k}{9} = \frac{16}{9\pi}.$$

$\bar{x} = \frac{1}{2}\pi$ pois $y = \operatorname{sen} x$ é simétrico em relação a $x = \frac{1}{2}\pi$ e ρ é independente de x.

11. R está no primeiro quadrante limitado por $x^2 + y^2 = 4$ e $x + y = 2$. $\rho(x, y) = xy$.

$$M = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i\gamma_i \Delta_i A = \iint_R xy\, dA = \int_0^2 \int_{2-x}^{\sqrt{4 - x^2}} xy\, dy\, dx = \int_0^2 \frac{1}{2}xy^2\Big]_{2-x}^{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{1}{2}\int_0^2 [x(4 - x^2) - x(2 - x)^2]\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 (4x^2 - 2x^3)\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{32}{3} - 8\right) = \frac{4}{3}$$

$$M_x = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(\xi_i\gamma_i)\Delta_i A = \iint_R xy^2 dA = \int_0^2 \int_{2-x}^{\sqrt{4 - x^2}} xy^2 dy\, dx = \int_0^2 \frac{1}{3}xy^3\Big]_{2-x}^{\sqrt{4 - x^2}} dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^2 [x(4 - x^2)^{3/2} - x(2 - x)^3]\, dx = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{5}(4 - x^2)^{5/2} + \frac{1}{4}x(2 - x)^4 + \frac{1}{20}(2 - x)^5\right]_0^2 = \frac{1}{3}\left[\frac{32}{5} + 0 + \frac{32}{20}\right] = \frac{8}{5}$$

$\bar{y} = \frac{1}{M}M_x = \frac{3}{4}\cdot\frac{8}{5} = \frac{6}{5}$. $\bar{x} = \bar{y}$ devido à simetria em relação à reta $y = x$.

Nos Exercícios 13-21, I_x kg-m² e I_y kg-m² são os momentos de inércia da lâmina R em torno dos eixos x e y, r m é o raio de giração em torno do eixo x e, I_0 kg-m² é o momento polar de inércia.

13. R é limitada por $4y = 3x$, $x = 4$, e pelo eixo x.

$$I_x = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} k\gamma_i^2 \Delta_i A = \iint_R ky^2 dA = k\int_0^4\int_0^{3x/4} y^2 dy\, dx = k\int_0^4 \left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^{3x/4} dx = \frac{9k}{64}\int_0^4 x^3 dx = \frac{9k}{64}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^4 = 9k$$

15. R é limitada por $x^2 + y^2 = a^2$.

$$I_0 = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} k(\xi_i^2 + \gamma_i^2)\Delta_i A = \iint_R k(x^2 + y^2)dA = \iint_R kx^2 dA + \iint_R ky^2 dA = 2\iint_R ky^2 dA$$

$$= 8k\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y^2 dy\, dx = 8k\int_0^a \frac{1}{3}y^3\Big]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \frac{8k}{3}\int_0^a (a^2 - x^2)^{3/2} dx.$$ Seja $x = a \operatorname{sen}\theta$,

$dx = a\cos\theta$. Do Exercício 18.2.23, $I_0 = \dfrac{8ka^4}{3}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\, d\theta = \dfrac{8ka^4}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{k\pi a^4}{2}$.

17. R é limitada por $byx^2 = 4 - 4y$ e pelo eixo x.

$$I_0 = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} k(\xi_i^2 + \gamma_i^2)\Delta_i A = \iint_R k(x^2 + y^2)dA = k\int_{-2}^{2}\int_0^{(4-x^2)/4}(x^2 + y^2)dy\, dx$$

$$= k\int_{-2}^{2}\left[x^2 y + \frac{1}{3}y^3\right]_0^{(4-x^2)/4} dx = k\int_{-2}^{2}\left[\frac{4x^2 - x^4}{4} + \frac{(4-x^2)^3}{192}\right]dx = 2k\int_0^2\left(x^2 - \frac{x^4}{4} + \frac{1}{3} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{16} - \frac{x^6}{192}\right)dx$$

$$= 2k\int_0^2\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{16}x^4 - \frac{1}{192}x^6\right)dx = 2k\left[\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{5\cdot 16}x^5 - \frac{1}{7\cdot 192}x^7\right]_0^2 = 2k\left(\frac{2}{3} + 2 - \frac{6}{5} - \frac{2}{21}\right) = \frac{96}{35}k$$

19. R é limitada por $x = 3$, $y = 2$, e pelos eixos coordenados $\rho(x, y) = xy^2$.

(a) $I_x = \displaystyle\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2(\xi_i\gamma_i^2)\Delta_i A = \iint_R xy^4 dA = \int_0^3\int_0^2 xy^4 dy\, dx = \int_0^3 \frac{1}{5}xy^5\Big]_0^2 dx = \frac{32}{5}\int_0^3 x\, dx = \frac{16}{5}x^2\Big]_0^3 = \frac{144}{5}$

(b) $I_y = \displaystyle\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2(\xi_i\gamma_i^2)\Delta_i A = \iint_R x^3y^2 dy\, dx = \int_0^3\int_0^2 x^3y^2 dy\, dx = \int_0^3 \frac{1}{3}x^3y^3\Big]_0^2 = \frac{8}{3}\int_0^3 x^3 dx = \frac{2}{3}x^4\Big]_0^3 = 54$

(c) Do Exercício 1, $M = 12$. Assim, $r = \sqrt{\dfrac{1}{m}\cdot I_x} = \sqrt{\dfrac{1}{12}\cdot\dfrac{144}{5}} = \sqrt{\dfrac{12}{5}} = \dfrac{2}{5}\sqrt{15}$.

(d) $I_0 = I_x + I_y = \dfrac{144}{5} + 54 = \dfrac{414}{5}$

21. R é limitada por $y = \operatorname{sen} x$ e $[0, \pi]$ sobre o eixo. $\rho(x, y) = ky$.

(a) $I_x = \displaystyle\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2(k\gamma_i)\Delta_i A = \iint_R ky^3 dA = k\int_0^\pi\int_0^{\operatorname{sen} x} y^3 dy\, dx = k\int_0^\pi \frac{1}{4}y^4\Big]_0^{\operatorname{sen} x} dx = \frac{1}{4}\int_0^\pi \operatorname{sen}^4 x\, dx$

$$= \frac{1}{4}k\left[-\frac{1}{4}\operatorname{sen}^3 x\cos x + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen} x\cos x + \frac{1}{2}x\right)\right]_0^\pi = \frac{1}{4}k\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi = \frac{3}{32}\pi k$$

(b) $I_y = \displaystyle\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2(k\gamma_i)\Delta_i A = \iint_R kx^2 y dA = k\int_0^\pi\int_0^{\operatorname{sen} x} x^2 y\, dy\, dx = k\int_0^\pi \frac{1}{2}x^2y^2\Big]_0^{\operatorname{sen} x} dx = \frac{1}{2}k\int_0^\pi x^2\operatorname{sen}^2 x\, dx$

$$= \frac{1}{4}k\int_0^\pi (x^2 - x^2\cos 2x)dx = \frac{1}{4}k\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x\right]_0^\pi = \frac{1}{4}k\left(\frac{1}{3}\pi^3 - \frac{1}{2}\pi\right)$$

(c) Do Exercício 9, $M = \dfrac{1}{4}\pi k$. Portanto, $r = \sqrt{\dfrac{1}{M}\cdot I_x} = \sqrt{\dfrac{4}{\pi k}\cdot\dfrac{3\pi k}{32}} = \dfrac{1}{4}\sqrt{6}$.

(d) $I_0 = I_x + I_y = \dfrac{3}{32}\pi k + \dfrac{1}{12}\pi^3 k - \dfrac{1}{8}\pi k = \left(\dfrac{1}{12}\pi^3 - \dfrac{1}{32}\pi\right)k$

23. Escolha os eixos coordenados de modo que os vértices do triângulo estejam em $(h, -\frac{1}{2}b)$, $(h, \frac{1}{2}b)$ e $(0, 0)$. Uma equação do lado do triângulo no primeiro quadrante é $y = bx/2h$.

$$I_x = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho \gamma_i{}^2 \Delta_i A = \rho \iint_R y^2 dA = 2\rho \int_0^h \int_0^{bx/2h} y^2 dy\, dx = 2\rho \int_0^h \frac{1}{3} y^3 \Big]_0^{bx/2h} dx = \frac{\rho b^3}{12h^3} \int_0^h x^3 dx$$

$$= \frac{\rho b^3}{12h^3} \left[\frac{1}{4} b^4\right]_0^h = \frac{1}{48} \rho h b^3$$

$$M = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho\, \Delta_i A = \rho \iint_R dA = 2\rho \int_0^h \int_0^{bx/2h} dy\, dx = 2\rho \int_0^h \frac{bx}{2h} dx = 2\rho \left[\frac{bx^2}{4h}\right]_0^h = \frac{1}{2} \rho h b$$

O eixo x é o eixo de simetria e $r = \sqrt{\frac{1}{M} \cdot I_x} = \sqrt{\frac{2}{\rho h b} \cdot \frac{\rho h b^3}{48}} = \sqrt{\frac{6b^2}{144}} = \frac{1}{12} b\sqrt{6}$.

25. R é limitada por $y = 2x - x^2$ e pelo eixo x. $\rho(x, y) = k(4 - y)$. Se I kg-m² for o momento de inércia da lâmina em torno da reta $y = 4$,

$$I = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (4 - \gamma_i)^2 [k(4 - y)] \Delta_i A = k \iint_R (4 - y)^3 dA = k \int_0^2 \int_0^{2x - x^2} (4 - y)^3 dy\, dx$$

$$= k \int_0^2 -\frac{1}{4}(4 - y)^4 \Big]_0^{2x - x^2} dx = -\frac{1}{4} k \int_0^2 [(4 - 2x + x^2)^4 - 256] dx = -\frac{1}{4} k \int_0^2 \{[3 + (x - 1)^2]^4 - 256\} dx$$

Seja $w = x - 1$. Então, $dw = dx$. Assim,

$$I = -\frac{1}{4} k \int_{-1}^{1} [(w^2 + 3)^4 - 256] dw = -\frac{1}{2} k \int_0^1 (w^8 + 12w^6 + 54w^4 + 108w^2 + 81 - 256) dw$$

$$= -\frac{1}{2} k \left[\frac{1}{9} w^9 + \frac{12}{7} w^7 + \frac{54}{5} w^5 + 36w^3 - 175w\right]_0^1 = -\frac{1}{2} k \left(\frac{1}{9} + \frac{12}{7} + \frac{54}{5} + 36 - 175\right) = \frac{19.904}{315} k$$

EXERCÍCIOS 18.4 A Integral Dupla em Coordenadas Polares

A unidades de área é a área exigida e V unidades de volume é o volume exigido. M kg é a massa da lâmina dada e M_x kg-m e M_y kg-m são seus momentos em torno dos eixos x e y. I_0 kg-m² é o momento polar de inércia, r m é o raio de giração exigido, $\rho(r, \theta)$ kg/m² é a densidade de massa por unidade de área no ponto (r, θ) e K é uma constante de proporcionalidade.

1. A região está dentro da cardióide de $r = 2(1 + \operatorname{sen} \theta)$.

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \Delta_i r\, \Delta_i \theta = \iint_R r\, dr\, d\theta = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2(1 + \operatorname{sen}\theta)} r\, dr\, d\theta = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} r^2 \Big]_0^{2(1 + \operatorname{sen}\theta)} d\theta$$

$$= 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + 2 \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) d\theta = 4 \left[\theta - 2 \cos \theta + \frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 6\pi$$

3. A região está dentro da cardióide $r = a(1 + \cos \theta)$ e fora da circunferência $r = a$.

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \Delta_i r\, \Delta_i \theta = \iint_R r\, dr\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_a^{a(1 + \cos\theta)} r\, dr\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} r^2 \Big]_a^{a(1 + \cos\theta)} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (a^2 + 2a^2 \cos \theta + a^2 \cos^2 \theta - a^2) d\theta = \frac{1}{2} a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \left[2 \operatorname{sen} \theta + \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2} a^2 \left[\left(2 + 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \left(-2 + 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{2} a^2 \left(4 + \frac{1}{2} \pi\right) = \frac{1}{4} a^2 (8 + \pi)$$

5. A_1 e A_2 unidades de área dos laços grande e pequeno de $r = 2 - 4 \operatorname{sen}\theta$.

$$A_1 = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \Delta_i r \, \Delta_i\theta = \iint_R r \, dr \, d\theta = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/6}\int_0^{2-4\sin\theta} r \, dr \, d\theta = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/6} \frac{1}{2} r^2 \Big]_0^{2-4\sin\theta}$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/6} (2 - 4 \operatorname{sen}\theta)^2 d\theta = 4\int_{-\pi/2}^{\pi/6} (1 - 4 \operatorname{sen}\theta + 4\operatorname{sen}^2\theta)\, d\theta = 4\Big[\theta + 4\cos\theta + 2\theta - \operatorname{sen} 2\theta\Big]_{-\pi/2}^{\pi/6}$$

$$= 4\left[\left(\frac{\pi}{6} + 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \left(-\frac{\pi}{2} + 0 - \pi + 0\right)\right] = 4\left(2\pi + \frac{3}{2}\sqrt{3}\right) = 8\pi + 6\sqrt{3}$$

$$A_2 = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \Delta_i r \, \Delta_i\theta = \iint_R r \, dr \, d\theta = 2\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_0^{4\sin\theta - 2} r \, dr \, d\theta = 2\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{2} r^2 \Big]_0^{4\sin\theta - 2}$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} (2 - 4 \operatorname{sen}\theta)^2 d\theta = 4\Big[\theta + 4\cos\theta + 2\theta - \operatorname{sen} 2\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/2} = 4\left[\left(\frac{\pi}{2} + 0 + \pi - 0\right) - \left(\frac{\pi}{6} + 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\right]$$

$= 4(\pi - \frac{3}{2}\sqrt{3}) = 4\pi - 6\sqrt{3}$. Portanto, $A = A_1 - A_2 = (8\pi + 6\sqrt{3}) - (4\pi - 6\sqrt{3}) = 4\pi + 12\sqrt{3}$.

7. O sólido é limitado pelo elipsóide $z^2 + 9r^2 = 9$.

$$V = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 3(1 - \bar{r}_i^2)^{1/2}\bar{r}_i \Delta_i r \, \Delta_i\theta = 3\iint_R r(1 - r^2)^{1/2} dr \, d\theta = 24\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r(1 - r^2)^{1/2} dr \, d\theta$$

$$= 24\int_0^{\pi/2} -\frac{1}{3}(1 - r^2)^{3/2}\Big]_0^1 d\theta = 8\int_0^{\pi/2} d\theta = 8\theta\Big]_0^{\pi/2} = 4\pi$$

9. O sólido está delimitado na esfera $z^2 + r^2 = 16$ pelo cilindro $r = 4\cos\theta$.

$$V = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (16 - \bar{r}_i^2)^{1/2}\bar{r}_i \Delta_i r \, \Delta_i\theta = \iint_R r(16 - r^2)^{1/2} dr \, d\theta = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{4\cos\theta} r(16 - r^2)^{1/2} dr \, d\theta$$

$$= 4\int -\frac{1}{3}(16 - r^2)^{3/2}\Big]_0^{4\cos\theta} d\theta = -\frac{4}{3}\int_0^{\pi/2} [(16 - 16\cos^2\theta)^{3/2} - 64]\, d\theta =$$

$$= -\frac{256}{3}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta(1 - \cos^2\theta)\, d\theta + \frac{256}{3}\Big[\theta\Big]_0^{\pi/2} = -\frac{256}{3}\Big[-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta\Big]_0^{\pi/2} + \frac{128}{3}\pi$$

$$= -\frac{256}{3}\left[(-0 + 0) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right)\right] + \frac{128}{3}\pi = \frac{128}{3}\pi - \frac{512}{9} = \frac{128}{9}(3\pi - 4)$$

11. O sólido é limitado pelo parabolóide $z = 4 - r^2$, pelo cilindro $r = 1$, e pelo plano polar.

$$V = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (4 - \bar{r}_i^2)\bar{r}_i \Delta_i r \, \Delta_i\theta = \iint (4r - r^3)\, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (4r - r^3)\, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi}\Big[2r^2 - \frac{1}{4}r^4\Big]_0^1 d\theta$$

$$= \frac{7}{4}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{7}{4}\theta\Big]_0^{2\pi} = \frac{7}{2}\pi$$

13. A região está dentro da cardióide $r = 2(1 + \operatorname{sen}\theta)$, $\rho(r,\theta) = kr$.

$$M = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (k\bar{r}_i)\bar{r}_i \Delta_i r\, \Delta_i\theta = k\iint_R r^2 dr\, d\theta = 2k\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2(1+\operatorname{sen}\theta)} r^2 dr\, d\theta = 2k\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{3} r^3 \Big]_0^{2(1+\operatorname{sen}\theta)} d\theta$$

$$= \frac{2}{3}k\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 8(1 + 3\operatorname{sen}\theta + 3\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^3\theta)\, d\theta$$

Como $\operatorname{sen}\theta$ e $\operatorname{sen}^3\theta$ são ímpares, $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$ é par

$$M = \frac{16}{3}k\int_0^{\pi/2}[2 + 3(1 - \cos 2\theta)]\, d\theta = \frac{16}{3}k\left[5 - \frac{3}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{16}{3}\cdot 5\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{40}{3}k\pi$$

$$M_x = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i(k\bar{r}_i)\bar{r}_i\Delta_i r\, \Delta_i\theta = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (\bar{r}_i \operatorname{sen}\bar{\theta}_i)(k\bar{r}_i)\bar{r}_i \Delta_i r\, \Delta_i\theta = \iint_R kr^3 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta$$

$$= 2k\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2(1+\operatorname{sen}\theta)} r^3 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta = 2k\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{4} r^4\Big]_0^{2(1+\operatorname{sen}\theta)} \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \frac{k}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 16(1+\operatorname{sen}\theta)^4 \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$= 8k\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\operatorname{sen}\theta + 4\operatorname{sen}^2\theta + 6\operatorname{sen}^3\theta + 4\operatorname{sen}^4\theta + \operatorname{sen}^5\theta)\, d\theta = 64k\int_0^{\pi/2}(\operatorname{sen}^4\theta + \operatorname{sen}^2\theta)\, d\theta$$

$$= 64k\left[-\frac{1}{4}\operatorname{sen}^3\theta\cos\theta + \frac{7}{4}\int \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta\right]_0^{\pi/2} = 64k\left[0 + \frac{7}{4}\left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{1}{2}\theta\right)\right]_0^{\pi/2} = 64k\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = 28k\pi$$

Como R é simétrica em relação ao eixo y, o centro de massa está em $(0, \bar{y})$ e

$$\bar{y} = \frac{1}{M}M_x = \frac{3}{40k\pi}\cdot 28k\pi = \frac{21}{10}$$

15. A região está dentro da *limaçon* $r = 2 - \cos\theta$, $\rho(r,\theta) = kr$.

$$M = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (k\bar{r}_i)\bar{r}_i\Delta_i r\, \Delta_i\theta = k\iint_R r^2 dr\, d\theta = k\int_0^{2\pi}\int_0^{2-\cos\theta} r^2 dr\, d\theta = k\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}r^3\Big]_0^{2-\cos\theta} d\theta$$

$$= \frac{k}{3}\int_0^{2\pi}(2 - \cos\theta)^3 d\theta = \frac{k}{3}\int_0^{2\pi}(8 - 12\cos\theta + 6\cos^2\theta - \cos^3\theta)\, d\theta = \frac{k}{3}\int_0^{2\pi}(8 + 6\cos^2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{k}{3}\int_0^{2\pi}(11 + 3\cos 2\theta)\, d\theta = \frac{k}{3}\int_0^{2\pi} 11\, d\theta = \frac{22}{3}k\pi$$

$$M_y = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i(k\bar{r}_i)\bar{r}_i\Delta_i r\, \Delta_i\theta = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (\bar{r}_i\cos\bar{\theta}_i)(k\bar{r}_i)\bar{r}_i\Delta_i r\, \Delta_i\theta = \iint_R kr^3\cos\theta\, dr\, d\theta$$

$$= k\int_0^{2\pi}\int_0^{2-\cos\theta} r^3\cos\theta\, dr\, d\theta = k\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}r^4\Big]_0^{2-\cos\theta}\cos\theta\, d\theta = \frac{k}{4}\int_0^{2\pi}(2 - \cos\theta)^4\cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{k}{4}\int_0^{2\pi}(16\cos\theta - 32\cos^2\theta + 24\cos^3\theta - 8\cos^4\theta + \cos^5\theta)\, d\theta = -2k\int_0^{2\pi}(\cos^4\theta + 4\cos^2\theta)\, d\theta$$

$$= -2k\left[\frac{1}{4}\cos^3\theta\operatorname{sen}\theta + \left(\frac{3}{4} + 4\right)\int\cos^2\theta\, d\theta\right]_0^{2\pi} = -2k\cdot\frac{19}{4}\left[\frac{1}{2}\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}\theta\right]_0^{2\pi} = -2k\cdot\frac{19}{4}\cdot\pi = -\frac{19}{2}k\pi$$

Como R é simétrica em relação ao eixo polar, o centróide está em $(\bar{x}, 0)$ e

$$\bar{x} = \frac{1}{M}M_y = \frac{3}{22k\pi}\cdot\frac{-19k\pi}{2} = -\frac{57}{44}$$

17. A região está na parte superior da *limaçon* $r = 2r\cos\theta$. $\rho(r,\theta) = kr\,\text{sen}\,\theta$.

$$M = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}(k\bar{r}_i\,\text{sen}\,\bar{\theta}_i)\bar{r}_i\,\Delta_i r\,\Delta_i\theta = \iint_R kr^2\,\text{sen}\,\theta\,dr\,d\theta = k\int_0^{\pi}\int_0^{2+\cos\theta} r^2\,\text{sen}\,\theta\,dr\,d\theta$$

$$= k\int_0^{\pi}\frac{1}{3}r^3\Big]_0^{2+\cos\theta}\text{sen}\,\theta\,d\theta = \frac{k}{3}\int_0^{\pi}(2+\cos\theta)^3\,\text{sen}\,\theta\,d\theta = \frac{k}{3}\Big[-\frac{1}{4}(2+\cos\theta)^4\Big]_0^{\pi} = -\frac{k}{12}(1^4 - 3^4) = \frac{20}{3}k$$

$$M_y = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i(k\bar{r}_i\,\text{sen}\,\bar{\theta}_i)\bar{r}_i\,\Delta_i r\,\Delta_i\theta = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}(\bar{r}_i\cos\bar{\theta}_i)(k\bar{r}_i\,\text{sen}\,\bar{\theta}_i)\bar{r}_i\,\Delta_i r\,\Delta_i\theta$$

$$= k\iint_R r^3\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\,dr\,d\theta = k\int_0^{\pi}\int_0^{2+\cos\theta} r^3\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\,dr\,d\theta = k\int_0^{\pi}\frac{1}{4}r^4\Big]_0^{2+\cos\theta}\text{sen}\,\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{k}{4}\int_0^{\pi}(2+\cos\theta)^4\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{k}{4}\int_0^{\pi}(16\cos\theta + 32\cos^2\theta + 24\cos^3\theta + 8\cos^4\theta + \cos^5\theta)\,\text{sen}\,\theta\,d\theta$$

$$= \frac{k}{4}\Big[-8\,\text{sen}^2\theta - \frac{32}{3}\cos^3\theta - 6\cos^4\theta - \frac{8}{5}\cos^5\theta - \frac{1}{6}\cos^6\theta\Big]_0^{\pi} = \frac{k}{4}\Big(\frac{32}{3} + \frac{8}{5} + \frac{32}{3} + \frac{8}{5}\Big) = \frac{92}{15}k$$

$$M_x = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i(k\bar{r}_i\,\text{sen}\,\bar{\theta}_i)\bar{r}_i\,\Delta_i r\,\Delta_i\theta = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}(\bar{r}_i\,\text{sen}\,\bar{\theta}_i)(k\bar{r}_i\,\text{sen}\,\bar{\theta}_i)\bar{r}_i\,\Delta_i r\,\Delta_i\theta$$

$$= k\iint_R r^3\text{sen}^2\theta\,dr\,d\theta = k\int_0^{\pi}\int_0^{2+\cos\theta} r^3\text{sen}^2\theta\,dr\,d\theta = k\int\frac{1}{4}r^4\Big]_0^{2+\cos\theta}\text{sen}^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{k}{4}\int_0^{\pi}(2+\cos\theta)^4\text{sen}^2\theta\,d\theta = \frac{k}{4}\int_0^{\pi}(16 + 32\cos\theta + 24\cos^2\theta + 8\cos^3\theta + \cos^4\theta)(1-\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{k}{4}\int_0^{\pi}(-\cos^6\theta - 8\cos^5\theta - 23\cos^4\theta - 24\cos^3\theta + 8\cos^2\theta + 32\cos\theta + 16)\,d\theta$$

$$= \frac{k}{4}\int_0^{\pi}(-\cos^6\theta - 23\cos^4\theta + 8\cos^2\theta + 16)\,d\theta$$

$$= \frac{k}{4}\Big[-\frac{1}{6}\cos^5\theta\,\text{sen}\,\theta + \int\Big(\Big(-\frac{5}{6} - 23\Big)\cos^4\theta + 8\cos^2\theta + 16\Big)d\theta\Big]_0^{\pi}$$

$$= \frac{k}{4}\Big[0 - \frac{143}{6}\cdot\frac{1}{4}\cos^3\theta\,\text{sen}\,\theta + \int\Big(\Big(-\frac{143}{6}\cdot\frac{3}{4} + 8\Big)\cos^2\theta + 16\Big)d\theta\Big]_0^{\pi}$$

$$= \frac{k}{4}\Big[0 - \frac{79}{8}\cdot\frac{1}{2}\cos\theta\,\text{sen}\,\theta + \Big(-\frac{1}{2}\cdot\frac{79}{8} + 16\Big)\theta\Big]_0^{\pi} = \frac{k}{4}\Big(0 + \frac{177}{16}\pi\Big) = \frac{177}{64}k\pi$$

O centro de massa está em $(\bar{x}, \bar{y})$ e $\bar{x} = \frac{1}{M}M_y = \frac{3}{20k}\cdot\frac{92k}{15} = \frac{23}{25}$, $\bar{y} = \frac{1}{M}\cdot M_x = \frac{3}{20k}\cdot\frac{177k\pi}{64} = \frac{531}{1280}\pi$.

19. A região é o laço pequeno da *limaçon* $r = 2 - 4\,\text{sen}\,\theta$. $\rho(r,\theta) = kr$.

$$M = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}(k\bar{r}_i)\bar{r}_i\,\Delta_i r\,\Delta_i\theta = k\iint_R r^2 dr\,d\theta = k\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_0^{4\,\text{sen}\,\theta - 2} r^2 dr\,d\theta = 2k\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{1}{3}r^3\Big]_0^{4\,\text{sen}\,\theta-2}d\theta$$

$$= \frac{2}{3}k\int_{\pi/6}^{\pi/2}(4\,\text{sen}\,\theta - 2)^3 d\theta = \frac{16}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/2}(2\,\text{sen}\,\theta - 1)^3 d\theta = \frac{16}{3}k\int_{\pi/6}^{\pi/2}(8\,\text{sen}^3\theta - 12\,\text{sen}^2\theta + 6\,\text{sen}\,\theta - 1)\,d\theta$$

$$= \frac{16}{3}k\Big\{-\frac{1}{3}\cdot 8\,\text{sen}^2\theta\cos\theta\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} + \int_{\pi/6}^{\pi/2}\Big[-12\,\text{sen}^2\theta + \Big(\frac{2}{3}\cdot 8 + 6\Big)\text{sen}\,\theta - 1\Big]d\theta\Big\}$$

$$= \frac{16}{3}k\Big\{\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} + 6\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/2} + \int_{\pi/6}^{\pi/2}\Big[\frac{34}{3}\text{sen}\,\theta - (6+1)\Big]d\theta\Big\}$$

$$= \frac{16}{3}k\Big\{\frac{1}{3}\sqrt{3} - 6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} + \Big[-\frac{34}{3}\cos\theta - 7\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{16}{3}k\Big(\frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{34}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} - 7\cdot\frac{1}{3}\pi\Big) = \frac{8}{9}(27\sqrt{3} - 14\pi)k$$

$$M_x = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar y_i (k\bar r_i)\bar r_i \Delta_i r\,\Delta_i\theta = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (\bar r_i \operatorname{sen}\bar\theta_i)(k\bar r_i)\bar r_i \Delta_i r\,\Delta_i\theta = \iint_R k r^3 \operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta$$

$$= 2k\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_0^{4\operatorname{sen}\theta-2} r^3 \operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta = 2k\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{4}r^4\Big]_0^{4\operatorname{sen}\theta-2}\operatorname{sen}\theta\,d\theta$$

$$= \frac{k}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2}(2-4\operatorname{sen}\theta)^4\operatorname{sen}\theta\,d\theta = 8k\int_{\pi/6}^{\pi/2}(2\operatorname{sen}\theta-1)^4\operatorname{sen}\theta\,d\theta = 8kI.$$ Agora

$$\int(2\operatorname{sen}\theta-1)^4\operatorname{sen}\theta\,d\theta = \int(16\operatorname{sen}^5\theta - 32\operatorname{sen}^4\theta + 24\operatorname{sen}^3\theta - 8\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}\theta)\,d\theta$$

$$= -16\cdot\frac{1}{5}\operatorname{sen}^4\theta\cos\theta + 32\cdot\frac{1}{4}\operatorname{sen}^3\theta\cos\theta + \int\left[\left(16\cdot\frac{4}{5}+24\right)\operatorname{sen}^3\theta - \left(32\cdot\frac{3}{4}+8\right)\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}\theta\right]d\theta$$

$$= -\frac{16}{5}\operatorname{sen}^4\theta\cos\theta + 8\operatorname{sen}^3\theta\cos\theta - \frac{184}{5}\cdot\frac{1}{3}\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta + 32\cdot\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \int\left[\left(\frac{184}{5}\cdot\frac{2}{3}+1\right)\operatorname{sen}\theta - 32\cdot\frac{1}{2}\right]d\theta$$

$$= -\frac{16}{5}\operatorname{sen}^4\theta\cos\theta + 8\operatorname{sen}^3\theta\cos\theta - \frac{184}{15}\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta + 16\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \frac{383}{15}\cos\theta - 16\theta$$

$$8kI = 8k\left[\frac{16}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4\frac{1}{2}\sqrt{3} - 8\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{184}{15}\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2}\sqrt{3} - 16\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{3} + \frac{383}{15}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} - 16\cdot\frac{1}{3}\pi\right] = \frac{4}{15}(297\sqrt{3} - 160\pi)$$

Como R é simétrica em relação ao eixo y, o centro de massa está em $(0, \bar y)$ e

$$\bar y = \frac{1}{M}M_x = \frac{3(297\sqrt{3} - 160\pi)}{10(27\sqrt{3} - 14\pi)} \approx 1,268$$

21. $$I_x = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar y_i^2 (k)\bar r_i \Delta_i r\,\Delta_i\theta = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (\bar r_i \operatorname{sen}\theta)(k)\bar r_i \Delta_i r\,\Delta_i\theta = k\iint_R r^3\operatorname{sen}^2\theta\,dr\,d\theta$$

$$= k\int_0^{\pi}\int_0^{\operatorname{sen}\theta} r^3\operatorname{sen}^2\theta\,dr\,d\theta = k\int_0^{\pi}\frac{1}{4}r^4\Big]_0^{\operatorname{sen}\theta}\operatorname{sen}^2\theta = \frac{k}{4}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^6\theta\,d\theta = \frac{k}{4}\left[-\frac{1}{6}\operatorname{sen}^5\theta\cos\theta + \frac{5}{6}\int\operatorname{sen}^4\theta\,d\theta\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{k}{4}\left[0 - \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4\theta\cos\theta + \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\int\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta\right]_0^{\pi} = \frac{k}{4}\left[0 - \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\theta\right]_0^{\pi} = \frac{k}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\pi = \frac{5}{64}k\pi$$

23. A região é limitada por uma cardióide $r = a(1+\cos\theta)$ e uma circunferência $r = 2a\cos\theta$, $\rho(r,\theta) = k$.

$$I_0 = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar r_i^2 (k)\bar r_i \Delta_i r\,\Delta_i\theta = k\iint_R r^3\,dr\,d\theta = 2k\int_0^{\pi}\int_0^{a(1+\cos\theta)} r^3\,dr\,d\theta - 2k\int_0^{\pi/2}\int_0^{2a\cos\theta} r^3\,dr\,d\theta$$

$$= 2k\int_0^{\pi}\frac{1}{4}r^4\Big]_0^{a(1+\cos\theta)}d\theta - 2k\int_0^{\pi/2}\frac{1}{4}r^4\Big]_0^{2a\cos\theta}d\theta = \frac{k}{2}a^4\int_0^{\pi}[(1+\cos\theta)^4 - 8\cos^4\theta]\,d\theta$$

$$= \frac{k}{2}a^4\int_0^{\pi}(-7\cos^4\theta + 4\cos^3\theta + 6\cos^2\theta + 4\cos\theta + 1)\,d\theta = \frac{k}{2}a^4\int_0^{\pi}(-\cos^4\theta + 6\cos^2\theta + 1)\,d\theta$$

$$= \frac{k}{2}a^4\left[-\frac{7}{4}\cos^3\theta\operatorname{sen}\theta + \int\left(\left(-\frac{21}{4}+6\right)\cos^2\theta + 1\right)d\theta\right]_0^{\pi} = \frac{k}{2}a^4\left[0 + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}+1\right)\theta\right]_0^{\pi} = \frac{11}{16}k\pi a^4$$

25. A região é limitada por um laço da *lemniscata* $r^2 = \cos 2\theta$, $\rho(r,\theta) = k$.

$$M = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} k\bar r_i \Delta_i r\,\Delta_i\theta = k\iint_R r\,dr\,d\theta = 2k\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r\,dr\,d\theta = 2k\int_0^{\pi/4}\frac{1}{2}r^2\Big]_0^{\sqrt{\cos 2\theta}}d\theta$$

$$= k\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta\,d\theta = \frac{k}{2}\operatorname{sen} 2\theta\Big]_0^{\pi/4} = \frac{k}{2}$$

$$I_0 = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar r_i^2 (k)\bar r_i \Delta_i r\,\Delta_i\theta = k\iint_R r^3\,dr\,d\theta = 2k\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r^3\,dr\,d\theta = 2k\int_0^{\pi/4}\frac{1}{4}r^4\Big]_0^{\sqrt{\cos 2\theta}}d\theta$$

$$= \frac{k}{2}\int_0^{\pi/4}\cos^2 2\theta\,d\theta = \frac{k}{4}\int_0^{\pi/4}(1+\cos\theta)\,d\theta = \frac{k}{4}\left[\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4\theta\right]_0^{\pi/4} = \frac{k}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{k\pi}{16},\quad r = \sqrt{\frac{1}{M}I_0} = \sqrt{\frac{2}{k}\cdot\frac{k\pi}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}.$$

27. $$\iint_R e^{x^2+y^2}\,dA = \int_0^{2\pi}\int_1^3 e^{r^2}r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}e^{r^2}\Big]_1^3 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(e^9 - e)\,d\theta = (e^9 - e)\pi$$

EXERCÍCIOS 18.5 Área de Uma Superfície

σ unidades de área é a área da superfície.

1. $z = f(x, y) = 4 - 2x - y$; $f_x(x, y) = -2$; $f_y(x, y) = -1$.

$$\sigma = \iint_R \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1}\, dx\, dy = \int_0^1\int_0^1 \sqrt{4 + 1 + 1}\, dx\, dy = \sqrt{6}\int_0^1 x\Big]_0^1 dy = \sqrt{6}\int_0^1 dy = \sqrt{6}$$

3. A região R no plano xy é limitada pelo triângulo com lados $x = 0$, $y = 0$, e $y = -\frac{9}{4}x + 9$. $z = f(x, y) = 16 - 4x - \frac{16}{9}y$; $f_x(x, y) = -4$; $f_y(x, y) = -\frac{16}{9}$.

$$\sigma = \iint_R \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1}\, dy\, dx = \int_0^4\int_0^{-9x/4+9} \sqrt{16 + \frac{256}{81} + 1}\, dy\, dx = \frac{1}{9}\sqrt{1.633}\int_0^4 \left(-\frac{9}{4}x + 9\right) dx$$

$$= \frac{1}{9}\sqrt{1.633}\left[-\frac{9}{8}x^2 + 9x\right]_0^4 = \sqrt{1.633}(-2 + 4) = 2\sqrt{1.633}$$

5. No primeiro octante $y \geq 0$ de modo que $x^2 + y^2 = 9$ resulta $y = \sqrt{9 - x^2}$; $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$.

$$\sigma = \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1}\, dz\, dx = \int_0^3\int_0^x \sqrt{\frac{x^2}{9 - x^2} + 0 + 1}\, dz\, dx = \int_0^3\int_0^x 3(9 - x^2)^{-1/2} dz\, dx$$

$$= 3\lim_{b \to 3^-}\int_0^b x(9 - x^2)^{-1/2} dx = 3\lim_{b \to 3^-}\left[-(9 - x^2)^{1/2}\right]_0^b = 3\lim_{b \to 3^-}[-(9 - b^2)^{1/2} + 3] = 9$$

7. A região R no plano xy é limitada pelo triângulo cujos lados são as retas $y = 2x$, $x = 0$, e $y = 4$. $z = f(x, y) = 2 + 5x + y^2$; $f_x = 5$; $f_y(x, y) = 2y$.

$$\sigma = \iint \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1}\, dx\, dy = \int_0^4\int_0^{y/2} \sqrt{25 + 4y^2 + 1}\, dx\, dy = \int_0^4 x\sqrt{4y^2 + 26}\Big]_0^{y/2} dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 y(4y^2 + 26)^{1/2} dy = \frac{1}{24}(4y^2 + 26)^{3/2}\Big]_0^4 = \frac{1}{24}(90\sqrt{90} - 26\sqrt{26}) = \frac{1}{12}(135\sqrt{10} - 13\sqrt{26})$$

9. $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ e $y^2 + z^2 = x^2$ interceptam-se na circunferência $x = 2$, $y^2 + z^2 = 4$ que divide a esfera ao meio. A esfera tem raio 2. Assim, do Exemplo 3, com $a = 2$, $\sigma = 2\pi(2)^2 = 8\pi$.

11. $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ e $x^2 + y^2 = 3z$ interceptam-se na origem e na circunferência $z = 1$, $x^2 + y^2 = 3$. Como a parte maior da esfera está dentro do parabolóide, encontramos a área σ da parte menor, que fica abaixo da intersecção, e a subtraímos da área total da esfera, com 2 unidades de raio. Do Exemplo 3, com $a = 2$, essa área é $2 \cdot 2\pi(2)^2 = 16\pi$ unidades de área.

$$z = f(x, y) = 2 - \sqrt{4 - x^2 - y^2}; \quad f_x(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}; \quad f_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

$$\sigma = \iint_R \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1}\, dA = \iint_R \sqrt{\frac{x^2}{4 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{4 - x^2 - y^2} + 1}\, dA = \iint_R \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\, dA$$

Usamos coordenadas polares. Se $x^2 + y^2 = r^2$ e $dA = r\, dr\, d\theta$, então

$$\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} 2(4 - r^2)^{-1/2} r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} -2(4 - r^2)^{1/2}\Big]_0^{\sqrt{3}} d\theta = \int_0^{2\pi}(-2 + 4)\, d\theta = 2\int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi$$

Logo, o número de unidades de área na área pedida é $16\pi - 4\pi = 12\pi$.

13. A área pedida é 8 vezes a parte acima do primeiro quadrante.

$$z = f(x, y) = \sqrt{4 - x^2};\quad f_x(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}};\quad f_y(x, y) = 0$$

$$\sigma = 8\iint_R \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1}\, dA = 8\iint_R \sqrt{\frac{x^2}{4 - x^2} + 0 + 1}\, dA = 16\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}\, dy\, dx = 16\int_0^2 dx = 32$$

15. $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2};\quad f_x(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};\quad f_y(x, y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$$\sigma = 2\iint_R \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1}\, dA = 2\iint_R \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1}\, dA = 2\int_{-1}^2\int_{y^2}^{2+y} \sqrt{2}\, dx\, dy$$

$$= 2\sqrt{2}\int_{-1}^2 (2 + y - y^2)\, dy = 2\sqrt{2}\left[2y + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3\right]_{-1}^2 = 2\sqrt{2}\left[\left(4 + 2 - \frac{8}{3}\right) - \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\right] = 9\sqrt{2}$$

17. A reta de $(0, 0)$ a (a, b) tem a equação $y = f(x) = \frac{b}{a}x$; $f'(x) = \frac{b}{a}$. Do Teorema 18.5.2,

$$\sigma = 2\pi\int_0^a f(x)\sqrt{[f'(x)]^2 + 1}\, dx = 2\pi\int_0^a \frac{b}{a}x\sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1}\, dx = \frac{2\pi b\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2}\int_0^a x\, dx = \frac{2\pi b\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2}\cdot \frac{x^2}{2}\Big]_0^a = \pi b\sqrt{a^2 + b^2}$$

19. Sejam σ_x e σ_y as medidas da superfície quando uma curva é relacionada em torno dos eixos x e y. Usando a equa. 6.3.6, o Teorema 18.5.2 resulta em $\sigma_x = 2\pi\int_a^b y\, ds$. Além disso, $\sigma_y = \int_c^d x\, ds$.

Se $y = a\cosh\frac{x}{a}$, $\sigma_y = 2\pi\int_0^a x\sqrt{1 + y'^2}\, dx = 2\pi\int_0^a x\sqrt{1 + \operatorname{senh}^2\frac{x}{a}}\, dx = 2\pi\int_0^a x\cosh\frac{x}{a}\, dx$

$$= 2\pi\left[ax\operatorname{senh}\frac{x}{a} - a^2\cosh\frac{x}{a}\right]_0^a = 2\pi(a^2\operatorname{senh} 1 - a^2\cos 1 + a^2) = 2\pi a^2(1 - e^{-1})$$

21. Tomando $y \ge 0$, $18y^2 = x(6 - x)^2$ dá $y = f(x) = \frac{1}{6}\sqrt{2}(6x^{1/2} - x^{3/2})$; $f'(x) = \frac{1}{6}\sqrt{2}\left(3x^{-1/2} - \frac{3}{2}x^{1/2}\right)$.

$$\sigma = 2\pi\int_0^6 f(x)\sqrt{[f'(x)]^2 + 1}\, dx = 2\pi\int_0^6 \frac{1}{6}\sqrt{2}(6x^{1/2} - x^{3/2})\sqrt{1 + \frac{1}{18}\left(3x^{-1/2} - \frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}\, dx$$

$$= \frac{\pi}{3}\sqrt{2}\int_0^6 x^{1/2}(6 - x)\sqrt{1 + \frac{1}{18}\left(9x^{-1} - 9 + \frac{9}{4}x\right)}\, dx = \frac{\pi}{3}\sqrt{2}\pi\int_0^6 x^{1/2}(6 - x)\sqrt{\tfrac{1}{2}(x^{-1} + 1 + \tfrac{1}{4}x)}\, dx$$

$$= \frac{\pi}{3}\sqrt{2}\int_0^6 x^{1/2}(6 - x)\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{(x^{-1/2} + \tfrac{1}{2}x^{1/2})^2}\, dx = \frac{\pi}{3}\int_0^6 x^{1/2}(x^{-1/2} + \tfrac{1}{2}x^{1/2})\, dx = \frac{\pi}{3}\int_0^6 (6 + 2x - \tfrac{1}{2}x^2)\, dx$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[6x + x^2 - \frac{1}{6}x^3\right]_0^6 = \frac{\pi}{3}(36 + 36 - 36) = 12\pi$$

23. A projeção da intersecção de $x = z$ e $9x^2 - 4y^2 + 16z^2 = 144$ no plano xy é $25x^2 - 4y^2 = 144$. $z = f(x, y) = x$; $f_x(x, y) = 1$; $f_y(x, y) = 0$.

$$\sigma = \iint_R \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1}\, dA = 2\int_0^6\int_0^{2\sqrt{y^2 + 36}/5} \sqrt{1^2 + 0 + 1}\, dx\, dy = 2\sqrt{2}\int_0^6 x\Big]_0^{2\sqrt{y^2 + 36}/5} dy$$

$$= \frac{4}{5}\sqrt{2}\int_0^6 \sqrt{y^2 + 36}\, dy = \frac{2}{5}\sqrt{2}\left[y\sqrt{36 + y^2} + 36\ln(y + \sqrt{36 + y^2})\right]_0^6 = \frac{2}{5}\sqrt{2}[36\sqrt{2} + 36\ln(6 + 6\sqrt{2}) - 36\ln 6]$$

$$= \frac{72}{5}[2 + \sqrt{2}\ln(1 + \sqrt{2})]$$

25. $$\iint_R \|\nabla g(x, y, z)\|\, dx\, dy = \iint_R \|\langle f_x(x, y), f_y(x, y), -1\rangle\|\, dx\, dy = \iint_R \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1}\, dx\, dy = \sigma$$

EXERCÍCIOS 18.6 A Integral Tripla

V unidades de volume é o volume da região S e M kg é sua massa.

1. $\int_0^1\int_0^{1-x}\int_{2y}^{1+y^2} x\,dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{1-x}\Big[xz\Big]_{2y}^{1+y^2}dy\,dx = \int_0^1\int_0^{1-x}x(1+y^2-2y)\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{1-x}x(y-1)^2dy\,dx$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 x(y-1)^3\Big]_0^{1-x}dx = \frac{1}{3}\int_0^1(x-x^4)\,dx = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{1}{10}$$

3. $\int_0^1\int_0^x\int_0^{x+y}(x+y+z)\,dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^x\left[xz-yz+\frac{1}{2}z^2\right]_0^{x+y}dy\,dx = \int_0^1\int_0^x\left(\frac{3}{2}x^2+3xy+\frac{3}{2}y^2\right)dy\,dx$

$$= \int_0^1\left[\frac{3}{2}x^2y+\frac{3}{2}xy^2+\frac{1}{2}\right]_0^x dx = \int_0^1\frac{7}{2}x^3dx = \left[\frac{7}{8}x^4\right]_0^1 = \frac{7}{8}$$

5. $\int_{-1}^0\int_e^{2e}\int_0^{\pi/3} y\ln z\,\mathrm{tg}\,x\,dx\,dz\,dy = \int_{-1}^0\int_e^{2e}\Big[y\ln z\ln|\sec x|\Big]_0^{\pi/3}dz\,dy = \int_{-1}^0\int_e^{2e} y\ln z\ln 2\,dz\,dy$

$$= \int_{-1}^0\Big[y(\ln 2)z(\ln z-1)\Big]_e^{2e}dy = \int_{-1}^0 2e(\ln 2)^2y\,dy = \Big[e(\ln 2)^2y^2\Big]_{-1}^0 = -e(\ln 2)^2$$

7. $\int_0^{\pi/2}\int_z^{\pi/2}\int_0^{xz}\cos\frac{y}{z}\,dy\,dx\,dz = \int_0^{\pi/2}\int_z^{\pi/2}(z\,\mathrm{sen}\,x)\,dx\,dz = \int_0^{\pi/2}z\cos z\,dz = \Big[z\,\mathrm{sen}\,z+\cos z\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\pi-1$

9. S é limitada pelo plano $12x+20y+15z=60$ e pelos planos coordenados.

$$\iiint_S y\,dV = \int_0^5\int_0^{4(1-x/5)}\int_0^{3(1-x/5-z/4)}y\,dy\,dz\,dx = \int_0^5\int_0^{4(1-x/5)}\frac{1}{2}y^2\Big]_0^{3(1-x/5-z/4)}dz\,dx$$

$$= \frac{9}{2}\int_0^5\int_0^{4(1-x/5)}\left(1-\frac{x}{5}-\frac{z}{4}\right)dz\,dz = \frac{9}{2}\int_0^5-\frac{4}{3}\left(1-\frac{x}{5}-\frac{z}{4}\right)^3\Big]_0^{4(1-x/5)}dx = 6\int_0^5\left(1-\frac{x}{5}\right)^3dx = 6\left[-\frac{5}{4}\left(1-\frac{x}{5}\right)^4\right]_0^5 = \frac{15}{2}$$

11. Os vértices $(1,1,0)$, $(-1,0,0)$, $(1,0,1)$ situam-se no plano $z=x-y$; o quarto vértice é 0.

$$\iiint_S z\,dV = \int_0^1\int_0^x\int_0^{x-y}z\,dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^x\frac{1}{2}(x-y)^2dy\,dx = \int_0^1-\frac{1}{6}(x-y)^3\Big]_0^x dx = \frac{1}{6}\int_0^1x^3\,dx = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

13. S é limitada pelos planos coordenados e pelos planos $x=2$, $y=3$, e $z=4$.

$$\iiint_S xy\,dV = \int_0^2\int_0^3\int_0^4 xy\,dz\,dy\,dx = \int_0^2\int_0^3 4xy\,dy\,dx = \int_0^2\Big[2xy^2\Big]_0^3dx = \int_0^2 18x\,dx = 9x^3\Big]_0^2 = 36$$

15. S é limitada por $z=x^2+y^2$, $z=27-2x^2-2y^2$ intercepta na circunferência $x^2+y^2=9$, $z=9$.

$$\iiint_S dV = \iint_R\int_{x^2+y^2}^{27-2x^2-2y^2}dz\,dA = \iint_R(27-3x^2-3y^2)\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^3(27-3r^2)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{27}{2}r^2-\frac{3}{4}r^4\right]_0^3d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{243}{4}\,d\theta = \frac{243}{2}\pi$$

17. S é limitada pelo cilindro $x^2+z^2=9$ e pelos planos $x+y=3$, $z=0$, e $y=0$.

$$\iiint_S(xz+3z)\,dV = \int_{-3}^3\int_0^{3-x}\int_0^{\sqrt{9-x^2}}z(x+3)\,dz\,dy\,dx = \frac{1}{2}\int_{-3}^3\int_0^{3-x}(9-x^2)(x+3)\,dy\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-3}^3(9-x^2)(9-x^2)\,dx = \int_0^3(81-18x^2+x^4)\,dx = \left[81x-6x^3+\frac{1}{5}x^5\right]_0^3 = \frac{648}{5}$$

19. S é limitada pelo plano xy, pelo plano $z=y$, pelo cilindro $y^2=x$ e pelo plano $x=1$.

$$V = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta_iV = \iiint_S dV = \int_0^1\int_0^{\sqrt{x}}\int_0^y dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{\sqrt{x}}y\,dy\,dx = \int_0^1\frac{1}{2}y^2\Big]_0^{\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2}\int_0^1x\,dx = \frac{1}{4}x^2\Big]_0^1 = \frac{1}{4}$$

21. S está no primeiro octante limitado por $x^2+y^2=4$, $x^2+2z=4$ e pelos planos coordenados.

$$V=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i V=\iiint_S dV=\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{(4-x^2)/2}dz\,dy\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}(4-x^2)\,dy\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2(4-x^2)^{3/2}dx$$

Seja $x=2\,\text{sen}\,\theta$, $dx=2\cos\theta\,d\theta$. Então,

$$V=8\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta=8\left[\frac{1}{4}\cos^3\theta\,\text{sen}\,\theta+\frac{3}{4}\int\cos^2\theta\,d\theta\right]_0^{\pi/2}=8\left[0+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cos\theta\,\text{sen}\,\theta+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\theta\right]_0^{\pi/2}=8\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\pi$$

23. A projeção da intersecção de $z=3x^2+y^2$ e $z=4-x^2$ é $4x^2+y^2=4$.

$$V=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i V=\iiint_S dV=4\int_0^1\int_0^{2\sqrt{1-x^2}}\int_{3x^2+y^2}^{4-x^2}dz\,dy\,dx=4\int_0^1\int_0^{2\sqrt{1-x^2}}(4-4x^2-y^2)\,dy\,dx$$

Seja $y=2u$, $dy=2\,du$. Então, use $x^2+u^2=r^2$, $du\,dx=dA=r\,dr\,d\theta$.

$$V=8\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(4-4x^2-4u^2)\,du\,dx=32\int_0^{\pi/2}\int_0^1(1-r^2)\,r\,dr\,d\theta=32\int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{4}r^4\right]_0^1 d\theta=8\int_0^{\pi/2}d\theta=4\pi$$

25. S é o elipsóide $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$.

$$V=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i V=\iiint_S dV=8\int_0^a\int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}}\int_0^{c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}}dz\,dy\,x=8c\int_0^a\int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy\,dx$$

Seja $x=au$, $dx=a\,du$, $y=bv$, $dy=b\,dv$. Então, seja $u^2+v^2=r^2$, $du\,dv=dA=r\,dr\,d\theta$.

$$V=8abc\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-u^2}}\sqrt{1-u^2-v^2}\,dv\,du=8abc\int_0^{\pi/2}\int_0^1(1-r^2)^{1/2}r\,dr\,d\theta=8abc\int_0^{\pi/2}-\frac{1}{3}(1-r^2)^{3/2}\Big]_0^1 d\theta$$

$$=8abc\int_0^{\pi/2}\frac{1}{3}\,d\theta=\frac{4}{3}\pi abc$$

27. S é limitada pelo cilindro $z=4-x^2$, $y=5$ e pelos planos coordenados $\rho(x,y,z)=k$.

$$M=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}k\,\Delta_i V=k\iiint_S dV=k\int_0^2\int_0^5\int_0^{4-x^2}dz\,dy\,dx=k\int_0^2\int_0^5 z\Big]_0^{4-x^2}dy\,dx=k\int_0^2\int_0^5(4-x^2)\,dy\,dx$$

$$=k\int_0^2 4y-x^2y\Big]_0^5 dx=k\int_0^2(20-5x^2)\,dx=k\left[20x-\frac{5}{3}x^3\right]_0^2=k\left(40-\frac{40}{3}\right)=\frac{80}{3}k$$

29. S é limitada por $x=z^2$, $y=x^2$ e pelos planos $y=0$ e $z=0$. $\rho(x,y,z)=kxyz\ \text{kg/m}^3$.

$$M=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}k\xi_i\gamma_i\mu_i\,\Delta_i V=k\iiint_S xyz\,dV=k\int_0^1\int_0^{x^2}\int_0^{\sqrt{x}}xyz\,dz\,y\,x=k\int_0^1\int_0^{x^2}\frac{1}{2}xyz^2\Big]_0^{\sqrt{x}}dy\,dx$$

$$=\frac{k}{2}\int_0^1\int_0^{x^2}x^2y\,dy\,dx=\frac{k}{2}\int_0^1\frac{1}{2}x^2y^2\Big]_0^{x^2}dx=\frac{k}{4}\int_0^1 x^6\,dx=\frac{1}{28}kx^7\Big]_0^1=\frac{1}{28}k$$

31. S é limitada por $z=xy$ e pelos planos $x=1$, $y=1$ e $z=0$. $\rho(x,y,z)=3\sqrt{x^2+y^2}\ \text{kg/m}^3$.

$$M=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}3\sqrt{\xi_i^2+\gamma_i^2}\,\Delta_i V=3\iiint_S\sqrt{x^2+y^2}\,dV=3\int_0^1\int_0^1\int_0^{xy}\sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx=3\int_0^1\int_0^1 xy(x^2+y^2)^{1/2}dy\,dx$$

$$=3\int_0^1\frac{1}{3}x(x^2+y^2)^{3/2}\Big]_0^1 dx=\int_0^1[x(x^2+1)^{3/2}-x^4]\,dx=\frac{1}{5}(x^2+1)^{5/2}-\frac{1}{5}x^5\Big]_0^1=\frac{4}{5}\sqrt{2}-\frac{1}{5}-\frac{1}{5}=\frac{2}{5}(2\sqrt{2}-1)$$

EXERCÍCIOS 18.7 A Integral Tripla em Coordenadas Cilíndricas e Esféricas

V unidades é o volume M kg é a massa e ρ é a densidade da massa por unidade de volume.

1. $\int_0^{\pi/4}\int_0^a\int_0^{r\cos\theta} r\sec^3\theta\, dz\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi/4}\int_0^a z\Big]_0^{r\cos\theta} r\sec^3\theta\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi/4}\int_0^a r^2\sec^2\theta\, dr\, d\theta$

$$= \int_0^{\pi/4}\frac{1}{3}r^3\Big]_0^a\sec^2\theta\, d\theta = \frac{1}{3}a^3\ \mathrm{tg}\ \theta\Big]_0^{\pi/4} = \frac{1}{3}a^3$$

3. $\int_0^{\pi}\int_2^4\int_0^1 re^z dz\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi}\int_2^4 re^z\Big]_0^1 dr\, d\theta = (e-1)\int_0^{\pi}\int_2^4 r\, dr\, d\theta = (e-1)\int_0^{\pi}\frac{1}{2}r^2\Big]_2^4 d\theta = (e-1)\int_0^{\pi}6\, d\theta$

$$= 6\pi(e-1)$$

5. $\int_0^{\pi/4}\int_0^{2a\cos\phi}\int_0^{2\pi}\rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi\, d\theta\, d\rho\, d\phi = \int_0^{\pi/4}\int_0^{2a\cos\phi}\theta\Big]_0^{2\pi}\rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi\, d\rho\, d\phi = 2\pi\int_0^{\pi/4}\int_0^{2a\cos\phi}\rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi\, d\rho\, d\phi$

$$= 2\pi\int_0^{\pi/4}\frac{1}{3}\rho^3\Big]_0^{2a\cos\phi}\mathrm{sen}\,\phi\, d\phi = \frac{16}{3}\pi a^3\int_0^{\pi/4}\cos^3\phi\,\mathrm{sen}\,\phi\, d\phi = -\frac{16}{3}\pi a^3\left[\frac{1}{4}\cos^4\phi\right]_0^{\pi/4} = -\frac{4}{3}\pi a^3\left(\frac{1}{4}-1\right) = \pi a^3$$

7. (a) $V = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i V = \iiint_S dV = 2\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} r\, dz\, dr\, d\theta = 2\int_0^{2\pi}\int_0^a rz\Big]_0^{\sqrt{a^2-r^2}} dr\, d\theta$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^a r(a^2-r^2)^{1/2}dr\, d\theta = -\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}(a^2-r^2)^{3/2}\Big]_0^a d\theta = \frac{2}{3}a^3\int_0^{2\pi}d\theta = \frac{4}{3}\pi a^3$$

(b) $V = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i V = \iiint_S dV = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^a\rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\rho^3\Big]_0^a\mathrm{sen}\,\phi\, d\theta\, d\phi$

$$= \frac{1}{3}a^3\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}\,\phi\, d\theta\, d\phi = \frac{1}{3}a^3\int_0^{\pi}\theta\Big]_0^{2\pi}\mathrm{sen}\,\phi\, d\phi = \frac{2}{3}\pi a^3\int_0^{\pi}\mathrm{sen}\,\phi\, d\phi = -\frac{2}{3}\pi a^3\cos\phi\Big]_0^{\pi} = \frac{4}{3}\pi a^3$$

9. $x = r\cos\theta$. $V = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i V = \iiint_S dV = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_0^{r\cos\theta} r\, dz\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^2\cos\theta\, dr\, d\theta$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta = \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,\theta\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}$$

11. $x^2+y^2 = r^2$. $V = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i V = \iiint_S dV = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_8^{12-r^2} r\, dz\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2(4-r^2)r\, dr\, d\theta$

$$= \int_0^{2\pi}2r^2 - \frac{1}{4}r^4\Big]_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi}4\, d\theta = 8\pi$$

13. O sólido é limitado pela esfera $r^2+z^2 = a^2$. $\rho(r,\theta,z) = k(r^2+z^2)$ kg/m³.

$$M = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}k(\bar{r}_i^2+\bar{z}_i^2)\Delta_i V = k\iiint_S(r^2+z^2)dV = 2k\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}}(r^2+z^2)r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= 2k\int_0^{2\pi}\int_0^a r^2z + \frac{1}{3}z^3\Big]_0^{\sqrt{a^2-r^2}} r\, dr\, d\theta = 2k\int_0^{2\pi}\int_0^a\left[r^2\sqrt{a^2-r^2} + \frac{1}{3}(a^2-r^2)^{3/2}\right]r\, dr\, d\theta$$

Seja $u^2 = a^2 - r^2$, $2u\, du = -2r\, dr$. Então,

$$M = 4\pi k\int_0^a\left[(a^2-u^2)u + \frac{1}{3}u^3\right]u\, du = 4\pi k\left[\frac{1}{3}a^2u^3 - \frac{2}{15}u^5\right]_0^a = \frac{4}{5}a^5\pi k$$

15. S é limitada por $r = 5$, $z = r$, e pelo plano $p = k$ g-cm^3 está em g-cm^2

$$I_z = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i^2 k \, \Delta_i V = k \iiint_S r^2 dV = k\int_0^{2\pi}\int_0^5\int_0^r r^2 (r \, dz \, dr \, d\theta) = k\int_0^{2\pi}\int_0^5 r^3 z\Big]_0^r dr \, d\theta = k\int_0^{2\pi}\int_0^5 r^4 dr \, d\theta$$

$$= k\int_0^{2\pi} \frac{1}{5} r^5\Big]_0^5 d\theta = 625k\int_0^{2\pi} d\theta = 1250\pi k$$

17. $$M = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k\bar{\rho}^2 \Delta_i = \iiint_S k\rho^2 dV = 8k\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^a \rho^2 \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi = 8k\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{5} a^5 \operatorname{sen}\phi \, d\theta \, d\phi$$

$$= \frac{8}{5} a^5 k\int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen}\phi \, d\phi = \frac{4}{5} a^5 \pi k\Big[-\cos\phi\Big]_0^{\pi/2} = \frac{4}{5} a^5 \pi k$$

19. $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$; $\rho^2 = 4\rho\cos\phi$; $\rho = 4\cos\phi$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 2z^2$; $\rho^2 = 2\rho^2\cos^2\phi$; $\cos^2\phi = \frac{1}{2}$; $\phi = \frac{1}{4}\pi$

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \iiint_S dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{4\cos\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} \frac{1}{3}\rho^3\Big]_0^{4\cos\phi} \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= \frac{64}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} \cos^3\phi \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta = \frac{64}{3} \cdot 2\pi\Big[-\frac{1}{4}\cos^4\phi\Big]_0^{\pi/4} = \frac{32}{3}\pi\left(-\frac{1}{4} + 1\right) = 8\pi$$

21. $x^2 + y^2 = 2x$; $r^2 = 2r\cos\theta$; $r = 2\cos\theta$; $\rho = 2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{cosec}\phi$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 2z^2$; $\rho^2 = 2\rho^2\cos^2\phi$;

$\phi = \frac{1}{4}\pi$. Se I_z kg-m^2 o momento de inércia em relação ao eixo z, então

$$I_z = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\bar{\rho}_i \operatorname{sen}\bar{\phi}_i)^2 k \, \Delta_i V = \iiint_S k\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \, dV = k\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta \operatorname{cosec}\phi} (\rho^2 \operatorname{sen}^2)\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= k\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{5}\rho^5\Big]_0^{2\cos\theta \operatorname{cosec}\phi} \operatorname{sen}^3\phi \, d\phi \, d\theta = \frac{32}{5} k\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^5\theta \operatorname{cosec}^2\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= \frac{32}{5} k\int_{-\pi/2}^{\pi/2} -\cos^5\theta \cot\phi\Big]_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta = \frac{32}{5} k\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^5\theta \, d\theta = \frac{64}{5} k\int_0^{\pi/2} (1 - 2\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^4\theta)\cos\theta \, d\theta$$

$$= \frac{64}{5} k\Big[\operatorname{sen}\theta - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3\theta + \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5\theta\Big]_0^{\pi/2} = \frac{64}{5} k\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{512}{75} k$$

23. O sólido está na parte superior da esfera $\rho = 2$. $p(\rho, \theta, \phi) = k\rho$ kg/m^3.

$$M = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k\bar{\rho}_i \Delta_i V = k\iiint_S \rho \, dV = 4k\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^2 \rho(r^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta) = 4k\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\rho^4\Big]_0^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= 16k\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta = 16k\int_0^{\pi/2} (-\cos\phi)\Big]_0^{\pi/2} d\theta = 16k\int_0^{\pi/2} d\theta = 8k\pi$$

25. O sólido está limitado pelas esferas $\rho = a$ e $\rho = 2a$. $p(\rho, \theta, \phi) = k\rho^{-2}$ g-cm^3. Se I_z g-cm^2 for o momento de inércia do sólido em torno do eixo z, então

$$I_z = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\bar{\rho}_i \operatorname{sen}\bar{\phi}_i)^2 (k\bar{\rho}_i^{-2}) \Delta_i V = \iiint_S \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi (k\rho^{-2}) dV = k\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_a^{2a} \operatorname{sen}^2\phi (r^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi)$$

$$= k\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\rho^3\Big]_a^{2a} \operatorname{sen}^3\phi \, d\theta \, d\phi = \frac{7}{3} a^3 k\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3\phi \, d\theta \, d\phi = \frac{7}{3} a^3 k\int_0^{\pi} \theta\Big]_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3\phi \, d\phi = \frac{14}{3}\pi a^3 k\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\phi \, d\phi$$

$$= \frac{14}{3}\pi a^3 k\int_0^{\pi} (1 - \cos^2\phi)\operatorname{sen}\phi \, d\phi = \frac{14}{3}\pi a^3 k\Big[-\cos\phi + \frac{1}{3}\cos^3\phi\Big]_0^{\pi} = \frac{14}{3}\pi a^3 k\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{56}{9}\pi a^3 k$$

27. $x^2 + y^2 = z;\ z = r^2$ e $x^2 + y^2 = z^2;\ z = r$

$$M = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k\, \Delta_i V = k \iiint dV = k\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{r} r\, dz\, dr\, d\theta = k\int_0^{2\pi}\int_0^1 rz\Big]_{r^2}^{r} dr\, d\theta = k\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2 - r^3)\, dr\, d\theta$$

$$= k\int_0^{2\pi} \frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{4}r^4\Big]_0^1 d\theta = \frac{1}{12}k\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{6}\pi k$$

Se M_{xy} kg-m for o momento de massa em relação ao plano xy, então

$$M_{xy} = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar{z}_i(k)\, \Delta_i V = k\iiint_S z\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{r} zr\, dz\, dr\, d\theta = k\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{2}rz^2\Big]_{r^2}^{r} dr\, d\theta$$

$$= \frac{k}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^3 - r^5)\, dr\, d\theta = \frac{k}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{6}r^6\Big]_0^1 d\theta = \frac{1}{24}k\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{12}\pi k$$

Devido à simetria em relação ao eixo z, o centro de massa está no ponto

$(0, 0, \bar{z})$ onde $\bar{z} = \frac{1}{M}M_{xy} = \frac{6}{\pi k}\cdot\frac{\pi k}{12} = \frac{1}{2}$.

29. $$\int_0^4\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx\, dz = \int_0^{\pi/2}\int_0^3\int_0^4 r(r\, dz\, dr\, d\theta) = \int_0^{\pi/2}\int_0^3 r^2 z\Big]_0^4 dr\, d\theta = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^3 r^2\, dr\, d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \frac{1}{3}r^3\Big]_0^3 d\theta = 36\int_0^{\pi/2} d\theta = 18\pi$$

31. $$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\, dz\, dx\, dy = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_r^{\sqrt{2-r^2}} z^2(r\, dz\, dr\, d\theta) = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \frac{1}{3}rz^3\Big]_r^{\sqrt{2-r^2}}$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 [r(2-r^2)^{3/2} - r^4]\, dr\, d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\Big[-\frac{1}{5}(2-r^2)^{5/2} - \frac{1}{5}r^5\Big]_0^1 = -\frac{1}{15}\int_0^{\pi/2}(2 - 4\sqrt{2})\, d\theta$$

$$= \frac{1}{15}(4\sqrt{2} - 2)\theta\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{15}\pi(2\sqrt{2} - 1)$$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 18

A unidades de área é a área pedida, V unidades de volume é o volume pedido, M kg é a massa pedida.

1. $$\int_0^1\int_x^{\sqrt{x}} x^2 y\, dy\, dx = \int_0^1 \frac{1}{2}y^2\Big]_x^{\sqrt{x}} x^2\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^3 - x^4)\, dx = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\Big) = \frac{1}{40}$$

3. $$\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\,\text{sen}\,\theta} r\cos^2\theta\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}r^2\Big]_0^{2\,\text{sen}\,\theta} \cos^2\theta\, d\theta = 2\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2\theta\cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}(1 - \cos 4\theta)\, d\theta = \frac{1}{4}\Big[\theta - \frac{1}{4}\,\text{sen}\,4\theta\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}\pi$$

5. $$\int_0^1\int_0^z\int_0^{y+z} e^x e^y e^z\, dx\, dy\, dz = \int_0^1\int_0^z e^x\Big]_0^{y+z} e^y e^z\, dy\, dz = \int_0^1\int_0^z (e^{y+z} - 1)e^y e^z\, dy\, dz$$

$$= \int_0^1\int_0^z (e^{2y}e^{2z} - e^y e^z)\, dy\, dz = \int_0^1\Big[\frac{1}{2}e^{2y}e^{2z} - e^y e^z\Big]_0^z dz = \int_0^1\Big(\frac{1}{2}e^{4z} - e^{2z} - \frac{1}{2}e^{2z} + e^z\Big)dz$$

$$= \int_0^1\Big(\frac{1}{2}e^{4z} - \frac{3}{2}e^{2z} + e^z\Big)dz = \Big[\frac{1}{8}e^{4z} - \frac{3}{4}e^{2z} + e^z\Big]_0^1 = \frac{1}{8}e^4 - \frac{3}{4}e^2 + e - \frac{3}{8}$$

EXERCÍCIOS 18.8 Mudanças de Variáveis em Integrais Múltiplas

1. Seja $x = r\cos\theta$ e $y = r \operatorname{sen}\theta$. Sabemos que $J\left(\frac{x,y}{r,\theta}\right) = r$ e que $r = [x^2 + y^2]^{1/2}$. Então,

$$I = \iint_R \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy = \iint_{R'} r \left| J\left(\frac{x,y}{r,\theta}\right) \right| drd\theta = \iint_{R'} r^2\, drd\theta$$

Como $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$ são dois círculos, teremos que $1 \le r \le 4$ e $0 \le \theta \le 2\pi$. Logo,

$$I = \int_0^{2\pi} \left[\int_1^2 r^2 dr\right] d\theta = \frac{14\pi}{3}$$

3. Fazendo a transformação $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ R é levada na região R′ dada por

$1 \le r \le 2$ e $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, ou seja, R′ é um retângulo com vértices $(1,0)$, $(2,0)$, $(2,\frac{\pi}{2})$ e $(1,\frac{\pi}{2})$.

Por outro lado, $J\left(\frac{x,y}{r,\theta}\right) = r$, então

$$I = \iint_{R'} r^2 \left| J\left(\frac{x,y}{r,\theta}\right) \right| drd\theta$$
$$= \iint_{R'} r^3 drd\theta = \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^2 r^2 dr\right]. d\theta = \frac{15\pi}{8}$$

5. Temos que

$$J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Como $u = x - y$ e $v = y$ segue que os pontos $(0,0)$, $(2,0)$, $(3,1)$, e $(1,1)$ são levados, respectivamente, em $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$ e $(0,1)$ que são vértices de um retângulo.

Então, $I = \int_0^1 \left[\int_0^2 (u + 2v)\, du\right] dv = 4$

7. 2π

9. $(e - 1)\ \ln^2$

7. $\int_0^{\pi/2}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_0^2 r^3 \operatorname{sen}\phi \cos\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{4}\rho^4\Big]_0^2 \operatorname{sen}\phi \cos\phi \, d\phi \, d\theta = 4\int_0^{\pi/2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi(\cos\phi)\, d\phi \, d$

$= 4\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin^2\phi\Big]_{\pi/6}^{\pi/2} d\theta = 2\int_0^{\pi/2}\left(1 - \frac{1}{4}\right)d\theta = \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{3}{4}\pi$

9. $\iint_R xy \, dA = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 (r\cos\theta)(r\operatorname{sen}\theta) r \, dr \, d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^3 \operatorname{sen}\theta\cos\theta \, dr \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} r^4\Big]_0^1 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \, d$

$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\cos\theta \, d\theta = \frac{1}{8}\operatorname{sen}^2\theta\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}$

11. $\iiint_S z^2 dV = 4\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z}}\int_0^{\sqrt{1-z}} z^2 \, dy \, dx \, dz = 4\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z}} y\Big]_0^{\sqrt{1-z}} z^2 dx \, dz = 4\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z}} z^2\sqrt{1-z} \, dx$

$= 4\int_0^1 x\Big]_0^{\sqrt{1-z}} z^2\sqrt{1-z} \, dz = 4\int_0^1 (z^2 - z^3) \, dz = 4\left[\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4\right]_0^1 = 4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}$

13. $\iint_R \frac{1}{x^2+y^2} dA = \int_0^{\pi/2}\int_1^2 \frac{1}{r^2}(r \, dr \, d\theta) = \int_0^{\pi/2}\int_1^2 \frac{1}{r} dr \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \ln|r|\Big]_1^2 d\theta = \ln 2\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{1}{2}\pi\ln 2$

15. $\int_0^1\int_x^1 \operatorname{sen} y^2 dy \, dx = \int_0^1\int_0^y \operatorname{sen} y^2 dx \, dy = \int_0^1 x\Big]_0^y \operatorname{sen} y^2 dy = \int_0^1 y \operatorname{sen} y^2 dy = -\frac{1}{2}\cos y^2\Big]_0^1 = \frac{1}{2}(1 - \cos 1)$

17. $A = \iint_R dA = \int_{-1}^1\int_{x^4}^{x^2} dy \, dx = \int_{-1}^1 y\Big]_{x^4}^{x^2} dx = \int_{-1}^1 (x^2 - x^4) \, dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\Big]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{15}$

19. $\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^2 \sqrt{x^2+y^2} \, dz \, dy \, dx = \int_0^{\pi/2}\int_0^3\int_0^2 r(r \, dz \, dr \, d\theta) = \int_0^{\pi/2}\int_0^3 z\Big]_0^2 r^2 dr \, d\theta = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^3 r^2 dr \, d\theta$

$= 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{3}r^3\Big]_0^3 d\theta = 18\int_0^{\pi/2} d\theta = 9\pi$

21. $A = \iint_R dy \, dx = \int_0^2\int_{x^2/4}^{(8-x^2)/4} dy \, dx = \int_0^2 y\Big]_{x^2/4}^{(8-x^2)/4} dx = \frac{1}{4}\int_0^2 (8 - 2x^2) \, dx = \frac{1}{4}\left[8x - \frac{2}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{1}{4}\left(16 - \frac{16}{3}\right) = \frac{8}{3}$

23. $A = \iint_R dx \, dy = \int_0^1\int_0^{2\sqrt{y}} dx \, dy + \int_1^2\int_0^{2\sqrt{2-y}} dx \, dy = \int_0^1 x\Big]_0^{2\sqrt{y}} dy + \int_0^1 x\Big]_0^{2\sqrt{2-y}} dy$

$= 2\int_0^1 y^{1/2} dy + 2\int_1^2 (2-y)^{1/2} dy = \frac{4}{3}y^{3/2}\Big]_0^1 - \frac{4}{3}(2-y)^{3/2}\Big]_1^2 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

25. $V = \iint_R 1 \, dA = \int_0^1\int_y^1 dx \, dy = \int_0^1 (1 - y) \, dy = -\frac{1}{2}(1-y)^2\Big]_0^1 = \frac{1}{2}$

27. $V = \iint_R 1 \, dA = \int_0^1\int_0^x dy \, dx = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}x^2\Big]_0^1 = \frac{1}{2}$

29. $V = \iint_R (x^2 + y) \, dA = \int_0^4\int_{x^2/4}^{2\sqrt{x}} (x^2 + y) \, dy \, dx = \int_0^4 x^2 y + \frac{1}{2}y^2\Big]_{x^2/4}^{2\sqrt{x}} dx = \int_0^4 \left(x^{5/2} + 2x - \frac{9}{32}x^4\right)dx$

$= \frac{4}{7}x^{7/2} + x^2 - \frac{9}{160}x^5\Big]_0^4 = \frac{512}{7} + 16 - \frac{288}{5} = \frac{1.104}{35}$

31. No primeiro octante $y \geq 0$ assim, $x^2 + y^2$ resulta $y = \sqrt{9 - x^2}$. Então, $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$ e $\frac{\partial y}{\partial z} = 0$.

Se σ for a área da superfície,

$$\sigma = \int_0^3 \int_x^{3x} \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1}\, dz\, dx = = \int_0^3 \int_x^{3x} \sqrt{\frac{x^2}{9 - x^2} + 0 + 1}\, dz\, d = \int_0^3 \frac{3z}{\sqrt{9 - x^2}}\Bigg]_x^{3x} dx = 6\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}\, dx$$

$$= 6 \lim_{b \to 3^-} \int_0^b x(9 - x^2)^{-1/2} dx = -6 \lim_{b \to 3^-} (9 - x^2)^{1/2}\Big]_0^b = -6 \lim_{b \to 3^-} [(9 - b^2)^{1/2} - 3] = 18$$

33. $$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \Delta_i r\, \Delta_i \theta = \iint_R r\, dr\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{1/(1+\cos\theta)}^{1} r\, dr\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} r^2 \Big]_{1/2\cos^2(\theta/2)}^{1} d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 - \frac{1}{4}\sec^4\frac{\theta}{2}\right) d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[1 - \frac{1}{4}\left(\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} + 1\right)\sec^2\frac{\theta}{2}\right] d\theta = \left[\theta - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\theta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}$$

35. $$M = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i \gamma_i^2) \Delta_i A = \iint_R xy^2 dA = \int_0^3 \int_0^2 xy^2 dy\, dx = \int_0^3 \frac{1}{3} xy^3 \Big]_0^2 dx = \frac{8}{3}\int_0^3 x\, x = \frac{4}{3} x^2 \Big]_0^3 = 12$$

Se M_x kg-m e M_y kg-m são momentos de massa em relação aos eixos x e y.

$$M_x = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (\xi_i \gamma_i^2) \Delta_i A = \iint_R xy^3 dA = \int_0^3 \int_0^2 xy^3 dy\, dx = \int_0^3 \frac{1}{4} xy^4 \Big]_0^2 dx = 4\int_0^3 x\, x = 2x^2 \Big]_0^3 = 18$$

$$M_y = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i (\xi_i \gamma_i^2) \Delta_i A = \iint_R x^2 y^2 dA = \int_0^3 \int_0^2 x^2 y^2 dy\, dx = \int_0^3 \frac{1}{3} x^2 y^3 \Big]_0^2 dx = \frac{8}{3}\int_0^3 x^2\, dx = \frac{8}{9} x^3 \Big]_0^3 = 24$$

Se $(\bar{x}, \bar{y})$ for o centro de massa, $\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{24}{12} = 2$ e $\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$.

37. $$M = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\bar{r}_i \bar{\theta}_i)(\bar{r}_i \Delta_i r\, \Delta_i \theta) = \iint_R r^2 \theta\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos 2\theta} r^2 \theta\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{3} r^3 \theta \Big]_0^{\cos 2\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} \theta \cos^3 2\theta\, d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} \theta(1 - \operatorname{sen}^2 2\theta) \cos 2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{6}\left[\theta\left(\operatorname{sen} 2\theta - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 2\theta\right)\right]_0^{\pi/4} - \frac{1}{6}\int_0^{\pi/4} \left(\operatorname{sen} 2\theta - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 2\theta\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\int_0^{\pi/4} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cos^2 2\theta\right) \operatorname{sen} 2\theta\, d\theta = \frac{\pi}{36} + \frac{1}{12}\left[\frac{2}{3}\cos 2\theta + \frac{1}{9}\cos^3 2\theta\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{36} - \frac{1}{12}\cdot\frac{7}{9} = \frac{3\pi - 7}{108}$$

39. $x^2 + y^2 = 4z$; $r^2 = 4z$ e $x^2 + y^2 = 4ay$; $r^2 = 4ar \operatorname{sen}\theta$; $r = 4a \operatorname{sen}\theta$.

$$V = \int_0^{\pi} \int_0^{4a \operatorname{sen}\theta} \int_0^{r^2/4} r\, dz\, d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \int_0^{4a \operatorname{sen}\theta} r^3 dr\, d\theta = \frac{1}{16}\int_0^{\pi} r^4 \Big]_0^{4a \operatorname{sen}\theta} d\theta = 16a^4 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^4\theta\, d\theta$$

$$= 16a^4 \left[-\frac{1}{4}\operatorname{sen}^3\theta \cos\theta + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{1}{2}\theta\right)\right]_0^{\pi} = 16a^4 \cdot \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot \pi = 6\pi a^4$$

41. $$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4 - r^2}} r\, dz\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} [r(4 - r^2)^{1/2} - r] dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3}(4 - r^2)^{3/2} - \frac{1}{2} r^2\right]_0^{\sqrt{3}} d\theta$$

$$= 2\pi\left[\left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{8}{3}\right)\right] = \frac{5\pi}{3}$$

43. Se I_x kg-m² for o momento de inércia da lâmina em torno do eixo x,

$$I_x = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(\xi_i \gamma_i)\,\Delta_i A = \iint_R xy^3\,dA = \int_0^2\int_0^{e^x} xy^3\,dy\,dx = \int_0^2 \frac{1}{4}xy^4\Big]_0^{e^x} dx = \frac{1}{4}\int_0^2 xe^{4x}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}xe^{4x} - \frac{1}{16}e^{4x}\right]_0^2 = \frac{1}{64}[(8e^8 - e^8) + 1] = \frac{1}{64}(7e^8 + 1)$$

45. Se I_y kg-m² for o momento de inércia da lâmina em torno do eixo y,

$$I_y = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (\bar{r}_i \cos\bar{\theta}_i)^2(k)\,\Delta_i A = k\iint_R r^2\cos^2\theta\, r\,dr\,d\theta = 2k\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{2\sqrt{\cos 2\theta}} r^3\cos^2\theta\,dr\,d\theta$$

$$= 2k\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{4}r^4\Big]_0^{2\sqrt{\cos 2\theta}}\cos^2\theta\,d\theta = 8k\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^2 2\theta\cos^2\theta\,d\theta = 16k\int_0^{\pi/4}\cos^2 2\theta\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$= 8k\int_0^{\pi/4}(\cos^2 2\theta + \cos^3 2\theta)\,d\theta = 8k\int_0^{\pi/4}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4\theta + (1 - \operatorname{sen}^2 2\theta)\cos 2\theta\right]d\theta$$

$$= 8k\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta - \frac{1}{6}\operatorname{sen}^3 2\theta\right]_0^{\pi/4} = 8k\left(\frac{1}{8}\pi + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = k\left(\pi + \frac{8}{3}\right)$$

47. Se I_O kg-m² for o momento polar de inércia da lâmina,

$$I_O = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i^2(k)\,\Delta_i A = k\iint_R r^2(r\,dr\,d\theta) = 2k\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{2\sqrt{\cos 2\theta}} r^3\,dr\,d\theta = 2k\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{1}{4}r^4\Big]_0^{2\sqrt{\cos 2\theta}}d\theta$$

$$= 8k\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^2 2\theta\,d\theta = 8k\int_0^{\pi/4}(1 + \cos 4\theta)\,d\theta = 8k\left[\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4\theta\right]_0^{\pi/4} = 2\pi k$$

$$M = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} k\,\Delta_i A = k\iint_R r\,dr\,d\theta = 2k\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{2\sqrt{\cos 2\theta}} r\,dr\,d\theta = 2k\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{1}{2}r^2\Big]_0^{2\sqrt{\cos 2\theta}}d\theta$$

$$= 4k\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos 2\theta\,d\theta = 2k\operatorname{sen} 2\theta\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4} = 4k$$

Se r m for o raio de giração, $r = \sqrt{\dfrac{I_O}{M}} = \sqrt{\dfrac{2\pi k}{4k}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2\pi}$.

49. O sólido é limitado pelas esferas $\rho = 2$ e $\rho = 3$. $p = k\rho$ kg/m².

$$M = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (k\bar{\rho}_i)\,\Delta_i V = \iiint_S k\rho\,dV = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_2^3 k\rho(\rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi = k\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\rho^4\Big]_2^3$$

$$= \frac{65}{4}k\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\phi\,d\theta\,d\phi = \frac{65}{4}k\int_0^{\pi}\theta\Big]_0^{2\pi}\operatorname{sen}\phi\,d\phi = \frac{65}{2}\pi k\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\phi\,d\phi = \frac{65}{2}\pi k\Big[-\cos\phi\Big]_0^{\pi} = 65\pi k$$

51. O sólido é limitado por $z^2 = 4x^2 + 4y^2$; $z^2 = 4r^2$, $z = 0$ e $z = 4$. Se I_z estiver em kg-m²,

$$I_z = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i^2 k\,\Delta_i V = \iiint_S kr^2\,dV = k\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{2r}^4 r^2(r\,dz\,dr\,d\theta) = k\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3 z\Big]_{2r}^4 dr\,d\theta$$

$$= 2k\int_0^{2\pi}\int_0^2(4r^3 - 2r^4)\,dr\,d\theta = 2k\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}r^4 - \frac{1}{5}r^5\right]_0^2 d\theta = 2k\int_0^{2\pi}\frac{8}{5}\,d\theta = 2k\cdot\frac{8}{5}\cdot 2\pi = \frac{32}{5}\pi k$$

CAPÍTULO DEZENOVE

INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE CAMPOS VETORIAIS

EXERCÍCIOS 19.1 Campos Vetoriais

Nos Exercícios 7-13 o campo vetorial conservativo desejado é $\mathbf{F} = \nabla f$.

7. $f(x, y) = 3x^2 + 2y^3$. $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y) = 6x\mathbf{i} + 6y\mathbf{j}$.

9. $f(x, y) = \operatorname{tg}^{-1} x^2 y$. $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y) = \dfrac{2xy}{1 + x^4y^2}\mathbf{i} + \dfrac{x^2}{1 + x^4y^2}\mathbf{j}$.

11. $f(x, y, z) = 2x^3 - 3x^2y + xy^2 - 4y^3$. $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) = (6x^2 - 6xy + y^2)\mathbf{i} + (-3x^2 + 2xy - 12y^2)\mathbf{j}$.

13. $f(x, y, z) = x^2ye^{-4z}$. $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) = 2xye^{-4z}\mathbf{i} + x^2e^{-4z}\mathbf{j} - 4x^2ye^{-4z}\mathbf{k}$.

15. $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 - 2y^2)\mathbf{i} + (3 - 4xy)\mathbf{j} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$. $M_y(x, y) = -4y$. $N_x(x, y) = -4y$.

    Como $M_y = N_x$, $\mathbf{F}$ é conservativo.

17. $\mathbf{F}(x, y) = y\cos(x + y)\mathbf{i} - x\operatorname{sen}(x + y)\mathbf{j} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$.

    $M_y(x, y) = \cos(x + y) - y\operatorname{sen}(x + y)$ $\quad N_x(x, y) = -\operatorname{sen}(x + y) - x\cos(x + y)$

    Como $M_y \neq N_x$, $\mathbf{F}$ não é conservativo.

19. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2ye^{2x} + e^z)\mathbf{i} + (3ze^{3y} + e^{2x})\mathbf{j} + (xe^z + e^{3y})\mathbf{k} = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} = R(x, y, z)\mathbf{k}$

    $M_y(x, y, z) = 2e^{2x}$ $\quad N_x(x, y, z) = 2e^{2x}$ $\quad R_x(x, y, z) = e^z$

    $M_z(x, y, z) = e^z$ $\quad N_z(x, y, z) = 3e^{3y}$ $\quad R_y(x, y, z) = 3e^{3y}$

    Como $M_y = N_x$, $M_z = R_x$, e $N_z = R_y$, $\mathbf{F}$ é conservativo.

Nos Exercícios 21-31 provamos que $\mathbf{F}$ é conservativo, exibindo a função potencial ϕ tal que $\mathbf{F} = \nabla\phi$.

21. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} = \nabla\phi$ onde $\phi(x, y) = xy + C$.

23. $\mathbf{F}(x, y) = e^x\operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + e^x\cos y\,\mathbf{j} = \nabla\phi$ onde $\phi(x, y) = e^x\operatorname{sen} y + C$.

25. $\mathbf{F}(x, y) = (2xy^2 - y^3)\mathbf{i} + (2x^2y - 3xy^2 + 2)\mathbf{j} = \nabla\phi$ onde $\phi(x, y) = x^2y^2 - xy^3 + 2y + C$.

27. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 - y)\mathbf{i} - (x - 3z)\mathbf{j} + (z + 3y)\mathbf{k} = \nabla\phi$ onde $\phi(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3 - xy + 3yz + \frac{1}{2}z^2 + C$.

29. $\mathbf{F}(x, y, z) = (ze^x + e^y)\mathbf{i} + (xe^y - e^z)\mathbf{j} + (-ye^z + e^x)\mathbf{k} = \nabla\phi$ onde $\phi(x, y, z) = ze^x + xe^y - ye^z + C$.

31. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x\cos y - 3)\mathbf{i} - (x^2\operatorname{sen} y + z^2)\mathbf{j} - (2yz - 2)\mathbf{k} = \nabla\phi$ onde $\phi = x^2\cos y - 3x - yz^2 + 2z + C$.

33. $F(x, y) = 2xi + 3yj$. $M(x, y) = 2x$, $N(x, y) = 3y$. $\text{rot } F = (N_x - M_y)k = 0$; $\text{div } F = M_x + N_y = 2 + 3 = 5$

35. $F(x, y) = e^x \cos y i + e^x \text{sen } y j$. $M(x, y) = e^x \cos y$, $N(x, y) = e^x \text{sen } y$. $\text{rot } F = (N_x - M_y)k = (e^x \text{sen } y + e^x \text{sen } y)k = 2e^x \text{sen } y k$. $\text{div } F = M_x + N_y = e^x \cos y + e^x \cos y = 2e^x \cos y$.

37. $F(x, y, z) = x^2 i + y^2 j + z^2 k$. $M(x, y, z) = x^2$, $N(x, y, z) = y^2$, $R(x, y, z) = z^2$.
$\text{rot } F = (R_y - N_z)i + (M_z - R_x)j + (N_x - M_y)k = 0$. $\text{div } F = M_x + N_y + R_z = 2x + 2y + 2z$.

39. $F(x, y, z) = \cos y i + \cos z j + \cos x k$. $M(x, y, z) = \cos y$, $N(x, y, z) = \cos z$, $R(x, y, z) = \cos x$.
$\text{rot } F = (R_y - N_z)i + (M_z - R_x)j + (N_x - M_y)k = \text{sen } z i + \text{sen } x j + \text{sen } y k$. $\text{div } F = M_x + N_y + R_z = 0$.

41. $F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\, i + \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\, j + z^2 k$. $M = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$, $N = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$, $R = z^2$.
$\text{rot } F = (R_y - N_z)i + (M_z - R_x)j + (N_x - M_y)k = \dfrac{x - y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} k$. $\text{div } F = \dfrac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} + 2z$.

43. $f(x, y) = e^y \text{sen } x + e^x \cos y$. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^y \cos x + e^x \cos y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = e^y \text{sen } x - e^x \text{sen } y$.
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -e^y \text{sen } x + e^x \cos y$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^y \text{sen } x - e^x \cos y$. Como $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, f é harmônica.

45. $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 - 5z^2$. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 6y$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = -10z$.
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6$, $\dfrac{\partial f^2}{\partial z^2} = -10$. Como $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$, f é harmônica.

EXERCÍCIOS 19.2 Integrais de Linha

1. $F(x, y) = yi + xj$. $C: R(t) = ti + t^2 j$, $0 \le t \le 1$.
$$\int_C F \cdot dR = \int_C F(R(t)) \cdot R'(t)\, dt = \int_0^1 \langle t^2, t\rangle \cdot \langle 1, 2t\rangle dt = \int_0^1 3t^2 dt = t^3\Big]_0^1 = 1$$

3. $F(x, y) = 2xyi + (x - 2y)j$. $C: R(t) = \text{sen } t i - 2\cos t j$, $0 \le t \le \pi$.
$$\int_C F \cdot dR = \int_0^\pi \langle 2 \text{ sen } t(-2\cos t), \text{sen } t + 4\cos t\rangle \cdot \langle \cos t, 2 \text{ sen } t\rangle dt$$
$$= \int_0^\pi (-4 \text{ sen } t \cos^2 t + 2 \text{ sen}^2 t + 8 \text{ sen } t \cos t)\, dt = \left[\frac{4}{3}\cos^3 t + \left(t - \frac{1}{2}\cos 2t\right) + 4 \text{ sen}^2 t\right]_0^\pi = \pi - \frac{8}{3}$$

5. $F(x, y) = (x - y)i + (x + y)j$. C: $R(t) = 2\cos t i + 2 \text{ sen } t j$, $0 \le t \le 2\pi$.
$$\int_C F \cdot dR = \int_0^{2\pi} \langle 2\cos t - 2 \text{ sen } t, 2\cos t + 2 \text{ sen } t\rangle \cdot \langle -2 \text{ sen } t, 2\cos t\rangle dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (-4 \text{ sen } t \cos t + 4 \text{ sen}^2 t + 4\cos^2 t + 4 \text{ sen } t \cos t)\, dt = \int_0^{2\pi} 4\, dt = 8\pi$$

7. $F(x, y) = y \text{ sen } x i - \cos x j$. C: $R(t) = \frac{1}{2}(t + 1)\pi i + tj$, $0 \le t \le 1$.
$$\int_C F \cdot dR = \int_0^1 \left\langle t \text{ sen}(t + 1)\frac{\pi}{2}, -\cos(t + 1)\frac{\pi}{2}\right\rangle \cdot \left\langle \frac{\pi}{2}, 1\right\rangle dt = \int_0^1 \left[\frac{\pi}{2} t \text{ sen}(t + 1)\frac{\pi}{2} - \cos(t + 1)\frac{\pi}{2}\right] dt$$
$$= -t\cos(t + 1)\frac{\pi}{2}\Big]_0^1 = 1$$

9. C: $y = x$ de $(0,0)$ a $(2,2)$. Com x como parâmetro,

$$\int_C (x^2 + xy)\,dx + (y^2 - xy)\,dy = \int_0^2 (x^2 + x^2)\,dx + (x^2 - x^2)\,dx = \int_0^2 2x^2 dx = \frac{2}{3}x^3\Big]_0^2 = \frac{16}{3}$$

11. Em C_1, x é um parâmetro $0 \le x \le 2$, $y = 0$. Em C_2, y é um parâmetro $0 \le y \le 2$, $x = 2$.

$$\int_C (x^2 + xy)\,dx + (y^2 - xy)\,dy = \int_0^2 x^2 dx + \int_0^2 (y^2 - 2y)\,dy = \frac{1}{3}x^3\Big]_0^2 + \left[\frac{1}{3}y^3 - y^2\right]_0^2 = \frac{8}{3} + \left(\frac{8}{3} - 4\right) = \frac{4}{3}$$

13. C: $y = -x^3$, $0 \le x \le 1$. Com x como parâmetro,

$$\int_C yx^2 dx + (x + y)\,dy = \int_0^1 (-x^3)x^2 dx + (x - x^3)(-3x^2)\,dx = \int_0^1 (2x^5 - 3x^3)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^6 - \frac{3}{4}x^4\right]_0^1 = -\frac{5}{12}$$

15. Com x como parâmetro C_1: $y = 2x + 3$, $0 \le x \le 3$ e C_2: $y = x^2$, $3 \le x \le 5$.

$$\int_C 3xy\,dx + (4x^2 - 3y)\,dy = \int_0^3 3x(2x + 3)\,dx + [4x^2 - 3(2x + 3)]\,2\,dx + \int_3^5 3x(x^2)\,dx + (4x^2 - 3x^2)\,2x\,dx$$

$$= \int_0^3 (14x^2 - 3x - 18)\,dx + \int_3^5 5x^3 dx = \left[\frac{14}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 18x\right]_0^3 + \left[\frac{5}{4}x^4\right]_3^5 = 14\cdot 9 - \frac{27}{2} - 54 + \frac{5}{4}(5^4 - 3^4) = \frac{1.477}{2}$$

17. C: $x = t$, $y = 2t$, $z = 4t$, $0 \le t \le 1$.

$$\int_C (x + y)\,dx + (y + z)\,dy + (x + z)\,dz = \int_0^1 (t + 2t)\,dt + (2t + 4t)\,2\,dt + (t + 4t)\,4\,t = \int_0^1 35t\,dt = \frac{35}{2}$$

19. $F(x, y, z) = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$; C: $R(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$

$$\int_C F\cdot dR = \int_C \langle t, a\cos t, a\,\text{sen}\,t\rangle\cdot\langle -a\,\text{sen}\,t, a\cos t, 1\rangle dt = \int_0^{2\pi} (-at\,\text{sen}\,t + a^2\cos^2 t + a\,\text{sen}\,t)\,dt$$

$$= a(t\cos t - \text{sen}\,t) + \tfrac{1}{2}a^2 t + \tfrac{1}{4}a^2\,\text{sen}\,2t - a\cos t\Big]_0^{2\pi} = (a\cdot 2\pi + a^2\pi - a) - (-a) = \pi(a^2 + 2a)$$

21. $F(x, y, z) = 2xy\mathbf{i} + (6y^2 - xz)\mathbf{j} + 10z\mathbf{k}$

C_1: $R_1(t) = t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$; C_2: $R(t) = t\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$; C_3: $R(t) = t\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$.

$$\int_C F\cdot dR = \int_{C_1} F\cdot dR_1 + \int_{C_2} F\cdot dR_2 + \int_{C_3} F\cdot dR_3 = \int_0^1 10t\,dt + \int_0^1 6t^3\,dt + \int_0^1 2t\,dt = 5t^2\Big]_0^1 + 2t^3\Big]_0^1 + t^2\Big]_0^1 = 8$$

Nos Exercícios de 23-35 w J é o trabalho realizado.

23. $F(x, y) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\mathbf{j}$; C: $R(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$, $0 \le t \le 1$.

$$W = \int_C F\cdot dR = \int_0^1 \langle 2t^2, 2t^2\rangle\cdot\langle 1, 1\rangle dt = \int_0^1 4t^2 dt = \frac{4}{3}t^3\Big]_0^1 = \frac{4}{3}$$

25. $F(x, y) = (y - x)\mathbf{i} + x^2 y\mathbf{j}$; C: $R(t)\,t\mathbf{i} + (3t - 2)\mathbf{j}$, $1 \le t \le 2$.

$$W = \int_C F\cdot dR = \int_1^2 \langle 3t - 2 - t, t^2(3t - 2)\rangle\cdot\langle 1, 3\rangle dt = \int_1^2 (9t^3 - 6t^2 + 2t - 2)\,dt = \frac{9}{4}t^4 - 2t^3 + t^2 - 2t\Big]_1^2 = 20\tfrac{3}{4}$$

27. $F(x, y) = (y - x)\mathbf{i} + x^2 y\mathbf{j}$; C_1: $R_1(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$, $1 \le t \le 2$; C_2: $R_2(t) = 2\mathbf{i} + t\mathbf{j}$, $2 \le t \le 4$.

$$W = \int_1^2 \langle t - t, t^2\cdot t\rangle\cdot\langle 1, 1\rangle dt + \int_2^4 \langle t - 2, 4t\rangle\cdot\langle 0, 1\rangle dt = \int_1^2 t^3 dt + \int_2^4 4t\,dt = \frac{1}{4}t^4\Big]_1^2 + 2t^2\Big]_2^4 = 27\tfrac{3}{4}$$

29. $F(x,y) = -x^2y\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$; C: $R(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j}$, $0 \le t \le \frac{1}{2}\pi$.

$$W = \int_0^{\pi/2} \langle -a^2\cos^2 t \cdot a\,\text{sen}\,t, 2\,\text{sen}\,t\rangle \cdot \langle -a\,\text{sen}\,t, a\cos t\rangle dt = \int_0^{\pi/2} (a^4\text{sen}^2 t\cos^2 t + 2a^2\text{sen}\,t\cos t)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{4}a^4\text{sen}^2 2t + 2a^2\text{sen}\,t\cos t\right)dt = \frac{1}{8}a^4\left(t - \frac{1}{4}\cos 4t\right) + a^2\text{sen}^2 t\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{16}a^4\pi + a^2$$

31. $F(x,y,z) = (y+z)\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$; C: $t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$.

$$W = \int_C F \cdot dR = \int_0^1 \langle t+t, t+t, t+t\rangle \cdot \langle 1,1,1\rangle dt = \int_0^1 6t\,dt = 3t^2\Big]_0^1 = 3$$

33. $F(x,y,z) = e^x\mathbf{i} + e^y\mathbf{j} + e^z$; C: $R(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2$.

$$W = \int_0^2 \langle e^t, e^{t^2}, e^{t^3}\rangle \cdot \langle 1, t^2, t^3\rangle dt = \int_0^2 (e^t + 2te^{t^2} + 3t^2e^{t^3})\,dt = e^t + e^{t^2} + e^{t^3}\Big]_0^2 = e^2 + e^4 + e^8 - 3$$

35. $F(x,y,z) = (xyz + x)\mathbf{i} + (x^2z + y)\mathbf{j} + (x^2y + z)\mathbf{k}$

C_1: $R_1(t) = t\mathbf{i}$, $0 \le t \le 1$; C_2: $R_2(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j}$, $0 \le t \le 1$; C_3: $R_3(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$.

$$W = \int_{C_1} F \cdot dR_1 + \int_{C_2} F \cdot dR_2 + \int_{C_3} F \cdot dR_3 = \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 (1+t)\,dt = \frac{1}{2}t^2\Big]_0^1 + \frac{1}{2}t^2\Big]_0^1 + t + \frac{1}{2}t^2\Big]_0^1 = 2\frac{1}{2}$$

EXERCÍCIOS 19.3 Integrais de Linha Independentes do Caminho

1. $F = \nabla\phi$ com $\phi(x,y) = xy$. $\int_C y\,dx + x\,dy = \phi(3,2) - \phi(1,4) = 6 - 4 = 2$.

3. $F = \nabla\phi$ com $\phi(x,y) = e^x\,\text{sen}\,y$. $\int_C e^x\text{sen}\,y\,dx + e^x\cos y\,dy = \phi(2, \frac{1}{2}\pi) - \phi(0,0) = e^2 - 0 = e^2$.

5. $F = \nabla\phi$ com $\phi(x,y) = x^2y^2 - xy^3 + 2y$. $\int_C F \cdot dR = \phi(1,2) - \phi(-3,-1) = 0 - 4 = -4$.

7. $F = \nabla\phi$ com $\phi(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 - xy + 3yz + \frac{1}{2}z^2$. $\int_C F \cdot dR = \phi(3,0,4) - \phi(-3,1,2) = 17 - 2 = 15$.

9. $F = \nabla\phi$ com $\phi(x,y,z) = ze^x + xe^y - ye^z$. $\int_C F \cdot dR = \phi(0,2,1) - \phi(1,0,2) = 1 - 2e - 2e - 1 = -4e$.

11. $F = \nabla\phi$ com $\phi(x,y,z) = x^2\cos y - 3x - yz^2 + 2z$. $\int_C F \cdot dR = \phi(1,\pi,0) - \phi(-1,0,3) = -4 - 10 = -14$.

Nos Exerc. 13 a 19 mostramos que a integral de linha é indep. do caminho, exibindo um potenc

13. $F(x,y) = 2(x-y)\mathbf{i} + 2(3y-x)\mathbf{j} = \nabla\phi$ com $\phi(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2$.

$$\int_C F \cdot dR = \phi(0,3) - \phi(3,0) = 27 - 9 = 18$$

15. $F(x,y) = (4xe^{2x} - 3e^xe^y)\mathbf{i} + (2e^{2y} - 3e^xe^y)\mathbf{j} = \nabla\phi$ com $\phi(x,y) = 2e^x - 3e^{xy} + e^{2y}$. O foco da parábola $y^2 = 4x$ está em $(1,0)$; logo, o extremo do *latus rectum* está em $(1,2)$.

$$\int_C F \cdot dR = \phi(1,2) - \phi(0,0) = (2e^2 - 3e^1e^2 + e^4) - (2 - 3 + 1) = 2e^2 - 3e^3 + e^4$$

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 3y^2\mathbf{j} + \mathbf{k} = \nabla\phi$ com $\phi(x, y, z) = x^2 + y^3 + z$.

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \phi(0, 0, 3) - \phi(\tfrac{3}{2}, 0, 0) = 3 - \tfrac{9}{4} = \tfrac{3}{4}$$

19. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2ye^{2x}\mathbf{i} + 2e^{x}\mathbf{j} + 3z^2\mathbf{k} = F\phi$ com $\phi(x, y, z) = ye^{2x} + z^3$.

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \phi(\ln 2, 2, 2) - \phi(\ln 2, 1, 1) = 8 + 8 - 4 - 1 = 11$$

Nos Exercícios 21-29 mostramos que a integral de linha é independente do caminho, exibindo um potencial para a função vetorial correspondente.

21. $\mathbf{F}(x, y) = (2y - x)\mathbf{i} + (y^2 + 2x)\mathbf{j} = \nabla\phi$ com $\phi(x, y) = 2xy - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}y^3$.

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \phi(1, 2) - \phi(0, -1) = \left(4 - \frac{1}{2} + \frac{8}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{13}{2}$$

23. $\mathbf{F}(x, y) = \operatorname{tg} y\,\mathbf{i} + x\sec^2 y\,\mathbf{j} = \nabla\phi$ com $\phi(x, y) = x \operatorname{tg} y$. $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \phi(4, \tfrac{1}{4}\pi) - \phi(-2, 0) = 4 - 0 = 4$.

25. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{2y}{(xy + 1)^2}\mathbf{i} + \dfrac{2x}{(xy + 1)^2} = \nabla\phi$ com $\phi(x, y) = \dfrac{-2}{xy + 1}$. $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \phi(1, 0) - \phi(0, 2) = -2 + 2 = 0$

27. $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k} = \nabla\phi$ com $\phi(x, y, z) = xy + xy + yz$.

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \phi(1, 1, 1) - \phi(0, 0, 0) = 3 - 0 = 3$$

29. $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^x \operatorname{sen} y + yz)\mathbf{i} + (e^x\cos y + z \operatorname{sen} y + xz)\mathbf{j} + (xy - \cos y)\mathbf{k} = \nabla\phi$ com

$\phi(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} y + xyz - z\cos y$. $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \phi(0, \pi, 3) - \phi(2, 0, 1) = 3 + 1 = 4$.

31. $\mathbf{F}(x, y, z) = (4x + 2y - z)\mathbf{i} + (2x - 2y + z)\mathbf{j} + (-x + y + 2z)\mathbf{k} = \nabla\phi$ com

$\phi(x, y, z) = 2x^2 + 2xy - xz - y^2 + yz + z^2$. $\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \phi(-1, 2, 0) - \phi(4, -2, 1) = -6 - 7 = -13$.

Nos Exercícios 33-37 W J é o trabalho realizado.

33. $\mathbf{F}(x, y) = 3(x + y)^2\mathbf{i} + 3(x + y)^2\mathbf{j} = \nabla\phi$ com $\phi(x, y) = (x + y)^3$. $W = \phi(2, 4) - \phi(0, 0) = 216 - 0 = 216$.

35. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2y^2z^3\mathbf{i} + 4xyz^3\mathbf{j} + 6xy^2z^2\mathbf{k} = \nabla\phi$ com $\phi(x, y, z) = 2xy^2z^3$.

$$W = \phi(2, 4, 8) - \phi(1, 1, 1) = 32.768 - 2 = 32.766$$

37. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{k(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$.

(a) $\mathbf{F} = \nabla\phi$ com $\phi(x, y, z) = \dfrac{-k}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$. $W = \phi(3, 0, 4) - \phi(3, 0, 0) = -\dfrac{k}{5} + \dfrac{k}{3} = \dfrac{2}{15}k$.

(b) Com z como parâmetro, C: $x = 3$, $y = 4$, $0 \le z \le 4$.

$$W = k\int_0^4 \left\langle \frac{3}{(9 + z^2)^{3/2}}, 0, \frac{z}{(9 + z^2)^{3/2}} \right\rangle \cdot \langle 0, 0, 1\rangle dz = k\int_0^4 z(9 + z^2)^{-3/2}dz = -k(9 + z^2)^{-1/2}\Big]_0^4 = \frac{2}{15}k$$

EXERCÍCIOS 19.4 Teorema de Green

1. $\oint_C 4y\,dx + 3x\,dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(3x) - \frac{\partial}{\partial y}(4y)\right] dA = \iint_R -dA = -1.$ Além disso,

C_1: $R_1(t) t\mathbf{i}$, $0 \le t \le 1$; C_2: $R_2(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j}$, $0 \le t \le 1$; C_3: $R_3(t) = (1-t)\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $0 \le t \le 1$;

C_4: $R_4(t) = (1-t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 1$. $\oint 4y\,dx + 3x\,dy = \int_0^1 0\,dt + \int_0^1 3\,dt + \int_0^1 (-4)\,dt + \int_0^1 0\,dt = 3 - 4 = -1$

3. $\oint_C 2xy\,dx - x^2y\,dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(-x^2y) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy)\right] dA = \int_0^1\int_0^{1-x}(-2xy - 2x)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[-xy^2 - 2xy\right]_0^{1-x} dx$

$= \int_0^1 (-x^3 + 4x^2 - 3x)\,dx = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\Big]_0^1 = -\frac{1}{4} + 143 - \frac{3}{2} = -\frac{5}{12}.$ Além disso,

C_1: $R_1(t) = t\mathbf{i}$, $0 \le t \le 1$; C_2: $R_2(t) = (1-t)\mathbf{i} + t\mathbf{j}$, $0 \le t \le 1$; C_3: $R_3(t) = (1-t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 1$.

$\oint_C 2xy\,dx - x^2y\,dy = \int_0^1 0\,dt + \int_0^1 [2(1-t)t(-1) - (1-t)^2 t]\,dt + \int_0^1 0\,dt = \int_0^1 (-t^3 + t^2 - 3t)\,dt = -\frac{5}{12}$

5. $\oint_C x^2y\,dx - y^2x\,dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(-y^2x) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y)\right] dA = -\iint_R (x^2 + y^2)\,dA = -\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2(r\,dr\,d\theta) = -\int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\,d\theta = -\frac{\pi}{2}$

Além disso, C: $R(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$.

$\oint_C x^2y\,dx - y^2x\,dy = \int_0^{2\pi} [\cos^2 t \operatorname{sen} t(-\operatorname{sen} t) - \operatorname{sen}^2 t \cos t(\cos t)]\,dt = -2\int_0^{2\pi} \cos^2 t \operatorname{sen}^2 t\,dt$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 2t\,dt = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\cos 4t\right]_0^{2\pi} = -\frac{\pi}{2}$$

7. $\oint_C x^2y\,dx - y^2x\,dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(-y^2x) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y)\right] dA = -\int_0^2\int_{x^3/4}^{x}(y^2 + x^2)\,dy\,dx = -\int_0^2 \left[\frac{1}{3}y^3 + x^2y\right]_{x^3/4}^{x} dy$

$$= -\int_0^2 \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{192}x^9 - \frac{1}{4}x^5\right)dx = -\left[\frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{1.920}x^{10} - \frac{1}{24}x^6\right]_0^2 = -\frac{32}{15}.$$ Além disso,

C_1: $y = \frac{1}{4}x^3$, $0 \le x \le 2$; $-C_2$: $y = x$, $0 \le x \le 2$. $\oint_C x^2y\,dx - y^2x\,dy$

$= \int_0^2 \left[x^2\left(\frac{1}{4}x^3\right) - \left(\frac{1}{4}x^3\right)^2\left(\frac{3}{4}x^2\right)\right]dx - \int_0^2 (x^2x - x^2x)\,dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^5 - \frac{3}{64}x^9\right)dx = \frac{1}{24}t^6 - \frac{3}{640}t^{10}\Big]_0^2 = -\frac{32}{15}$

9. $\oint_C (x+y)\,dx + xy\,dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(xy) - \frac{\partial}{\partial y}(x+y)\right] dA = \int_0^2\int_0^{x^{3/4}}(y - 1)\,dy\,x = \int_0^2 \left[\frac{1}{2}y^2 - y\right]_0^{x^{3/4}} dx$

$$= \int_0^2 \left(\frac{1}{32}x^6 - \frac{1}{4}x^3\right)dx = \frac{1}{224}x^7 - \frac{1}{16}x^4\Big]_0^2 = \frac{4}{7} - 1 = -\frac{3}{7}$$

11. $\oint_C (-x^2 + x)\,dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(-x^2 + x) - \frac{\partial}{\partial y}(0)\right] dA = \int_0^1\int_{2y}^{2y^2}(-2x + 1)\,dx\,dy = \int_0^1 -x^2 + x\Big]_{2y}^{2y^2} dy$

$$= \int_0^1 (-4y^4 + 6y^2 - 2y)\,dy = -\frac{4}{5}y^5 + 2y^3 - y^2\Big]_0^1 = \frac{1}{5}$$

13. $\oint_C \cos y\,dx + \cos x\,dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(\cos x) - \frac{\partial}{\partial y}(\cos y)\right] dA = \int_0^{\pi/3}\int_0^{\pi/4}(-\text{sen}\,x + \text{sen}\,y)\,dy\,dx$

$= \int_0^{\pi/3}\left[-y\,\text{sen}\,x - \cos y\right]_0^{\pi/4} dx = \int_0^{\pi/3}\left(-\frac{\pi}{4}\text{sen}\,x - \frac{1}{2}\sqrt{2} + 1\right)dx = \left[\frac{\pi}{4}\cos x + \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)x\right]_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{24}(5 - 4\sqrt{2})$

15. $\oint(\text{sen}^4 x + e^{2x})\,dx + (\cos^3 y - e^y)\,dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(\cos^3 y - e^y) - \frac{\partial}{\partial y}(\text{sen}^4 x + e^{2x})\right] dA = \iint_R 0\,dA = 0$

17. A área da elipse $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ é $\pi(5)(2) = 10\pi$.

$\oint_C \frac{x^2 y}{x^2+1}dx - \text{tg}^{-1}x\,dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(-\text{tg}^{-1}x) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2 y}{x^2+1}\right)\right] dA = \iint_R \left(\frac{-1}{1+x^2} - \frac{x^2}{x^2+1}\right) dA = -\iint_R dA = -10\pi$

19. $\oint_C (e^x - x^2 y)\,dx + 3x^2 y\,dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(3x^2 y) - \frac{\partial}{\partial y}(e^x - x^2 y)\right] dA = \int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(6xy + x^2)\,dy\,dx =$

$= \int_0^1 \left[3xy^2 + x^2 y\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int(3x^3 + x^{5/2} - 3x^5 - x^4)\,dx = x^3 + \frac{2}{7}x^{7/2} - \frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{5}x^5\Big]_0^1 = \frac{41}{70}$

Nos Exercícios 21-25, $A = \frac{1}{2}\oint x\,dy - y\,dx$ pelo Teorema 19.4.2,

21. C_1: $R_1(t) = t\mathbf{i}$, $0 \le t \le 4$; C_2: $R_2(t) = (4-t)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$, $0 \le t \le 1$;

C_3: $R_3(t) = (3-2t)\mathbf{i} + (2-t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 1$; C_4: $R_4(t) = (1-t)\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 1$.

$A = \frac{1}{2}\int_0^4 0\,dt + \frac{1}{2}\int_0^1 [2(4-t) + 2t]\,dt + \frac{1}{2}\int_0^1 [-(3-2t) + 2(2-t)]\,dt + \frac{1}{2}\int_0^1 [-(1-t) + (1-t)]\,dt$

$= 0 + \frac{1}{2}\int_0^1 8\,dt + \frac{1}{2}\int_0^1 1\,dt + 0 = \frac{9}{2}$

23. C_1: $R_1 = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $0 \le t \le 1$; $-C_2$: $R_2(t) = t\mathbf{i} + t^{1/2}\mathbf{j}$, $0 \le t \le 1$.

$A = \frac{1}{2}\int_0^1 (2t^2 - t^2)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{2}t^{1/2} - t^{1/2}\right)dt = \frac{1}{2}\int_0^1\left(t^2 + \frac{1}{2}t^{1/2}\right)dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{3}t^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

25. $A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos^3 t(3a\,\text{sen}^2 t\cos t) + a\,\text{sen}^3 t(3a\cos^2 t\,\text{sen}\,t)]\,dt$

$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,\text{sen}^2 t(\cos^2 t + \text{sen}^2 t)\,dt = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\text{sen}^2 2t(1)\,dt = \frac{3a^2}{2}\cdot\frac{1}{8}\cdot 2\pi = \frac{3a^2\pi}{8}$

Nos Exercícios 27-29 devemos mostrar (a) $\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,ds = \iint_R \text{div}\,\mathbf{F}\,dA$ e (b) $\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_R \text{rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\,dA$.

27. $\mathbf{F}(x,y) = 3x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$, $\mathbf{R}(s) = \cos s\,\mathbf{i} + \text{sen}\,s\,\mathbf{j}$, $0 \le s \le 2\pi$

(a) $\mathbf{N}(s) = \cos s\,\mathbf{i} + \text{sen}\,s\,\mathbf{j}$. $\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}ds = \int_0^{2\pi}(3\cos s\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,s\,\mathbf{j})\cdot(\cos s\,\mathbf{i} + \text{sen}\,s\,\mathbf{j})\,ds$

$= \int_0^{2\pi}(3\cos^2 s + 2\,\text{sen}^2 s)\,ds = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos 2s + 5)\,ds = \frac{1}{2}(5)\,2\pi = 5\pi$ e $\iint_R \text{div}\,\mathbf{F}\,dA = \iint_R (3+2)\,dA = 5\pi$.

(b) $\mathbf{T}(s) = -\text{sen}\,s\,\mathbf{i} + \cos s\,\mathbf{j}$. $\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \int_0^{2\pi}(3\cos s\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,s\,\mathbf{j})\cdot(-\text{sen}\,s\,\mathbf{i} + \cos s\,\mathbf{j})\,ds$

$= \int_0^{2\pi}(-3\cos s\,\text{sen}\,s + 2\,\text{sen}\,s\cos s)\,ds = -\frac{1}{2}\text{sen}^2 s\Big]_0^{2\pi} = 0$ e $\iint_R \text{rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{k}dA = \iint_R 0\cdot\mathbf{k}\,dA = 0$.

29. $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$. $\mathbf{R}(s) = 5\cos t\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$. (a) Da equação 18.4.10,

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,ds = \oint_C -y^2dx + x^2dy = \int_0^{2\pi}[-(4\,\text{sen}^2 t)(-5\,\text{sen}\,t) + (25\cos^2 t)(2\cos t)]dt$$

$$= \int_0^{2\pi}(20\,\text{sen}^3 t + 50\cos^3 t)\,dt = 0 \text{ e } \iint_R \text{div}\,\mathbf{v}(x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j})\,dA = \iint_R (2x + 2y)\,dA = 0$$ (potências ímpares)

(b) Da equação 19.4.11

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \oint_C x^2dx + y^2dy = \int_0^{2\pi}[25\cos^2 t\,\frac{d}{dt}(\cos t) + 4\,\text{sen}^2 t\,\frac{d}{dt}(\text{sen}\,t)]dt = \frac{25}{3}\cos^3 t + \frac{4}{3}\text{sen}^3 t\Big]_0^{2\pi} = 0$$

$$\text{e } \iint_R \text{rot}\;\mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\,dA = \iint_R 0\cdot\mathbf{k}\,dA = 0$$

Nos Exercícios 31-33 w J são realizados.

31. A elipse $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ tem área $\pi(4)(2) = 8\pi$ cm^2.

$$W = \oint_C (3x + y)\,dx + (4x - 5y)\,dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(4x - 5y) - \frac{\partial}{\partial y}(3x + y)\right]dA = \iint_R 3\,dA = 3\cdot 8\pi = 24\pi$$

33. $$W = \oint_C (e^{x^2} + y^2)\,dx + (e^{y^2} + x^2)\,dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(e^{y^2} + x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(e^{x^2} + y^2)\right]dA = \int_0^2\int_0^{2-x}(2x - 2y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2\left[2xy - y^2\right]_0^{2-x}dx = \int_0^2[2x(2 - x) - (2 - x)^2]\,dx = \int_0^2(-3x^2 + 8x - 4)\,dx = -x^3 + 4x^2 - 4x\Big]_0^2 = 0$$

35. $\mathbf{F}(x, y) = (y^2 + 6x)\mathbf{i} + (2y - x^2)\mathbf{j}$. A elipse $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$ tem área $\pi(2)(1) = 2\pi$ cm^2.

Do teorema da divergência de Gauss o número de cm^3/s no fluxo do fluido é

$$\text{flux} = \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,ds = \iint_R \text{div}\,\mathbf{F}\,dA = \iint_R (6 + 2)\,dA = 8\cdot 2\pi = 16\pi$$

37. $\mathbf{F}(x, y) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j}$. O número de cm^2/s no fluxo do fluido é

$$\text{flux} = \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,ds = \iint_R \text{div}\,\mathbf{F}\,dA = \iint_R (3x^2 + 3y^2)\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 3r^2(r\,dr\,d\theta) = \int_0^{2\pi}\frac{3}{4}r^4\Big]_0^1 d\theta = \frac{3}{4}\cdot 2\pi = \frac{3}{2}\pi$$

39. $\mathbf{F}(x, y) = 4y\mathbf{i} + 6x\mathbf{j}$. rot $\mathbf{F} = (6 - 4)\mathbf{k} = 2\mathbf{k}$. $\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_R \text{rot}\;\mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\,dA = \iint_R 2\,dA > 0$. Logo, (i).

41. $\mathbf{F}(x, y) = \text{sen}^2 x\,\mathbf{i} + \cos^2 y\,\mathbf{j}$. rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. $\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = 0$. Logo, (iii).

43. $\oint_C N(x, y)\,dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x}\,dA$ é o teorema de Green com $M(x, y) = 0$.

EXERCÍCIOS 19.5 Integrais de Superfícies

1. $f(x,y) = z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $f_x(x,y) = \dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$, $f_y(x,y) = \dfrac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$. A circunf. D tem 4π de área,

$$\iint_S z\, d\sigma = \iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\sqrt{\frac{x^2}{4 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{4 - x^2 - y^2} + 1}\, dA = \iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\sqrt{\frac{4}{4 - x^2 - y^2}}\, dA = 2\iint_D dA = 8\pi$$

3. $f(x,y) = z = 2 - x - y$. $f_x(x,y) = -1$, $f_y(x,y) = -1$.

$$\iint_S (x + 2y - z)\, d\sigma = \iint_D (2x + 3y - 2)\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1}\, dA = \sqrt{3}\int_0^2\int_0^{2-x}(2x + 3y - 2)\, dy\, dx$$

$$= \sqrt{3}\int_0^2\left[(2x - 2)y + \frac{3}{2}y^2\right]_0^{2-x} dx = \sqrt{3}\int_0^2\left[(2x - 2)(2 - x) + \frac{3}{2}(2 - x)^2\right]dx$$

$$= \sqrt{3}\int_0^2\left[-2x^2 + 6x - 4 + \frac{3}{2}(2 - x)^2\right]dx = \sqrt{3}\left[-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 4x - \frac{1}{3}(2 - x)^3\right]_0^2 = \frac{8}{3}\sqrt{3}$$

5. $f(x,y) = z = 6 - 2x - 3y$. $f_x(x,y) = -2$, $f_y(x,y) = -3$.

$$\iint_S xyz\, d\sigma = \iint_D xy(6 - 2x - 3y)\sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 1}\, dA = \sqrt{14}\int_0^3\int_0^{(6-2x)/3} x[(6 - 2x)y - 3y^2]\, dy\, dx$$

$$= \sqrt{14}\int_0^3 x\left[\frac{1}{2}(6 - 2x)y^2 - y^3\right]_0^{(6-2x)/3} dx = \frac{1}{54}\sqrt{14}\int_0^3 x(6 - 2x)^3 dx$$

$$= \frac{1}{54}\sqrt{14}\left[-\frac{1}{8}x(6 - 2x)^4 - \frac{1}{80}(6 - 2x)^5\right]_0^3 = \frac{1}{54}\sqrt{14}\frac{6^5}{80} = \frac{9}{5}\sqrt{14}$$

7. $f(x,y) = z = x^2$. $f_x(x,y) = 2x$, $f_y(x,y) = 0$.

$$\iint_S x\, d\sigma = \int_D x\sqrt{4x^2 + 1}\, dA = \int_0^1\int_0^2 x\sqrt{4x^2 + 2}\, dy\, dx = \frac{1}{4}\int_0^1 8x\sqrt{4x^2 + 1}\, dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(4x^2 + 1)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{1}{6}(5\sqrt{5} - 1)$$

9. $f(x,y) = z = \sqrt{x^2 + y^2}$. $f_x(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $f_y(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

$$\iint_S z^2 d\sigma = \iint_D (x^2 + y^2)\sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1}\, dA = \sqrt{2}\iint_D (x^2 + y^2)\, dA = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_1^2 r^2(r\, dr\, d\theta)$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}r^4\Big]_1^2 = \frac{1}{4}\sqrt{2}\int_0^{2\pi} 15\, d\theta = \frac{15}{2}\sqrt{2}\pi$$

11. $f(x,y) = z = 2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y$. $f_x(x,y) = -\frac{2}{3}$ $f_y(x,y) = -\frac{1}{2}$.

$$\iint_S (x + y)\, d\sigma = \iint_D (x + y)\sqrt{\tfrac{4}{9} + \tfrac{1}{4} + 1}\, dA = \frac{1}{6}\sqrt{61}\int_0^3\int_0^{4-4x/3}(x + y)\, dy\, dx = \frac{1}{6}\sqrt{61}\int_0^3 \frac{1}{2}(x + y)^2\Big]_0^{4-4x/3}$$

$$= \frac{1}{12}\sqrt{61}\int_0^3\left[\left(4 - \frac{x}{3}\right)^2 - x^2\right]dx = \frac{1}{12}\sqrt{61}\left[-\left(4 - \frac{x}{3}\right)^3 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = \frac{1}{12}\sqrt{61}(-27 - 9 + 64) = \frac{7}{3}\sqrt{61}$$

13. $f(x, y) = z = \sqrt{4 - x^2}$, $f_x(x, y) = \dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$, $f_y(x, y) = 0$

$$\iint_S xyz\, d\sigma = \iint_D xy\sqrt{4 - x^2}\sqrt{\frac{x^2}{4 - x^2} + 1}\, dA = \int_1^3\int_{-2}^{2} 2xy\, dx\, dy = \int_1^3 x^2y\Big]_{-2}^{2} dy = 0$$

15. $f(x, y) = z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $f_x(x, y) = \dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$, $f_y(x, y) = \dfrac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$. Se M kg for a massa

$$M = \iint_S k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, d\sigma = \iint_D 2k\sqrt{\frac{x^2}{4 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{4 - x^2 - y^2} + 1}\, dA = 4k\iint_D \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\, dA$$

$$= 4k\int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{1}{r}(r\, dr\, d\theta) = 4k\int_0^{2\pi} 2\, d\theta = 4k(2)2\pi = 16\pi k$$

17. $f(x, y) = z = 9 - x^2 - y^2$, $f_x(x, y) = -2x$, $f_y(x, y) = -2y$. $d\sigma = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dA$. D é uma circunf. de raio 3. Se M kg for a massa $M = \iint_S d\sigma/\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} = \iint_D dA = 9\pi$.

19. $f(x, y) = z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $f_x(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $f_y(x, y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Se M kg for a massa

$$M = \iint_S y^2z^2 d\sigma = \iint_D y^2(x^2 + y^2)\sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1}\, dA = \sqrt{2}\iint_D y^2(x^2 + y^2)\, dA$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_2^3 r^2 \operatorname{sen}^2\theta(r^2)\, r\, dr\, d\theta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{6}r^6\Big]_2^3 \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta = \frac{665}{6}\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)\, d\theta = \frac{665}{6}\sqrt{2}\pi$$

21. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. $f(x, y) = z = 6 - 3x - 2y$. $f_x = -3$, $f_y = -2$. D é um triângulo de área 3.

Pela equação (9), $\text{flux} = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, ds = \iint_D [-x(-3) - y(-2) + (6 - 3x - 2y)]\, dA = \iint 6\, dA = 18$.

23. $\mathbf{F} = -2y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$. $f(x, y) = z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$. $f_x = \dfrac{-x}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} = -\dfrac{x}{z}$, $f_y = \dfrac{-y}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} = -\dfrac{y}{z}$

Pela equação (9), $\text{flux} = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, d\sigma = \iint_D \left[(2y)\left(-\frac{x}{z}\right) + (-2x)\left(-\frac{y}{z}\right) + 5\right] dA = 5\iint dA = 5\pi(3)^2 = 45\pi$.

25. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$. Tome os lados do cubo na ordem $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$.

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, d\sigma = \int_0^1\int_0^1 (2z\mathbf{k})\cdot(-\mathbf{i})\, dy\, dz + \int_0^1\int_0^1 (\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k})\cdot\mathbf{i}\, dy\, dz + \int_0^1\int_0^1 (x^2\mathbf{i} + 2z\mathbf{k})\cdot(-\mathbf{j})\, dx\, dz$$

$$+ \int_0^1\int_0^1 (x^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2z\mathbf{k})\cdot\mathbf{j}\, dx\, dz + \int_0^1\int_0^1 (x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j})\cdot(-\mathbf{k})\, dx\, dy + \int_0^1\int_0^1 (x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + 2\mathbf{k})\cdot\mathbf{k}\, dx\, dy$$

$$= 0 + \int_0^1\int_0^1 dy\, dz + 0 + \int_0^1\int_0^1 x\, dx\, dz + 0 + \int_0^1\int_0^1 2\, dx\, dy = 1 + \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{2}$$

EXERCÍCIOS 19.6 Teorema da Divergência de Gauss e Teorema de Stokes

1. $\mathbf{F} = 2z\mathbf{k}$. $\operatorname{div} \mathbf{F} = 2$. E é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. $\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = 2\iiint_E dV = 2\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \frac{8}{3}\pi$.

   No hemisfério superior, pela equação 18.5.9, $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, d\sigma = \iint_D (0 + 0 + 2z)\, dA$

   $= 2\iint_D (1 - x^2 - y^2)^{1/2} dA = 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 - r^2)^{1/2} r\, dr\, d\theta = 2\int_0^{2\pi} -\frac{1}{3}(1 - r^2)^{3/2}\Big]_0^1 d\theta = \frac{2}{3}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4}{3}\pi$

   No hemisfério inferior, os sinais de z e $\mathbf{N}$ são invertidos, de modo que a integral seja a mesma. Logo, o fluxo total é $8/3\ \pi$ e o teorema da divergência de Gauss está verificado.

3. $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j}$. $\operatorname{div} \mathbf{F} = y + 0 + y = 2y$. E é o cubo $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$.

   $\iiint_E \operatorname{dif} F\, dV = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 2y\, dy\, dx\, dz = \int_0^1 2y\, dy = y^2\Big]_0^1 = 1$. De outro modo,

   $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, d\sigma = \int_0^1\int_0^1 (yz\mathbf{j})\cdot(-\mathbf{i})\, dy\, dz + \int_0^1\int_0^1 (y\mathbf{i} + yz\mathbf{j})\cdot\mathbf{i}\, dy\, dz + 0 + \int_0^1\int_0^1 (x\mathbf{i} + z\mathbf{j})\cdot\mathbf{j}\, dx\, dz$

   $+ \int_0^1\int_0^1 (xy\mathbf{i})\cdot(-\mathbf{k})\, dx\, dy + \int_0^1\int_0^1 (xy\mathbf{i} + y\mathbf{j})\cdot\mathbf{k}\, dx\, dy$

   $= 0 + \int_0^1\int_0^1 y\, dy + 0 + \int_0^1\int_0^1 z\, dx\, dz + 0 + 0 = \frac{1}{2}y^2\Big]_0^1 + \frac{1}{2}z^2\Big]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. $\operatorname{div} \mathbf{F} = 1 + 1 + 1 = 3$. E é um tetraedro de volume igual a $\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 3\cdot 6 = 6$.

   $\text{Flux} = \iiint_E 3\, dV = 3\cdot 6 = 18$

7. $\operatorname{div}(x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}) = 2x + x + 2 = 3x + 2$. $\text{Flux} = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (3x + 2)\, dx\, dy\, dz = \int_0^1\int_0^1 \frac{7}{2}\, dy\, dz = \frac{7}{2}$.

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2yz\mathbf{i} + xy^2z\mathbf{j} + xyz^2\mathbf{k}$. $\operatorname{div} \mathbf{F} = 2xyz + 2xyz + 2xyz = 6xyz$. E é o paralelepípedo retangular $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le 3$.

   $\text{Flux} = \iiint_E 6xyz\, dV = 6\int_0^1 x\, dx\int_0^2 y\, dy\int_0^3 z\, dz = 6\cdot\frac{1}{2}x^2\Big]_0^1\cdot\frac{1}{2}y^2\Big]_0^2\cdot\frac{1}{2}z^2\Big]_0^3 = 6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{9}{2} = 27$

11. $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, d\sigma = \iiint_E \operatorname{div}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})\, dV = \iiint_E 3\, dV = 3\cdot\frac{4}{3}\pi(2)^2 = 32\pi$

13. $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, d\sigma = \iiint_E \operatorname{div}(x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k})\, dV = \iiint_E 2(x + y + z)\, dV$

    $= 2\int_0^3\int_0^4\int_0^{2\pi} (r\cos\theta + r\operatorname{sen}\theta + z)\, r\, d\theta\, dz\, dr = 2\int_0^3\int_0^4 \Big[r\operatorname{sen}\theta - r\cos\theta + z\theta\Big]_0^{2\pi} r\, dz\, dr$

    $= 4\pi\int_0^3\int_0^4 zr\, dz\, dr = 4\pi\int_0^3 8r\, dr = 4\pi(8)\frac{9}{2} = 144\pi$

15. $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,d\sigma = \iiint_E \mathrm{div}(2x\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + 3z\mathbf{k})\,dV = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y}(5+2z)\,dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{1-x}\Big[5z + z^2\Big]_0^{1-x-y}$

$= \int_0^1\int_0^{1-x}[5(1-x-y) + (1-x-y)^2]\,dx = \int_0^1\Big[-\frac{5}{2}(1-x-y)^2 - \frac{1}{3}(1-x-y)^3\Big]_0^{1-x}dx$

$= \int_0^1\Big[\frac{5}{2}(1-x)^2 + \frac{1}{3}(1-x)^3\Big]dx = -\frac{5}{6}(1-x)^3 - \frac{1}{12}(1-x)^4\Big]_0^1 = \frac{5}{6} + \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$

Nos Exercícios 17-21 devemos mostrar que $\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_S \mathrm{rot}\ \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,d\sigma$.

17. $\mathbf{F}(x,y,z) = y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$, S é $x^2+y^2+z^2 =$, $z \geq 0$. $\mathbf{R} = \cos t\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \oint_C y^2dx + x^2dy + z^2dz = \int_0^{2\pi}[(\mathrm{sen}^2t)(-\mathrm{sen}\,t) + (\cos^2t)(\cos t) + 0]\,dt = 0$ (ímpar)

$\iint_S \mathrm{rot}\ \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,d\sigma = \iint(2x-2y)\mathbf{k}\cdot\mathbf{N}\,d\sigma = \iint 2x\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{N}\,d\sigma - \iint 2y\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{N}\,d\sigma = 0$ (simetria)

19. $\mathbf{F}(x,y,z) = y^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$. $\mathbf{R}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \oint_C y^2dx + x\,dy + z^2dz = \int_0^{2\pi}[\mathrm{sen}^2t(-\mathrm{sen}\,t) + \cos t(\cos t)]\,dt = \int_0^{2\pi}(-\mathrm{sen}^3t + \cos^2t)\,dt$

$= \int_0^{2\pi}(-\mathrm{sen}^3t + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2t)\,dt = 0 + \pi + 0 = \pi$. Também, da equação 19.5.9

$\iint_S \mathrm{rot}\ \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,d\sigma = \iint_S(1-2y)\mathbf{k}\cdot\mathbf{N}\,d\sigma = \iint_D(-2y)\,dA = \int_0^1\int_0^{2\pi}(1 - 2r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,r\,d\theta\,dr = \int_0^1(2\pi)\,r\,dr = \pi$

21. $\mathbf{F}(x,y,z) = -3y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. $\mathbf{R}(t) = 3\cos t\,\mathbf{i} + 3\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \oint_C -3y\,dx + 3x\,dy + 2\,dz = \int_0^{2\pi}[-3(3\,\mathrm{sen}\,t)(-3\,\mathrm{sen}\,t) + 3(3\cos t)(3\cos t) + 2\cdot 0]\,dt$

$= \int_0^{2\pi}27\,dt = 54\pi$. Além disso, $\iint_S \mathrm{rot}\ \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,d\sigma = \iint_S 6\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}\,d\sigma = 6\iint_S d\sigma = 6(9\pi) = 54\pi$

23. $\mathrm{rot}\,(4y\mathbf{i} - 3z\mathbf{j} + x\mathbf{k}) = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$. $\mathbf{N} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$. O triângulo eqüilátero tem área igual a $\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$.

$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_S \mathrm{rot}\ \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,d\sigma = \frac{1}{3}\sqrt{3}\iint_S(3-1-4)\,d\sigma = \frac{1}{3}\sqrt{3}(-2)\Big(\frac{1}{2}\sqrt{3}\Big) = -1$

25. $\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_S \mathrm{rot}\,(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k})\cdot\mathbf{N}\,d\sigma = \iint_S 2\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}\,d\sigma = 2\iint_S d\sigma = 2(4\pi) = 8\pi$

27. $P = (1,0,0)$, $Q = (0,1,0)$, $R = (0,0,2)$. C é o triângulo PQR.

$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_S \mathrm{rot}\,[2y + \mathrm{sen}^{-1}x)\mathbf{i} + e^y\mathbf{j} + (x + \ln(z^2+4))\mathbf{k}]\cdot\mathbf{N}\,d\sigma = \iint_S(-\mathbf{j} - 2\mathbf{k})\cdot\mathbf{N}\,d\sigma$

$= \iint_{OPR} -1\,dA + \iint_{OPQ} -2\,dA = (-1)1 + (-2)\tfrac{1}{2} = -2$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 19

1. (a) $F(x, y) = \nabla(2x^2y + 3xy^3) = (4xy + 3y^3)\,i + (2x^2 + 9xy^2)\,j$

   (b) $F(x, y, z) = \nabla(xe^y - yze^y) = e^y i + (xe^y - yze^y - ze^y)\,j - ye^y k$

3. $F(x, y) = \dfrac{2y^2}{1 + 4x^2y^4}\,i + \dfrac{4xy}{1 + 4x^2y^4}\,j$ é conservativo pois $F = \nabla\phi$ com $\phi(x, y) = \operatorname{tg}^{-1} 2xy^2 + C$.

5. $F(x, y, z) = z^2\sec^2 x\,i + 2ye^{3z}\,j + (3y^2 + 2z\operatorname{tg} x)\,k$ é conservativo pois $F = \nabla\phi$ com $\phi(x, y, z) = z^2\operatorname{tg} x + y^2e^{3z} + C$.

7. $F(x, y, z) = e^{yz}i + e^{xz}j + e^{xy}k$. $\operatorname{div} F = \dfrac{\partial}{\partial x}(e^{yz}) + \dfrac{\partial}{\partial y}(e^{xz}) + \dfrac{\partial}{\partial z}(e^{xy}) = 0$.

   $\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ e^{yz} & e^{xz} & e^{xy} \end{vmatrix} = (xe^{xy} - xe^{xz})\,i + (ye^{yz} - ye^{xy})\,j + (ze^{xz} - ze^{yz})\,k$

9. $F(x, y) = \dfrac{1}{y}\,i - \dfrac{2x}{y}\,j$. $\operatorname{rot} F = \left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{2x}{y}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{y}\right)\right]k = \left[-\dfrac{2}{y} + \dfrac{1}{y^2}\right]k$. $\operatorname{div} F = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{2x}{y}\right) = \dfrac{2x}{y^2}$

11. $F(x, y) = 3y\,i - 4x\,j$; $R(t) = 2t^2 i - t\,j$. $\displaystyle\int_C F\cdot dR = \int_0^1 \langle 3(-t), -4(2t^2)\rangle\cdot\langle 4t, -1\rangle dt = \int_0^1 -4t^2 dt = -\frac{4}{3}$.

13. $R(t) = 4\operatorname{sen} t\,i - \cos t\,j$, $0 \le t \le \frac{1}{2}\pi$. $\displaystyle\int_C (2x + 3y)\,dx + xy\,dy$

   $\displaystyle = \int_0^{\pi/2} [2(4\operatorname{sen} t) + 3(-\cos t)]\,4\cos t\,dt + (4\operatorname{sen} t)(-\cos t)(\operatorname{sen} t\,dt)$

   $\displaystyle = \int_0^{\pi/2} (32\operatorname{sen} t\cos t - 12\cos^2 t - 4\operatorname{sen}^2 t\cos t)\,dt = 16\operatorname{sen}^2 t - 12\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t\right) - \frac{4}{3}\operatorname{sen}^3 t\Big]_0^{\pi/2}$

   $= 16 - 3\pi - \dfrac{4}{3} = \dfrac{44}{3} - 3\pi$

15. $R(t) = (t - 1)\,i + (t + 1)\,j + t^2 k$, $0 \le t \le 1$. $\displaystyle\int_C y^2dx + z^2dy + x^2dz$

   $\displaystyle = \int_0^1 [(t + 1)^2 + (t^2)^2 + (t - 1)^2\cdot 2t]\,dt = \int_0^1 (t^4 + 2t^3 - 3t^2 + 4t + 1)\,dt = \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{2}t^4 - t^3 + 2t^2 + t\Big]_0^1 = \frac{27}{10}$

17. $F(x, y, z) = 3xy\,i + (4y^2 - xz)\,j + 6z\,k$; $R(t) = t\,i + t^2 j + t^3 k$, $0 \le t \le 1$.

   $\displaystyle\int_C F\cdot dR = \int_0^1 \langle 3t(t^2), 4t^4 - t^4, 6t^3\rangle\cdot\langle 1, 2t, 3t^2\rangle dt = \int_0^1 (3t^3 + 24t^5)\,dt = \frac{3}{4}t^4 + 4t^6\Big]_0^1 = \frac{19}{4}$

Nos Exercícios de 19 a 25 a integral de linha é independente do caminho pois $F = \nabla\phi$.

19. $F(x, y) = 2xe^y i + x^2e^y j = \nabla\phi$ com $\phi(x, y) = x^2e^y$. $\displaystyle\int_C F\cdot dR = \phi(3, 2) - \phi(1, 0) = 9e^2 - 1$.

21. $F(x, y) = (\cos y - y\cos x)\,i - (\operatorname{sen} x + x\operatorname{sen} y)\,j = \nabla\phi$ com $\phi(x, y) = x\cos y - y\operatorname{sen} x$.

   $$\int_C F\cdot dR = \phi(\pi, 0) - \phi(0, \tfrac{1}{2}\pi) = \pi$$

23. $F(x, y, z) = 3y\,i + (3x + 4y)\,dy\,j - 2z\,k = \nabla\phi$ com $\phi(x, y, z) = 3xy + 2y^2 - z^2$.

   $$\int_C F\cdot dR = \phi(1, 2, 0) - \phi(0, 1, -1) = 14 - 1 = 13$$

25. $F(x, y, z) = \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{2z}{x^2}\right)i - \left(\dfrac{1}{z} + \dfrac{x}{y^2}\right)j + \left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{y}{z^2}\right)k = \nabla\phi$ com $\phi(x, y, z) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{2z}{x} - \dfrac{y}{z}$.

   $$\int_C F\cdot dR = \phi(4, 2, -2) - \phi(2, -1, 1) = (2 - 1 + 1) - (-2 + 1 - 1) = 4$$

27. A elipse $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ tem área igual a $\pi(3)(4) = 12\pi$.

$$\oint_C (3x + 2y)\,dx + (3x + y^2)\,dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(3x + y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(3x + 2y)\right] dA = \iint_R dA = 12\pi$$

29. $\oint_C e^x \operatorname{sen} y\,dx + e^x \cos y\,dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) - \frac{\partial}{\partial y}(e^x \operatorname{sen} y)\right] dA = \iint_R (e^x \cos y - e^x \cos y)\,dA = 0$

31. $x^2 = x + 2$ resulta $x = -1, 2$. C_1: $y = x^2$, $-C_2$: $y = x + 2$, $-1 \le x \le 2$. Pelo Teorema 19.4.2,

$$A = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} x(2x\,dx) - x^2 dx - \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} x\,dx - (x + 2)\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2 + 2)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 + 2x\right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$$

33. $F(x, y) = 2x^2 y\mathbf{i} + (x^2 + 3y)\mathbf{j}$; $y = 3x^2 + 2x + 4$, $0 \le x \le 1$. Se W J de trabalho for realizado

$$W = \int_C F \cdot dR = \int_0^1 \langle 2x^2(3x^3 + 2x + 4), x^2 + 3(3x^2 + 2x + 4)\rangle \cdot \langle 1, 6x + 2\rangle dx$$

$$= \int_0^1 (6x^4 + 64x^3 + 64x^2 + 84x + 24)\,dx = \frac{6}{5}t^5 + 16t^4 + \frac{64}{3}t^3 + 42t^2 + 24t\Big]_0^1 = \frac{1568}{15}$$

35. $F(x, y, z) = (xy - z)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. $R(t) = 4t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$.

$$W = \int_C F \cdot dR = \int_0^1 \langle 4t^2 - 2t, t, 2t\rangle \cdot \langle 4, 1, 2\rangle dt = \int_0^1 (16t^2 - 3t)\,dt = \frac{16}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^3\Big]_0^1 = \frac{23}{6}$$

37. $F(x, y) = 4y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j}$. C: $R(t) = \cos^3 t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}^3 t\,\mathbf{j}$.

(a) $\oint_C F \cdot N\,ds = \oint_C -3x\,dx + 4y\,dy = \int_0^{2\pi} [-3\cos^3 t\,\frac{d}{dt}(\cos^3 t) + \operatorname{sen}^3 t\,\frac{d}{dt}(\operatorname{sen}^3 t)]\,dt$

$$= -\frac{3}{2}(\cos^3 t)^2 + 2(\operatorname{sen}^3 t)^2\Big]_0^{2\pi} = 0 \quad \text{e} \quad \iint_R \operatorname{div} F\,dA = \iint_R 0\,dA = 0$$

(b) $\int_C F \cdot T\,ds = \oint_C 4y\,dx + 3x\,dy = \int_0^{2\pi} [4\operatorname{sen}^3 t(-3\cos^2 t \operatorname{sen} t) + 3\cos^3 t(3\operatorname{sen}^2 t \cos t)]\,dt$

$$= \int_0^{2\pi} 3\operatorname{sen}^2 t \cos^2 t(3\cos^2 t - 4\operatorname{sen}^2 t)\,dt = \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 2t(7\cos 2t - 1)\,dt$$

$$= \frac{21}{8}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 2t \cos 2t\,dt - \frac{3}{16}\int_0^{2\pi}(1 - \cos 4t)\,dt = 0 - \frac{3}{16}\cdot 2\pi = -\frac{3}{8}\pi.$$ Também, pelo

Exercício 18.9.25 com $a = 1$, R tem $\frac{3}{8}\pi$ de área $\iint_R \operatorname{rot} F \cdot \mathbf{k}\,dA = \iint_R (-\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}\,dA = -\iint_R dA = -\frac{3}{8}\pi$.

39. $W = \int_C F \cdot dR = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + e^y) - \frac{\partial}{\partial y}(xy^2 + \cos x)\right] dA = \iint_R (2x - 2xy)\,dA = 0$ (função ímpar de x)

41. $F = (4x - 3y)\mathbf{i} + (5y - 4x^2)\mathbf{j}$. O triângulo $(0, 1)$, $(0, 4)$, $(4, 4)$ tem área $\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4 = 6$. Pelo teorema da divergência, o número de cm^2/s no fluxo é

$$\iint_S F \cdot N\,d\sigma = \iint_R \operatorname{div} F\,dA = \iint_R (4 + 5)\,dA = 9 \cdot 6 = 54$$

43. $F(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{j} = \nabla\phi$ com $\phi(x, y) = -\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}$ ($\phi(x, y) = \operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{y}$ não está definida no eixo x). $\int_C F \cdot dR = \phi(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) - \phi(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \frac{1}{4}\pi - (-\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\pi$.

45. $f(x, y) = z = 3x + 2y$. $f_x(x, y) = 3$, $f_y(x, y) = 2$. O triângulo D tem como lado $3x + 2y = 6$.

$$\iint_S xy\, d\sigma = \iint_D xy\sqrt{2^2 + 3^2 + 1}\, dA = \sqrt{14}\int_0^2\int_0^{(6-3x)/2} xy\, dy\, dx = \sqrt{14}\int_0^2 \frac{1}{2}xy^2\Big]_0^{(6-3x)/2} dx$$

$$= \frac{1}{8}\sqrt{14}\int_0^2 x(6 - 3x)^2 dx = \frac{1}{8}\sqrt{14}\left[-\frac{1}{9}x(6 - 3x)^3 - \frac{1}{108}(6 - 3x)^4\right]_0^2 = \frac{1}{8}\sqrt{14}\cdot\frac{6^4}{108} = \frac{3}{2}\sqrt{14}$$

47. $f(x, y) = z = 9 - x^2$. $f_x(x, y) = -2x$, $f_y(x, y) = 0$.

$$\iint_S x\, d\sigma = \iint_E x\sqrt{4x^2 + 1}\, dA = \frac{1}{8}\int_0^2\int_0^3 8x(4x^2 + 1)^{1/2} dx\, dy = \frac{1}{8}\int_0^2 \frac{2}{3}(4x^2 + 1)^{3/2}\Big]_0^3 dy$$

$$= \frac{1}{12}\int_0^2 [(37)^{3/2} - 1]dy = \frac{1}{6}[(37)^{3/2} - 1]$$

49. $\rho(x, y, z) = kz^2$. $f(x, y) = z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $f_x = \dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$, $f_y = \dfrac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$. A massa é M kg.

$$M = \iint_S \rho(x, y, z)\, d\sigma = \iint_E k(4 - x^2 - y^2)\sqrt{\frac{x^2}{4 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{4 - x^2 - y^2} + 1}\, dA = 2k\iint_E \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dA$$

$$= 2k\int_0^{\pi/2}\int_0^2 r\cdot r\, dr\, d\theta = 2k\int_0^{\pi/2} \frac{8}{3} d\theta = 2k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{8}{3} = \frac{8}{3}k\pi$$

51. $f(x, y) = z = \sqrt{x^2 + y^2}$. $f_x(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $f_y(x, y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. $d\sigma = \sqrt{\dfrac{x^2}{x^2 + y^2} + \dfrac{y^2}{x^2 + y^2} + 1}\, dA = \sqrt{2}\, dA$

D é um anel de raios 1 e 4. $\rho(x, y, z) = (10 - z)\,kg/m^2$. M kg é a massa do funil.

$$M = \iint_S (10 - z)\, d\sigma = \iint_D [10 - \sqrt{x^2 + y^2}]\sqrt{2}\, dA = \int_0^{2\pi}\int_1^4 (10 - r)r\, dr\, d\theta = \sqrt{2}\theta\Big]_0^{2\pi}\left[5r^2 - \frac{1}{3}r^3\right]_1^4 = 108\sqrt{2}\pi$$

53. $F(x, y, z) = 2xi + 2yj + 3zk$. $f(x, y) = z = 4 - x^2 - y^2$. $f_x(x, y) = -2x$, $f_y(x, y) = -2y$. D é $x^2 + y^2 \leq 4$

$$\text{fluxo} = \iint_S F\cdot N\, d\sigma = \iint_D [(-2x)(-2x) + (-2y)(-2y) + 3(4 - x^2 - y^2)]dA = \iint_D (x^2 + y^2 + 12)\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (r^2 + 12)r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^2 (r^3 + 12r)\, dr = \theta\Big]_0^{2\pi}\left[\frac{1}{4}r^4 + 6r^2\right]_0^2 = 2\pi\cdot 28 = 56\pi$$

55. $F(x, y, z) = 2xi + yj + 2zk$. $\iint F\cdot N\, d\sigma = \iiint_E \text{div } F\, dV = \iiint_E 5\, dV = 5(16\pi)(2) = 160\pi$.

57. C: $R(t) = 3\cos t\, i + 3\,\text{sen}\, t\, j$, $0 \leq t \leq 2\pi$. $F = zi + 4xj + 2zk = 12\cos t\, j$. Pela equação 19.4.11

$\oint_C F\cdot T\, ds = \int_0^{2\pi} [0 + (12\cos t)(3\cos t)]dt = 36\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = 36\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi = 36\pi$. Além disso,

rot $F = 1j + 4k$, $f(x, y) = z = 9 - x^2 - y^2$. Da equação 19.5.9,

$$\iint_S \text{rot } F\cdot N\, d\sigma = \iint_D (0 - 1\cdot 2y + 4)\, dA = \iint_D 4\, dA = 4(9\pi) = 36\pi$$

59. S é $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 1$. $\oint F\cdot T\, ds = \iint_S \text{rot } [(z + \ln(x^2 + 1))i + (\cos y - x^2)j + (3y^2 - e^z)k]\cdot N\, d\sigma$

$$= \iint_S (6yi - j - 2xk)\cdot k\, dA = \iint_S -2x\, dA = 0 \text{ pois } x \text{ é ímpar.}$$

EXERCÍCICS 20.2 Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem

1. $y = ct^2 + 1$

3. $y = ct + e^t$

5. $y = \frac{1}{c_1 t} + \frac{c_2 t}{2}$

7. $y = c \operatorname{sen} t + e^t$

9. $y = \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t + c_1\right) \frac{1}{\cos t}$

EXERCÍCIOS 20.3 Equações Diferenciais de Primeira Ordem com Variáveis Separáveis

1. $4x^3 + 3(y - 1)^4 = c$

3. $\frac{x + 1}{y^2} = ce^y$

5. $\left[\frac{1 + y}{1 - y}\right]^{1/2} = c\left[\frac{1 - t}{1 + t}\right]^{1/2}$

7. $t^2 - t^2y^2 = k$

9. $(3 - t)(2 + y) = c$

11. $\rho = c \cos\theta$

13. $\operatorname{tg} y = c(1 - e^x)^3$

15. $1 + y^2 = \frac{2}{1 - x^2}$

EXERCÍCIOS 20.4 Equações Diferenciais Homogêneas

1. $(t + y)^2 (2t + y)^3 = c$

3. $t^3 + 6t^2y = c$

5. $x^2 + 4y^2 = 32$

7. $x^2 + 2xy = 8$

9. $(x + y - 1)^3 = c(x - y + 3)$

EXERCÍCIOS 20.5 Equação de Bernoulli

1. $ct^2y^2 + ty^2 - 1 = 0$

3. $ct^2y^2 + 2ty^2 - 1 = 0$

5. $y^2 = (2t + c) \cos^2 t$

7. $x = cy^2$

9. $x^2 = \frac{1}{y + cy^2}$

EXERCÍCIOS 20.6 Equações Diferenciais Exatas

1. $ty - \frac{t^3}{3} - \frac{y^3}{3} = c$

3. $\varphi \cos\theta + \theta \operatorname{sen}\varphi = c$

5. $e^{ty^2} + t^4 - y^3 = c$

7. $t^2y^3 = c$

9. $\frac{3t^2}{2}y + ty^2 = c$

11. $\frac{y^2e^x}{2} + ye^{2x} = c$

13. $x^4e^xe^y + x^2 + y^2 = c$

EXERCÍCIOS 20.7 Equações Diferenciais de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes

1. $y = c_1e^{2t} + c_2e^{3t}$

3. $y = c_1e^{\frac{1}{2}t} + c_2te^{\frac{1}{2}t}$

5. $y = c_1e^{5t} + c_2te^{5t}$

7. $y = c_1e^{-t}\cos\sqrt{2}\,t + c_2e^{-t}\operatorname{sen}\sqrt{2}\,t$

9. $y = c_1\cos\sqrt{5}\,t + c_2\operatorname{sen}\sqrt{5}\,t$

EXERCÍCIOS 20.8 Equações não-Homogêneas

1. $y = c_1e^t + c_2e^{2t} + \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{9}t\right)e^{-2t}$

3. $y = c_1\cos 2t + c_2\operatorname{sen} 2t + 2t$

5. $y = c_1e^{-t} + c_2e^{4t} + \left(\frac{1}{2}t - \frac{5}{8}\right)$

7. $y = (c_1 + x)\,e^{2x} + (c_2 - 4x)\operatorname{sen} x + (c_3 - 2x)\cos x - 1 - 2x$

9. $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x}\,x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{13}{36} - \frac{5}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2}\cos 2x$

EXERCÍCIOS 20.9 Resolução de Equações Diferenciais por Séries

1. $y = 2e^{(t-1)} - (t-1)^2 - 2(t-1)$

3. $y = e^{-\frac{t^2}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, t^{2n+1}}{3,5\ldots(2n+1)}$

5. $y = \operatorname{sen} x$

7. $y = \cos x$

9. $y = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1,3\ldots(2j-i)}{2^j j!} t^{2j}$

EXERCÍCIOS A.1 Uso de uma Tabela de Integrais

Nesses exercícios $u = x$ a menos que esteja indicado o contrário.

1. Da fórmula 6 com $a = 2$ e $b = 3$,

$$\int \frac{x\,dx}{2+3x} = \frac{1}{9}[2 + 3x - 2\ln|2+3x|] + \bar{C} = \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}\ln|2+3x| + C$$

3. Da fórmula 9 com $a = 6$ e $b = -1$,

$$\int \frac{x^2dx}{(6-x)^2} = -1\left[6 - x - \frac{36}{6-x} - 12\ln|6-x|\right] + \bar{C} = x + \frac{36}{6-x} + 12\ln|6-x| + C$$

5. Da fórmula 14 com $a = 1$ e $b = 2$

$$\int x\sqrt{1+2x}\,dx = \frac{2}{15\cdot 8}(3\cdot 2x - 2)(1+2x)^{3/2} + C = \frac{1}{30}(3x-1)(1+2x)^{3/2} + C$$

7. Das fórmulas 22 e 20 com $a = 1$ e $b = 2$,

$$\int \frac{\sqrt{1+2x}}{x}dx = 2\sqrt{1+2x} + \int \frac{dx}{x\sqrt{1+2x}} = 2\sqrt{1+2x} + \ln\left|\frac{\sqrt{1+2x}-1}{\sqrt{1+2x}+1}\right| + C$$

9. Da fórmula 25 com $a = 2$, $\int \frac{dx}{4-x^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| + C.$

11. Da fórmula 27 com $a^2 = 9$, $u = x + 3$ e escolhendo o sinal de menos,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2-9}} = \ln|x+3+\sqrt{(x+3)^2-9}| + C = \ln|x+3+\sqrt{x^2+6x}| + C$$

13. Da fórmula 30 com $a = 2$ e $u = 3x$,

$$\int \frac{\sqrt{9x^2+4}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{(3x)^2+4}}{3x}(3\,dx) = \sqrt{9x^2+4} - 2\ln\left|\frac{2+\sqrt{9x^2+4}}{3x}\right| + C$$

15. Da fórmula 42 com $a = 3$ e $u = 2x$,

$$\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{9-(2x)^2}}{2x}(2\,dx) = \sqrt{9-4x^2} - 3\ln\left|\frac{3+\sqrt{9-4x^2}}{2x}\right| + C$$

17. Da fórmula 50 com $2a = 4$, $a = 2$,

$$\int x\sqrt{4x-x^2}\,dx = \frac{2x^2-2x-3\cdot 2^2}{6}\sqrt{4x-x^2} + 4\cos^{-1}\left(1-\frac{x}{2}\right) + C = \frac{1}{3}(x^2-x-6)\sqrt{4x-x^2} + 4\cos^{-1}\left(\frac{2-x}{2}\right) + C$$

19. Da fórmula 73 com $n = 5$ e $n = 3$,

$$\int \operatorname{sen}^5 x\,dx = -\frac{1}{5}\operatorname{sen}^4 x\cos x + \frac{4}{5}\int \operatorname{sen}^3 x\,dx = -\frac{1}{5}\operatorname{sen}^4 x\cos x + \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{3}\operatorname{sen}^2 x\cos x + \frac{2}{3}\int \operatorname{sen} x\,dx\right)$$

$$= -\frac{1}{5}\operatorname{sen}^4 x\cos x - \frac{4}{15}\operatorname{sen}^2 x\cos x - \frac{8}{15}\cos x + C$$

21. Da fórmula 78 com $n = 7$, $n = 5$, e $n = 3$,

$$\int \operatorname{cosec}^7 x\,dx = -\frac{1}{6}\operatorname{cosec}^5 x \operatorname{cotg} x + \frac{5}{6}\int \operatorname{cosec}^5 x\,dx = -\frac{1}{6}\operatorname{cosec}^5 x \operatorname{cotg} x + \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{4}\operatorname{cosec}^3 x \operatorname{cotg} x + \frac{3}{4}\int \operatorname{cosec}^3 x\,dx\right)$$

$$= -\frac{1}{6}\operatorname{cosec}^5 x \operatorname{cotg} x - \frac{5}{24}\operatorname{cosec}^3 x \operatorname{cotg} x + \frac{5}{8}\left(-\frac{1}{2}\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x \ \frac{1}{2}\int \operatorname{cosec} x\,dx\right)$$

$$= -\frac{1}{6}\operatorname{cosec}^5 x \operatorname{cotg} x - \frac{5}{24}\operatorname{cosec}^3 x \operatorname{cotg} x - \frac{5}{16}\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} + \frac{5}{16}\ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x| + C$$

23. Da fórmula 87 com $n = 4$, 86 com $n = 3$, 87 com $n = 2$, e 82,

$$\int t^4 \cos t\,dt = t^4 \operatorname{sen} t - 4\int t^3 \operatorname{sen} t\,dt = t^4 \operatorname{sen} t - 4\left(-t^3\cos t + 3\int t^2 \cos t\,dt\right)$$

$$= t^4 \operatorname{sen} t + 4t^3 \cos t - 12\left(t^2 \operatorname{sen} t - 2\int t \operatorname{sen} t\,dt\right)$$

$$= t^4 \operatorname{sen} t + 4t^3 \cos t - 12t^2 \operatorname{sen} t + 24(\operatorname{sen} t - t\cos t) + C$$

$$= t^4 \operatorname{sen} t + 4t^3 \cos t - 12t^2 \operatorname{sen} t - 24t\cos t + 24 \operatorname{sen} t + C$$

25. Da fórmula 93 com $u = 3x$,

$$\int \sec^{-1} 3x\,dx = \frac{1}{3}\int \sec^{-1} 3x(3\,dx) = \frac{1}{3}(3x \sec^{-1} 3x - \ln|3x + \sqrt{9x^2 - 1}|) + C$$

$$= x \sec^{-1} 3x - \frac{1}{3}\ln|3x + \sqrt{9x^2 - 1}| + C$$

27. Da fórmula 98 com $n = 4$, 3, e 2, e da fórmula 97,

$$\int x^4 e^x dx = x^4 e^x - 4\int x^3 e^x dx = x^4 e^x - 4\left(x^3 e^x - 3\int x^2 e^x dx\right) = x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12\left(x^2 e^x - 2\int x e^x dx\right)$$

$$= x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12x^2 e^x - 24e^x(x - 1) + C = e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + C$$

29. Da fórmula 98 com $n = 2$ e da fórmula 97, ambas com $u = 4x$,

$$\int x^2 e^{4x} dx = \frac{1}{64}\int (4x)^2 e^{4x}(4\,dx) = \frac{1}{64}\left[(4x)^2 e^{4x} - 2\int 4x e^{4x}(4\,dx)\right] = \frac{1}{4}x^2 e^{4x} - \frac{1}{32}e^{4x}(4x - 1) + C$$

$$= \frac{e^{4x}}{32}(8x^2 - 4x + 1) + C$$

31. Da fórmula 103 com $n = 3$ e $u = 3x$,

$$\int x^3 \ln(3x)\,dx = \frac{1}{81}\int (3x)^3 \ln(3x)(3\,dx) = \frac{1}{81}\cdot\frac{(3x)^4}{16}(4\ln 3x - 1) + C = \frac{1}{16}x^4(4\ln 3x - 1) + C$$

33. Da fórmula 105 com $a = 2$ e $n = 5$, de modo que $a^2 + n^2 = 29$,

$$\int e^{2x} \operatorname{sen} 5x\,dx = \frac{e^{2x}}{29}(2 \operatorname{sen} 5x - 5\cos 5x) + C$$

35. Da fórmula 121 com $u = 5y$,

$$\int 3y \operatorname{senh} 5y\,dy = \frac{3}{25}\int 5y \operatorname{senh} 5y(5\,dy) = \frac{3}{25}\left(5y\cosh 5y - \operatorname{senh} 5y\right) + C = \frac{3}{5}y\cosh 5y - \frac{3}{25}\operatorname{senh} 5y + C$$

37. Da fórmula 13 com $a = 5$ e $b = -1$,

$$\int_1^2 \frac{dx}{x(5-x)^2} = \frac{1}{5(5-x)} + \frac{1}{25}\ln\left|\frac{x}{5-x}\right|\Bigg]_1^2 = \left(\frac{1}{5\cdot 3} + \frac{1}{25}\ln\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{5\cdot 4} + \frac{1}{25}\ln\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{60} + \frac{1}{25}\ln\frac{8}{3}$$

39. Da fórmula 33 com $a^2 = 16$ e escolhendo o sinal positivo

$$\int_0^3 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+16}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+16} - \frac{16}{2}\ln|x + \sqrt{x^2+16}|\Bigg]_0^3 = \left(\frac{3}{2}\cdot 5 - 8\ln 8\right) - (-8\ln 4) = \frac{15}{2} - 8\ln 2$$

41. Da fórmula 103, com $n = 4$,

$$\int_1^2 x^4 \ln x\,dx = \frac{x^5}{25}(5\ln x - 1)\Bigg]_1^2 = \frac{32}{25}(5\ln 2 - 1) - \frac{1}{25}(-1) = \frac{32}{5}\ln 2 - \frac{31}{25}$$

43. Da fórmula 28 com $a^2 = 16$, $u = x + 1$, e escolhendo o sinal de menos,

$$\int_3^4 \sqrt{x^2+2x-15}\,dx = \int_3^4 \sqrt{(x+1)^2-16}\,dx = \frac{x+1}{2}\sqrt{(x+1)^2-16} - \frac{16}{2}\ln|x+1+\sqrt{(x+1)^2-16}|\Bigg]_3^4$$

$$= \left[\frac{5}{2}\sqrt{9} - 8\ln(5+\sqrt{9})\right] - 8\ln 4 = \frac{15}{2} - 8\ln 8 + 8\ln 4 = \frac{15}{2} - 8\ln 2$$

45. Da fórmula 49 com $2a = 4$, $a = 2$, $u = w$,

$$\int_1^2 \sqrt{4w-w^2}\,dw = \frac{w-2}{2}\sqrt{4w-w^2} + 2\cos^{-1}\left(1-\frac{w}{2}\right)\Bigg]_1^2 = 2\cos^{-1}0 - [-\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + 2\cos^{-1}\tfrac{1}{2}] = \pi + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

47. Da fórmula 79 com $m = 3$ e $n = 5$,

$$\int_{\pi/8}^{\pi/4} \operatorname{sen} 3t\,\operatorname{sen} 5t\,dt = -\frac{\operatorname{sen} 8t}{2\cdot 8} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{2\cdot 2}\Bigg]_{\pi/8}^{\pi/4} = \left(-\frac{\operatorname{sen} 2\pi}{16} + \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi}{4}\right) - \left(-\frac{\operatorname{sen}\pi}{16} + \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{4}\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\sqrt{2}$$

49. Da fórmula 74 com $n = 3$ e $u = 4x$,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 2x\,\cos^3 2x\,dx = \frac{1}{32}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 4x(4\,dx) = \frac{1}{32}\left[-\frac{1}{3}\operatorname{sen}^2 4x\cos 4x\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{32}\cdot\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen} 4x(4\,dx)$$

$$= 0 - \frac{1}{48}\cos 4x\Bigg]_0^{\pi/2} = 0$$

51. Da fórmula 98 com $n = 3$ e 2, e da fórmula 97, ambas com $u = 2x$,

$$\int_0^1 x^3 e^{2x}dx = \frac{1}{16}\int_0^1 (2x)^3 e^{2x}(2\,dx) = \frac{1}{16}\left[(2x)^3 e^{2x} - 3\int (2x)^2 e^{2x}(2\,dx)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{16}\left((2x)^2 e^{2x} - 2\int (2x)e^{2x}(2\,dx)\right)\Bigg]_0^1 = \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{2x} + \frac{3}{8}[e^{2x}(2x-1)]\Bigg]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{3}{8}\right)e^2 + \frac{3}{8} = \frac{1}{8}(e^2 + 3)$$